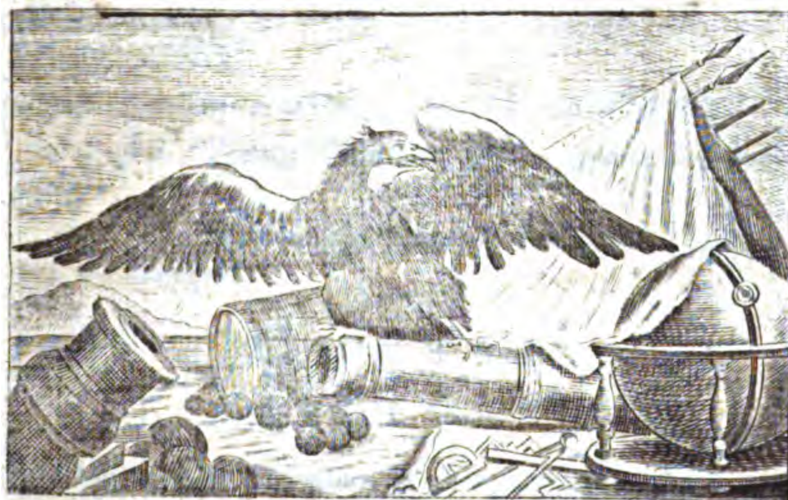


Robert Barclay.
Bury Hill.

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

ANNE'E MDCCLXIII.



A' BERLIN

CHEZ HAUDE ET SPENER,

Libraires de la Cour & de l'Académie Royale.

MDCCLXX.

Imprimé

par ordre de l'Académie.

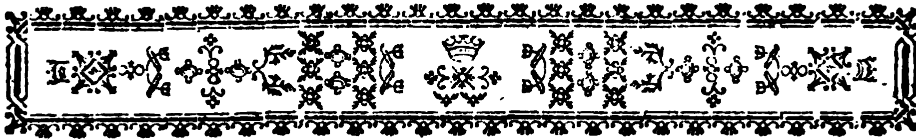


TABLE.

CLASSE

DE PHILOSOPHIE EXPÉRIMENTALE.

CLASSE

DE MATHÉMATIQUE.

CLASSE
DE PHILOSOPHIE SPÉCULATIVE.

CLASSE
DE BELLES-LETTRES.



MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

CLASSE DE PHILOSOPHIE EXPÉRIMENTALE.



NOUVELLES RECHERCHES PRATIQUES

SUR

LES ABERRATIONS DES RAYONS RÉFRACTÉS ET SUR LA PERFECTION DES LUNETTES.

SECOND MÉMOIRE. (*)

PAR MR. BÉGUELIN.



Je me propose ici d'appliquer aux rapports de réfractions & de dispersions que l'expérience m'a fait découvrir dans le verre commun, & dans le Cristal d'Angleterre la méthode que j'ai décrite dans un Mémoire précédent, pour trouver les objectifs les plus propres à corriger l'aberration des raïons. J'avois

em-

(*) Lû à l'Académie le 19 Janvier 1769. Voyez le premier, Tom. XVIII. p. 343.

emploïé dans le premier Mémoire les rapports qu'on adopte d'ordinaire, ſavoir celui des ſinus dans le crownglaſs $m = 1,55$; dans le criſtal, $n = 1,6$, & le rapport des diſperſions de ces deux eſpeces, $\frac{dn}{dm} = 1,6$, & j'en avois déduit la conſtruction la plus avantageuſe pour des objectifs à deux, & à trois lentilles. J'emploierai ici les rapports que j'ai conclus d'un grand nombre d'obſervations, tels que je les ai donnés dans mon Mémoire ſur les priſmes achromatiques, & ſans rien changer à la méthode que j'ai ſuivie, la ſeule qui me paroiſſe à la portée des Artiſtes, je leur préſenterai ici les conſtructions des objectifs les plus parfaits à pluſieurs lentilles, avec les éclairciſſemens néceſſaires pour qu'ils puiſſent en calculer eux-mêmes divers autres s'ils le ſouhaitent. Mais, auparavant, il ſera bon de faire, dans la premiere partie de ce Mémoire, quelques recherches préliminaires ſur deux articles que je n'ai pû traiter dans le Mémoire précédent. L'un concerne la comparaiſon entre l'imperfection des lunettes due à la figure ſphérique, & celle qui réſulte de la diverſe réfrangibilité des raïons. L'autre regarde l'aberration des raïons venans d'un point hors de l'axe. Les Géometres ont épuiſé là-deſſus tout ce qui intéreſſe la théorie; je n'ai en vue ici que la pratique & les Artiſtes.

PREMIERE PARTIE.

Comparaiſon entre les effets de la ſphéricité & de la diverſe réfrangibilité rélativement à l'imperfection des lunettes.

I.

Avant Newton on ne connoiſſoit que l'aberration de ſphéricité, & c'eſt à cet inconvénient qu'on attribuoit tous les défauts des lunettes d'approche. Depuis la découverte de la diverſe réfrangibilité on s'eſt accoutumé à regarder, d'après ce grand homme, l'aberration de ſphéricité comme incomparablement moins importante que celle de réfrangibilité; & on s'eſt confirmé dans cette idée par la comparaiſon de l'effet des Téleſcopes à réflexion, qui, quoique aſſujettis à l'aberration de ſphéricité

ricité, représentent l'objet avec beaucoup moins de confusion que les meilleures lunettes ordinaires ne peuvent le faire. Il étoit donc naturel de conclure que le principal défaut de celles-ci résultoit des couleurs dont les Télescopes sont exempts. Je ne sai si l'on ne pourroit pas dire qu'on a eu tort avant & après Newton. L'une & l'autre aberration rendent sans doute l'image confuse, & pour avoir des objectifs parfaits, il faudroit pouvoir les détruire entierement toutes deux. Mais, lorsque la chose n'est pas praticable, soit parce que la théorie s'y refuse, soit principalement parce que les difficultés de l'exécution en seroient augmentées, & que l'Artiste ne pourroit pas atteindre par conséquent à la précision nécessaire, la question la plus intéressante est de savoir laquelle des deux aberrations doit être tolérée, ou dans quelle proportion on pourra les tolérer toutes les deux à la fois.

Pour décider cette question, toujours rélativement à la pratique seule, je considere que la sphéricité influe sur le faisceau entier d'un raïon. Ainsi, lorsqu'un point lumineux darde un nombre quelconque de ces faisceaux sur la surface d'un objectif délivré de l'aberration de réfrangibilité, ces faisceaux, au lieu de se réunir de nouveau en un point unique formeront une surface circulaire dont le diametre sera proportionné à la diffusion; & chaque point de cette surface fera sur l'œil l'impression d'un faisceau entier.

Mais, si au contraire l'objectif est exempt de l'aberration de sphéricité, les centres de tous les faisceaux partis du point lumineux se réunissent au foïer commun, en un seul point qui représentera par conséquent très distinctement le point de l'objet; tous les autres points de l'objet, autour de celui-là, se peindront avec la même netteté autour de ce point du foïer; ce qui formera par conséquent une image vive & distincte de l'objet entier. Il se répandra à la vérité sur le tout un léger brouillard, produit par l'aberration des raïons rouges & violets de chaque faisceau, qui ne seront pas concentrés en un point avec les raïons jaunes verdâtres de ce faisceau-là; mais ces raïons foibles & épars qui ne font que la moindre partie du faisceau, n'éclipseront pas

 l'image

l'image produite par les raïons moïens; ils la rendroient un peu moins distincte, ils lui donneront une teinte différente, mais, ne formant point eux-mêmes d'image réguliere, ils n'empêcheront pas l'effet de celle qui a toute la régularité requise pour être clairement apperçue. Il doit en être de la vue comme de l'ouïe, & sans doute de tous nos sens. Notre illustre Confrere, M. Euler, a déjà remarqué que l'oreille aide à la régularité des accords, qu'elle supplée à ce qui manque à des proportions presque harmoniques. Il n'est pas douteux que l'œil, organe plus délicat encore, n'en fasse de même, ou plutôt que l'ame qui, par sa force essentielle, tend toujours à produire des idées neuves, distinctes & harmoniques, n'écarte les images confuses des raïons obscurs qui brochent sur le tout, pour ne contempler que la véritable image, forte & distincte, qui perce à travers ce léger nuage.

L'ame fait sans doute les mêmes efforts pour démêler l'image de l'objet, lorsqu'elle est offusquée par l'aberration de sphéricité; mais la même facilité ne s'y rencontre pas. Ici ce n'est plus une image distincte couverte d'une gaze transparente; ce sont des images d'une force égale, dont l'une couvre une partie de l'autre, & qui se confondent mutuellement. Pour appercevoir distinctement l'image produite par les centres des cercles de confusion, il faudroit faire abstraction de la surface entiere de ces cercles; mais chaque point de cette surface fait une impression à peu près égale à celle du centre lui-même. Il ne suffit plus d'écarter de légers raïons épars; il faudroit écarter des faisceaux entiers, dont chacun contient peut-être des milliers de raïons simples. Je crois donc pouvoir légitimement conclure de là, qu'à aberrations égales, celle qui résulte de la figure est beaucoup plus nuisible à la perfection des lunettes, que celle qui naît des diverses couleurs.

II.

On peut, je le sai, opposer à ce raisonnement le grand effet des Télescopes à réflexion. Mais il faut considérer que leur aberration de sphéricité est si petite qu'il n'est pas étonnant qu'elle ne produise qu'une confusion insensible, au prix de celle que donneroit une len-

 tille

tille isoscele d'un même foïer, & d'une égale ouverture. En effet, soit la distance focale pour l'un & l'autre $= F$, la demi-ouverture $x = \frac{F}{24}$, & la raison de réfraction du verre commun $= 1, 55$; l'aberration de sphéricité de la lentille isoscele est $= 0.002909\ F$. (I Mém. art. XXIX. rem. 2).

Soit maintenant le miroir sphérique AM; sa distance focale MF $= F$; son raïon de courbure AC $= r$. Le raïon incident RA, parallele à l'axe, forme avec la perpendiculaire, au miroir AC, un angle d'incidence i égal à l'angle de réflexion φ; or, par le parallélisme on a aussi $i = u$; donc le triangle AF′C est isoscele, & l'on a AF′ $=$ F′C. Mais, dans le triangle ALF′, on a AF′ $= \frac{AL. \sin. tot}{\sin t}$ $= \frac{x}{\sin t}$; on a aussi $t = 2u$, & la mesure de l'angle u est l'arc du miroir AM $= C$; donc on a le foïer MF′ $= (MC - AF') =$ $r - \frac{x}{\sin 2C}$; donc l'aberration du miroir est $= F - r + \frac{x}{\sin 2C}$: or, lorsque l'arc AM est très petit, AF′ coincide avec MF′; on a donc la distance focale $F = \frac{1}{2} r$, & par conséquent l'aberration $= \frac{x}{\sin 2C}$ $- \frac{1}{2} r$. De plus, aiant $\sin C = \frac{x}{r}$, on a à très peu près $\sin 2C =$ $2 \sin C = \frac{2x}{r}$; donc, à très peu près, l'aberration du miroir est $=$ $\frac{x}{\frac{2x}{r}} - \frac{1}{2} r$; c'est à dire qu'elle se réduit à rien, ou très peu s'en faut. Planche I. Fig. 1.

Mais, pour l'apprécier exactement, comme on a $x = \frac{F}{24}$, & $r = 2F$,

on

on a $\sin C = \frac{x}{48} = 0,0208333$, & $C = 1^{\circ}. 11', 62446$, donc $\sin 2C = 0.04166028$, & l'aberration: $\frac{x}{\sin 2C} - \frac{1}{2} r = -\frac{F}{24 \times 0.04166028} + \frac{1}{2} F = + 0,000153. F$. Donc, à foïers égaux, & à égales ouvertures, l'aberration de sphéricité d'une lentille isoscele est à celle du miroir d'un Télescope, comme 2909 à 153, ou comme 19, 8. à 1. Il est par conséquent naturel qu'abstraction faite de la réfrangibilité, l'image de l'objet vu par le Télescope soit vingt fois plus distincte que lorsqu'elle est apperçue par une lunette ordinaire; & de là vient sans doute que, non-obstant l'aberration de réfrangibilité, une lunette ordinaire de 100 pieds produit le même effet qu'un Télescope de cinq pieds; quoique la diffusion des couleurs, nulle dans le Télescope, occupe presque quatre pieds dans l'axe de la lunette.

III.

On répete souvent d'après le grand Newton, que l'aberration de sphéricité n'est à celle de réfrangibilité que comme 1 à 5449, (Smiths Optic. liv. II. ch. VI. §. 340.) & qu'ainsi l'essentiel est de détruire la derniere, sans s'inquiéter beaucoup de l'effet que l'autre pourra produire. Mais on a déjà observé que ce rapport n'a lieu que dans l'exemple allégué par Newton, & qu'il seroit aisé de trouver des cas où l'aberration de figure égaleroit, & même excéderoit celle des couleurs, dans un objectif simple. Nous avons vû dans le Mémoire précédent que l'aberration de figure d'une lentille isoscele est $= 0. 002909. F$, lorsqu'on a la demi-ouverture $x = \frac{F}{24}$, & le rapport de réfraction, $m = 1,55$. Or l'aberration de sphéricité étant en général $\frac{pxx}{F}$, quel que soit le rapport de x à F, on aura pour la lentille isoscele, $p = 0.002909 \times 24^{2} = 1,67558$. Mais l'aberration de réfrangibilité est $= \frac{F}{27\frac{1}{2}}$. On a donc ici l'équation

$\frac{1,67558\,xx}{F} = \frac{F}{27,5}$ ou $6,78812\,x = F$. Or aiant $F = \frac{r}{2(m-1)} = \frac{r}{1,1}$, & $x = r \sin C$, j'ai $\sin C = \frac{1}{6,78812 \times 1,1}$ ou $\sin C = 0.1339233$, ce qui est le sinus d'un arc de 7°. 42'. D'où l'on voit qu'en prenant le demi-arc C, d'un objectif isoscele, de 8^{d}, on aura une lentille dont les deux aberrations seront tout au moins égales, ou plutôt dont l'aberration de sphéricité excédera celle de réfrangibilité.

IV.

Pour pouvoir comparer l'imperfection que les lunettes souffrent de ces deux aberrations, il faut consulter les faits. Une lunette ordinaire de 12 pieds peut, nonobstant l'aberration de réfrangibilité, former une image bien nette: c'est ce qu'on trouve affirmé dans les *Transactions philosophiques*, N°. 96, & que M. Newton lui-même n'a pas révoqué en doute. Il faut supposer que l'ouverture de l'objectif étoit assez petite pour rendre insensible l'aberration de figure, mais celle des couleurs subsistoit toujours, & devoit être $= \frac{12.\ 12''}{27\frac{1}{2}}$, ou de 5'',2. Donc une aberration de 5'',2 est tolérable si elle résulte des couleurs; mais, lorsqu'elle résulte de la figure, on exige qu'elle n'excede pas $\frac{3}{800}''$, sur une lunette de 50'', ou en général qu'elle soit = 0'', 000075 F: elle seroit donc dans un objectif de 12 pieds = 0'',0108. Ainsi, pour que les deux aberrations produisent un défaut égal dans les lunettes, celle de réfrangibilité doit être à celle de sphéricité comme 520 à 1. C'est plus qu'il ne m'en faut pour confirmer mon raisonnement métaphysique: Que l'aberration insensible de sphéricité soit trois fois plus grande, = 0''. 000225. F, que l'aberration des couleurs n'ait été dans l'objectif en question que de $\frac{5,2''}{5}$, en négligeant les raions les plus foibles, ces aberrations seront encore entr'elles, quant au vice d'imperfection, comme 104 à 3, ou comme 32 à 1.

V.

Quelque peu importante que ſoit l'aberration de réfrangibilité lorſqu'on la compare à celle de ſphéricité, je ne prétends pas cependant qu'on doive la négliger dans la pratique. La théorie montre qu'on peut détruire l'une & l'autre à la fois. Un rapport convenable entre les foïers poſitifs & négatifs des lentilles convexes & concaves ſuffit pour détruire ſenſiblement les couleurs; ainſi le rapport entre les deux faces d'une même lentille reſte encore indéterminé. On peut donc donner à ces faces le rapport le plus propre à rendre nulle l'aberration de ſphéricité, ſans altérer la longueur du foïer. Mais, ſi ce rapport mettoit une trop grande inégalité entre les faces, s'il exigeoit des raïons ou trop longs, ou trop courts; s'il falloit, comme la théorie peut le preſcrire, un baſſin de 60 pieds, pour une des faces d'un objectif de 4 pieds, il eſt évident, ce me ſemble, qu'il vaudroit mieux dans la pratique altérer un peu le rapport des foïers, & laiſſer ſubſiſter quelque aberration de réfrangibilité afin de détruire à moins de fraix celle qui naît de la figure des verres. Peut-être même le ſacrifice ne feroit-il pas ſi grand qu'on pourroit le penſer d'abord; car il ne faut pas croire que, pour avoir donné aux foïers poſitifs & négatifs le rapport qui réſulte des forces diſperſives, l'aberration de réfrangibilité ſoit exactement nulle: elle l'eſt pour les raïons qui paſſent près de l'axe; mais, ſi l'ouverture de l'objectif eſt conſidérable, comme elle doit l'être dans la pratique, & que, pour détruire l'aberration de ſphéricité, il faille donner de grandes courbures à quelques faces, on fera renaître l'aberration des couleurs pour les raïons qui ſeront éloignés de l'axe. Lorſqu'on pourra donc, en altérant un peu la proportion qui devroit être entre les foïers poſitifs & négatifs, réuſſir à détruire avec des lentilles iſoſceles, ou peu éloignées de l'être, l'aberration de ſphéricité, il paroit très probable qu'on aura donné à l'objectif la plus grande perfection dont il eſt ſuſceptible dans la pratique.

VI.

VI.

Recherches ſur l'effet de l'aberration des raïons partis d'un point de l'objet hors de l'axe.

Les plus grands Géometres ſe ſont exercés ſur ce ſujet. Il fournit à la théorie des problemes très curieux, dont la ſolution exige des méthodes fines & délicates. Dans la pratique, que j'ai ſeule en vue, la queſtion ſe réduit à ſavoir: 1°. ſi cette aberration eſt encore ſenſible lorſque celle des raïons dans l'axe eſt détruite? & 2°. ſi l'on peut y remédier ſans qu'il en réſulte de plus grands inconvéniens?

Pour réſoudre ces queſtions, il faut d'abord diſtinguer deux claſſes de raïons partis d'un point hors de l'axe. Il n'y a, à proprement parler, que le centre de l'objet ou du champ de la lunette qui ſoit véritablement dans l'axe; tous les autres points de l'objet depuis ce centre juſqu'aux extrémités ou à la circonférence du champ, ſont en rigueur hors de l'axe, & s'en éloignent plus ou moins ſuivant que le champ eſt plus ou moins grand, & que les points lumineux ſont plus ou moins diſtants du centre. Or, dans la pratique, vû l'éloignement des objets, le cone de raïons dardés d'un point de l'objet ſur la ſurface de l'objectif, ſe transforme en un cylindre, dont la longueur eſt cenſée infiniment grande, eu égard à ſa baſe qui eſt le cercle de l'ouverture extérieure de la lunette, ou, ce qui revient au même, le plan de l'objectif. Si donc le point lumineux eſt dans l'axe, il arrive que l'axe du cylindre, & l'axe de la lunette, ne font que la continuation d'une même ligne droite. Si, au contraire, le point lumineux de l'objet eſt hors du centre, l'axe du cylindre ſera incliné d'autant à l'axe de la lunette, mais on peut toujours concevoir un plan qui paſſe par ces deux axes; & tous les raïons qui ſe trouveront dans la ſection longitudinale du cylindre que ce plan commun repréſente, formeront la premiere claſſe: celle *des raïons ſimplement obliques à l'axe.* Tous les autres raïons dont le cylindre eſt compoſé, contenus dans des ſections paralleles à cette ſection-là, des deux côtés du plan commun; tous ces raïons, dis-je, ſeront rompus vers ce plan commun dans des directions obliques, &

formeront la classe *des raïons obliques au plan*. Ainsi les raïons de la premiere classe tombent tous sur un même diametre de l'ouverture; ceux de la seconde classe tombent sur toutes les cordes paralleles à ce diametre, qu'on peut tracer dans un cercle à droite & à gauche du centre. Dans un sens, qui sera, si l'on veut, le sens vertical, tous ces raïons des deux classes sont perpendiculaires aux cordes sur lesquelles ils tombent; dans le sens opposé, ou horizontal, ils ont tous une déclinaison égale à l'angle du demi-diametre du champ apparent, si le point lumineux est à la circonférence de l'objet visible; ou, en général, cette déclinaison sera rélative à la distance du point lumineux au centre de l'objet.

VII.

Pour connoitre la plus grande aberration des raïons obliques, il faut donc commencer par évaluer le plus grand champ possible d'une bonne lunette, d'une lunette qui amplifie 150 fois le diametre de l'objet. Comme l'œil n'embrasse à la fois qu'un quart de cercle, la tangente du demi-diametre du champ apparent sera la tangente de 45 degrés, laquelle est égale au raïon. Donc la tangente du demi-diametre apparent de l'objet lui-même, qui doit être amplifié 150 fois, ne sauroit excéder $\frac{1}{150}$, si l'on prend l'unité pour le raïon; cette tangente est $=$ 0.0066,66, c'est celle d'un arc de 23′. Ainsi le champ apparent ne sauroit être dans une lunette qui grossit 150 fois, que de 46 minutes; & dans ce cas, le point de l'objet le plus écarté du centre dardera tous ses raïons sur l'objectif sous une obliquité de 23′. Il n'est pas nécessaire d'ajouter que, si la lunette grossit plus de 150 fois, le champ apparent & l'obliquité d'incidence seront encore moindres, & qu'ils augmenteront au contraire à mesure que la lunette amplifiera moins. Mais, pour ne pas limiter à une seule espece de lunette les recherches que nous allons faire, nous supposerons en général le diametre apparent de l'objet $= 2d$. & par conséquent l'angle de la plus grande obliquité du cylindre sur l'ouverture de la lunette sera $= d$.

VIII.

VIII.

De la plus grande aberration des raïons obliques à l'axe.

Puiſque tous les raïons de cette premiere claſſe ſont dans le plan commun des deux axes, ſuppoſons que le papier de la Fig. 2. représente ce plan, commun à l'axe RLf du cylindre lumineux, & à l'axe PLF de la Junette, qui font entr'eux l'angle RLP: concevons de plus que les raïons partent d'un point quelconque de l'extrémité du champ apparent, point qu'on peut toujours imaginer être le point le plus haut de l'objet, on aura le plus grand angle RLP $= d$. Le raïon rA qui forme le côté ſupérieur de la ſection cilindrique, tombe ſur la circonférence de l'objectif en A, & le demi-arc de courbure AM étant C, l'incidence de ce raïon ſera $= C - d$; par la même raiſon le raïon extrême inférieur ϱa, tombant en a, ſur le bord opposé de la lentille, y fera un angle d'incidence $= C + d$. Fig. 2.

Comme le raïon RD qui paſſe par le milieu de la lentille L, peut-être cenſé la traverſer en droite ligne vû que l'incidence eſt presque perpendiculaire, & que les raïons des faces ſont ſuppoſés n'être pas fort inégaux; la droite RLf repréſentera la *ligne du foïer* pour les raïons partis du point ſupérieur de l'objet le plus éloigné du centre.

Or, puiſque nous ſuppoſons que l'aberration eſt déjà nulle pour les raïons dans l'axe, tels que pA, πa, ceux-ci aiant une incidence $= C$, ſe réuniront à la diſtance focale au point F, en faiſant chacun avec l'axe un angle $\phi = \delta - C$. Mais, lorſqu'une incidence donnée C, augmente ou diminue d'une petite quantité d, les faces des lentilles reſtant conſtantes, l'angle de réfraction δ diminue, ou augmente préciſément, ou du moins très ſenſiblement dans la même raiſon. Ainſi, pour le raïon oblique rA, on aura $\phi = \delta - C + d$; & pour le raïon ϱa, $\phi = \delta - C - d$. Il faut donc faire décrire du point A, au raïon AF, un arc F$g = d$, pour avoir l'angle LAg $= 90^d - (\phi + d)$; & faire décrire du point a un pareil arc Fh, au raïon aF, pour que l'angle Lah ſoit le complément de l'angle

$\phi - d$; par là on aura l'aberration entiere de longueur $= gh$, qui ſe réduit à la moitié, parce que le foïer commun des principaux raïons du cylindre eſt ſenſiblement au milieu en f.

IX.

Calcul de la plus grande aberration des raïons dans le plan commun des axes.

Dans le triangle ALg, on a (art. VIII.) l'angle $LAg = 90° - \phi + d$; l'angle LAg eſt, par l'obliquité des axes, $= 90° + d$; donc on a l'angle en $g = \phi$. Pareillement, dans le triangle aLh, on a (art. VIII.) l'angle $Lah = 90° - \phi + d$, l'angle $aLh = 90° - d$; donc l'angle en $h = \phi = g$. Donc les raïons obliques à l'axe coupent la ligne du foïer ſous un même angle, auſſi longtems que l'on peut ſuppoſer que l'angle de réfraction augmente ou diminue d'autant que l'angle d'incidence a diminué ou augmenté; ce qui eſt pour des variations médiocres ſenſiblement vrai dans des objectifs dont on n'altere point la proportion des faces, ni le foïer.

Mais, en coupant la ligne du foïer ſous un même angle ϕ, les raïons extrêmes ne la coupent pas préciſément au même point f, où les rayons qui paſſent près du centre de l'objectif la couperont, quoique les lignes de direction de ces raïons ſoient ſenſiblement égales, puis qu'on a, à très peu près, $ah = aF = AF = Ag$. La raiſon en eſt que le coſinus de l'angle AgL eſt $= mg$, & le coſinus de l'angle ahL eſt $= nh$. Or les points m & n ſe déterminent par les perpendiculaires Am, an, tirées ſur la ligne de foïer RLf. La meſure de l'aberration de longueur eſt donc $mn = gh$, qu'on peut réduire à la moitié AE ou ae, diſtance du foïer des raïons extrêmes au foïer moïen. Or AE, ou mL, eſt le ſinus de l'angle d'obliquité d, pour un raïon égal à la demi-ouverture de l'objectif AL; ainſi l'aberration de longueur eſt ici $= x \sin d$, & puiſque nous ſuppoſons toujours $x = \frac{F}{24}$, l'aberration des raïons obliques à l'axe dans une lu-

nette

nette qui grossira 150 fois, sera $= \frac{F}{24}$. sin $23' = \frac{0,0066904\,F}{24}$ $= 0,00027876\,F$.

X.

Calcul de l'aberration des raïons obliques au plan commun des axes.

Les raïons obliques à l'axe dont nous venons de déterminer l'aberration, ne sont que la moindre partie du cylindre lumineux qui a pour base l'ouverture de l'objectif, puisqu'ils n'occupent que le diametre physique de cette base. Mais ce sont aussi de tous les raïons qui composent le cylindre, ceux qui ont la plus forte aberration réguliere. La raison en est évidente, puisqu'ils sont contenus dans la section qui insiste sur le diametre de l'ouverture, tandis que toutes les autres sections paralleles à celle-là n'insistent que sur des cordes plus ou moins grandes. Sous ce point de vue, le calcul de l'aberration des raïons obliques au plan, est ramené sans peine au calcul précédent & n'exige point d'autre figure. En continuant de prendre le plan de la planche (Fig. 2.) pour le plan commun des axes, la différence qu'il faut mettre entre les raïons extremes rA, ϱa, lorsqu'ils sont dans le plan & lorsqu'ils y sont inclinés, c'est que, dans le premier cas, il y a entr'eux la distance de tout le diametre Aa de l'ouverture, & que, dans le second cas, cette distance n'est plus qu'une corde du cercle de l'ouverture, parallele à ce diametre Aa. Or la corde du cercle devenant plus courte à mesure qu'elle est élevée au-dessus du centre L, & l'aberration étant pour les raïons extremes de la section qui insiste sur le diametre de la lentille $= x$. sin d (IX.), elle sera ici (pour une corde $= 2s$.) $= s$. sin d, expression générale qui renferme l'aberration des raïons des deux classes. Elle est la plus grande lorsque s représente le sinus totus x, c'est le cas de la section cylindrique dans le plan commun des axes: cette expression est la plus petite, & absolument nulle dans le cas opposé, pour toute la section cylindrique qui couperoit la premiere à angles droits, parce qu'alors la corde évanouit & qu'on a $2s = 0$.

Pour

Pour concevoir ce dernier cas, il n'y a qu'à imaginer que le plan commun des axes eſt vertical au plan de la figure, & que ſa coupe eſt repréſentée par la droite PLF. Les raïons rA, ϱa, ſeront ici dans le même plan des raïons pA, πa, venant d'un point dans l'axe; ainſi leur direction d'incidence ſera parallele au plan commun PLF. L'incidence étant donc la même dans le ſens horizontal pour les uns comme pour les autres, & l'aberration étant ſuppoſée nulle pour les raïons dans l'axe, la réunion de tous ſe feroit dans le plan commun des axes, au point F de la diſtance focale, ſi les raïons rA, ϱa, n'avoient que la ſeule direction pA, πa, dans le ſens horizontal; mais, comme ils ont dans le ſens vertical une inclinaiſon, rAp, $\varrho a \pi$, de d', leur point de réunion dans le plan des axes deſcendra d'autant au deſſous du point F. Et puiſque, dans ce ſens vertical, ils traverſent l'objectif de la même maniere qu'ils traverſeroient obliquement un verre plan, ils conſervent à leur ſortie la même obliquité d, qu'ils avoient auparavant; & tombent exactement en f, foïer général des principaux raïons obliques. Donc, ſi MAOa repréſente le plan de l'objectif, & ALa, la ſection cylindrique dans le plan commun des axes, l'aberration des raïons extremes en A, & a, ſera $=x$ ſin d, celle de tous les raïons de la ſection MO ſera $=$ o, & celle des raïons extrémes A$'$, a', des ſections latérales A$'a'$, ſera $=$ A$'$L$'$ ſin $d =$ ſin A$'$LL$'$ ſin d; de plus les raïons correſpondants A$'$A$'$, ou $a'a'$ des ſections latérales également diſtantes du plan commun ALa, ſe réuniront toujours en un même point.

Planche II. Fig. 3.

XI.

Mais, outre cette aberration en longueur, $= s$ ſin d, commune à tous les raïons obliques, ceux qui ſont hors du plan commun des axes en ont encore une en largeur qui leur eſt particuliere, & qui réſulte de leur direction doublement oblique. C'eſt ce qu'il faut expliquer.

Fig. 4.

Soit encore le plan des axes AaLFf repréſenté par le plan de la Figure; qu'on conçoive la corde A$'a'$ tirée dans un plan A$'$E$a'e$ perpendiculaire à ce premier plan; les raïons r'A$'$, $\varrho' a'$ d'une ſection latérale parallele au plan commun des axes, après avoir traverſé l'objectif,

jectif, iront couper ce plan en g & h, & y auront chacun une aberration de longueur gf, hf, $= A'L' \sin d$; mais ces raïons ne se couperont pas en o, comme il arrive à ceux qui n'ont point d'obliquité au plan. Ils passent l'un au dessous de l'autre par le plan o sans se toucher, & la plus petite distance qui reste entr'eux forme une aberration en largeur qui est représentée par fu (Fig. 5). Dans cette figure, Lf représente le plan des axes vû de profil, & le point L' désigne la corde $A'L'a'$, vue de même; & puisque les raïons $r'A'$, $\rho'a'$, sont également élevés au dessus du plan Lf; de la hauteur LL', l'un le coupe en g, sous un angle $L'gL$, & l'autre en h sous un angle $L'hL$. L'aberration de longueur gh étant fort petite en comparaison de la distance de foïer Lf, on peut regarder les deux angles en g & en h, comme égaux entr'eux, & en ce cas-là la plus petite aberration en largeur se mesure du point f, & sera $= 2fu$, ou simplement fu, puisque f est le foïer commun. Or fu est la tangente de l'angle d'obliquité des raïons $L'gL$, pour un sinus totus gf égal à l'aberration en longueur; on a donc $fu = s \sin d \tang L'gL$; ou, puisque dans ces petits angles les sinus & les tangentes se confondent, & qu'on peut prendre sans erreur Lg, ou Lf, égal à la distance focale F, on aura $fu = \frac{gf \times LL'}{Lg} = \frac{s \sin d \times LL'}{F}$. Mais LL' croit à mesure que s, ou $A'L'$, décroit, & réciproquement; puisque LL' est le cosinus de l'angle dont s est le sinus; on a donc $LL' = \sqrt{(1 - ss)}$, & $fu = \frac{\sqrt{(s^2 - s^4)} \sin d}{F}$.

XII.

De la confusion qui résulte des aberrations des raïons obliques.

Si les raïons venant d'un point hors de l'axe n'avoient que l'aberration de longueur gh (Fig. 3), leur aberration latérale $fo = \frac{A'L' \times gf}{F} = \frac{ss \sin d}{F}$, représenteroit toute la confusion apperçue

par

par l'œil. Cette confusion ne seroit pas, comme pour les raïons dans l'axe, une surface circulaire; ce ne seroit qu'une simple ligne fo, & le nombre de raïons rassemblés sur chaque point de cette ligne seroit exprimé par les cordes TV, T'V' etc. qui la coupent, d'où l'on voit que cette aberration se réduit presqu'à rien, puisque le plus grand nombre de raïons tombe dans le foïer f, ou à une très petite distance de ce foïer. Si d'un autre côté ces raïons hors de l'axe n'avoient que l'aberration de largeur fu, la confusion seroit exprimée par la simple ligne ut, si l'on prend $fu = fs$, ou le cosinus $\sqrt{(1 - ss)} = s$, parce qu'alors la valeur fu, $\frac{\sqrt{(1 - ss)} \times s \sin d}{F}$, est à son *maximum*. Mais le même raïon qui se trouveroit en n sur fo, se trouveroit en m sur fu, puisque $fm = nq$ est le cosinus de fn, ce qui n'étant pas possible, son véritable lieu apparent sera en q. De ces intersections mutuelles résultent les deux courbes $fypqo$; & toute la confusion des raïons hors de l'axe se réduira à l'espace renfermé entre ces deux lignes courbes, dont chaque point est éloigné du foïer commun f, de la distance $\frac{\sqrt{((1 - ss)(s \sin d)^2 + (ss \sin d)^2)}}{F} = \frac{ss \sin d}{F}$. Lorsque $s = x$, on a $1 - ss = 0$; lorsque $s = 0$, on a $1 - ss = x$: dans le premier cas l'aberration totale en largeur est $\frac{xx \sin d}{F}$, dans le second elle est $= 0$; & c'est entre ces deux limites qu'elle est renfermée.

Fig. 6.

XIII.

Il résulte de là 1°. que l'aberration des raïons de la premiere classe d'un point hors de l'axe est incommensurable à celle des raïons dans l'axe, puisque celle-là ne produit qu'une ligne de confusion, au lieu que celle-ci produit une surface confuse. 2°. Que par conséquent il est tout autrement important de détruire l'aberration dans l'axe que celle des raïons dans le plan des axes. 3°. Qu'en rendant la premiere nulle on diminue à peu près d'autant celle-ci, puisque la ligne

ligne gf (Fig. 2.) augmenteroit à peu près comme l'aberration F′F dans l'axe; à la vérité, si l'aberration dans l'axe ne surpassoit pas fh, le point h se rapprocheroit de f, & y tomberoit même lorsqu'on prendroit F′F $= fh$; mais l'aberration gh n'en seroit pas plus petite, & le plan de confusion ne répondroit plus au point f, foïer des principaux raïons.

XIV.

De la formule qui exprime l'aberration de longueur des raïons obliques x sin d, il résulte 1°. que cette aberration est en raison directe de la grandeur du champ de la lunette $2d$, & de l'ouverture de l'objectif $2x$. Ainsi, toutes choses d'ailleurs égales, plus la lunette grossira les objets, plus d, & par conséquent l'aberration fo diminueroit, s'il ne falloit pas augmenter l'ouverture en raison du grossissement. 2°. Que la proportion des faces de l'objectif n'entre pour rien dans cette aberration, aussi longtems qu'on peut supposer que l'angle de derniere réfraction du raïon à sa sortie de l'objectif, croit & diminue d'autant que l'angle de premiere incidence sur l'objectif a été diminué ou augmenté; ce qui a également lieu à très peu près dans un objectif de plusieurs verres, & dans un objectif simple. 3°. Que, lorsque cette supposition n'aura plus lieu, & que, par exemple, après avoir eu δ pour une incidence α, on auroit pour une incidence $\alpha - d$, $\delta + d + p$, on aura aussi, du moins avec toute la précision que la pratique permet, pour l'incidence $\alpha + d$, l'angle d'émersion $= \delta - d - p$. Or, quelque proportion qu'on donne aux faces des lentilles, l'incidence sera toujours à l'un des bords de l'objectif $= \alpha + d$, & au bord opposé $= \alpha - d$. Ainsi on aura dans notre exemple l'angle à l'axe du raïon supérieur ABL $= \phi + d + p$ (Fig. 2.), & celui du raïon inférieur sera $= \phi - d - p$; donc le premier coupera la ligne du foïer Lf sous l'angle $\phi + p$, & le second sous l'angle $\phi - p$, ce qui augmenteroit l'aberration gf, de toute la valeur de l'angle $2p$, si p est une grandeur positive, ou la diminueroit d'autant si p est négatif, parce que dans le premier cas le raïon Ag tomberoit en deça du foïer f, & le raïon ah en delà du

même

même point f, chacun à une diſtance $= m\mathrm{L} + p$, au lieu que dans le ſecond cas cet intervalle ſera $= m\mathrm{L} - p$.

XV.

Moïen de diminuer l'aberration des raïons hors de l'axe.

Si l'aberration de ces raïons produiſoit une confuſion aſſez conſidérable pour qu'il fallût chercher à la diminuer par la proportion des faces des lentilles, il faudroit, comme nous venons de voir, faire en ſorte que, lorſque l'angle de premiere incidence C décroit par exemple de $23'$, l'angle de derniere réfraction δ n'augmentât pas d'autant. C'eſt ce qu'on obtiendroit en donnant une plus forte courbure à la premiere face de la lentille qu'à la ſeconde. Car, plus l'incidence eſt grande, plus le ſinus δ de la ſeconde ou de la derniere réfraction eſt petit; or, plus un ſinus eſt petit, moins un accroiſſement égal augmente l'arc qui lui correſpond. Mais, pour rendre nulle l'aberration dans l'axe, il faut déjà donner plus de courbure à la premiere face d'une lentille qu'à la ſeconde; ainſi, en détruiſant l'aberration d'un objet dans l'axe, on remédie auſſi efficacement à celle d'un objet hors de l'axe; & comme, en ſuivant ma méthode, on rendra nulle l'aberration dans l'axe à l'aide des plus petites courbures poſſibles, il ne paroit pas qu'il fût expédient dans la pratique de corriger l'aberration des objets hors de l'axe; car, s'il falloit pour y parvenir des courbures plus petites, on feroit indubitablement renaitre l'aberration dans l'axe; ſi au contraire la correction exigeoit de plus fortes courbures, elles pourroient entrainer des inconvéniens plus grands que celui qu'on voudroit éviter.

XVI.

Pour donner cependant un exemple de la maniere de procéder à cette correction, je ſuppoſe qu'on veuille faire évanouir l'aberration de longueur gh (Fig. 2.), ce qui ſuppoſe l'équation $\mathrm{L}g = \mathrm{L}h = \mathrm{L}f$: ſoit l'angle $ah\mathrm{L} = v$, l'angle $\mathrm{A}g\mathrm{L} = \mathrm{V}$, le demi-champ apparent $d = 46'$, on aura l'angle $\mathrm{LA}g = 89°.\ 14' - \mathrm{V}$, & l'angle $\mathrm{L}ah = 90°.\ 46' - v$; l'équation $\mathrm{L}g = \mathrm{L}h$ ſera donc:

x (ſin

$$x\,\frac{(\sin 89^\circ.14' - V)}{\sin V} = x\,\frac{(\sin 90^\circ.46' - v)}{\sin v}.$$

Or, comme v & V ne sauroient gueres différer de l'angle au foïer A $= 2^\circ.23'',1571$, & que la petite différence qu'il y aura entre v & V est presque insensible sur des sinus de 86^d à 88^d, posons $v = V = 2^\circ.23'$; l'équation donnera

$$\sin v\ (\sin 86^\circ,51') = \sin V\ (\sin 88^\circ.23')$$

ou $$\log v + 9.9993433 = \log V + 9.9998271;$$

donc $\log v = \log V + \mathrm{l}.\ 0.0004838$; en partageant cette différence également sur les deux angles, on aura donc $v = 2^\circ.23',0798$, $V = 2^\circ.22',92$, ou plus exactement on en conclura que ces deux angles doivent différer entr'eux de $0',159$, dont V sera plus petit que v, si chacun d'eux est à peu près de $2^\circ.23'$. Si donc le champ apparent étoit de $1^\circ.32'$, il faudroit, après avoir détruit l'aberration dans l'axe, proportionner les faces d'une lentille de maniere que l'incidence $C + 46'$ donnât: $\delta = \phi \div 46' - 0',0798$, & que l'incidence $C - 46'$ donnât: $\delta = \phi + 46' + 0',0798$, ce qui n'exigeroit pas une grande inégalité dans la proportion des faces; mais, par cela même, il est à présumer qu'en rendant l'aberration nulle pour les raïons dans l'axe, la différence entre v & V sera déjà plus grande que l'équation ne le demande.

XVII.

Calcul du cercle de confusion qui résulte de l'aberration d'un objet hors de l'axe.

Quoique l'espace *sypopy*, occupé par les raïons d'un point hors de l'axe, ne soit pas un cercle, il est évident cependant qu'on peut le réduire sans erreur sensible à un cercle dont le raïon sera la moitié de l'aberration latérale *fo* (Fig. 6.): la plûpart des raïons sont concentrés auprès du foïer *f* (art. XII.), la plus grande partie des autres se trouveront auprès de *o*, & il n'y en aura qu'un très petit nombre hors

du cercle en p (art. XII.). Il eſt vrai que, pour eſtimer l'aberration des raïons obliques au plan des axes, nous avons ſuppoſé qu'ils traverſent l'objectif en un ſens, comme ils traverſeroient obliquement un verre plan (art. X.). Cela n'eſt pas vrai en rigueur; l'inégale épaiſſeur de la lentille, les diverſes inclinaiſons des tangentes aux points où le raïon traverſe l'objectif ſous l'obliquité d, doivent produire quelque irrégularité dans l'aberration de largeur, mais cette irrégularité elle-même empêcheroit toujours d'y remédier autrement que par la diminution des courbures de l'objectif; il ne reſte donc ici qu'à évaluer la confuſion réguliere réduite à un eſpace circulaire dont le diametre eſt $fo = x \sin d \times \frac{x}{F}$; & pour cet effet il eſt néceſſaire d'apprécier exactement l'aberration inſenſible, c'eſt à dire, celle qui ne ſauroit nuire à la netteté de l'image repréſentée au fond de l'œil.

XVIII.

Eſtimation de l'aberration de longueur incapable de produire un effet ſenſible.

Il n'y a que l'expérience qui puiſſe donner cette meſure, & cela en deux manieres; l'une c'eſt d'obſerver quel eſt l'angle viſuel, ou le diametre apparent au deſſous duquel un objet n'eſt plus viſible; l'autre c'eſt de calculer l'aberration de longueur d'une lunette, ou d'un Téleſcope, dont on aura eu lieu d'être ſatisfait: l'une & l'autre méthode a ſes incertitudes, & c'eſt en les réuniſſant qu'on peut arriver à une certaine préciſion. Les Opticiens & les Obſervateurs varient ſur l'eſtimation du diametre apparent inſenſible depuis l'angle de $2\frac{1}{2}''$ juſqu'à celui d'une minute; ils conviennent que ce diametre eſt plus grand pour un objet terne, que pour un objet éclatant, plus petit pour un objet d'une certaine étendue en longueur, que pour un eſpace circulaire. Or, comme dans l'image produite par les lunettes, l'eſpace de confuſion eſt circulaire, ou peu s'en faut, & que la diminution des raïons amortit l'éclat de l'objet, on peut ſans ſe tromper prendre l'angle viſuel α plus grand que $2\frac{1}{2}''$.

Soit

Soit donc l'aberration de longueur $= a$; on aura l'aberration de largeur $= \frac{ax}{F}$, & le diametre de la plus petite confusion $= D = \frac{ax}{2F}$: soit de plus le foïer de l'oculaire $= f$; on a la corde, le sinus ou la tangente du petit angle visuel insensible, $\sin \alpha = \frac{D}{f} = \frac{ax}{2Ff}$. Or, par la table de M. Huygens, on a, dans les lunettes ordinaires, le rapport de la demi-ouverture x, au foïer de l'oculaire f, comme 15 à 33, on a donc $a = \frac{22.F}{5} \sin \alpha$. Donc, dans les lunettes construites sur la proportion ordinaire, l'aberration insensible de longueur doit être $a = 4{,}4 F \sin \alpha$; en supposant donc l'angle visuel insensible $\alpha = 3'',5$, on a $\sin \alpha = 0.000017$, & l'aberration insensible $a = 0.000075.F''$: donc, pour un foïer de 50 pouces, on aura $a = 0'',00375$, comme je l'ai supposé dans mon premier Mémoire.

XIX.

Autant de fois donc qu'on supposera le plus petit angle visuel α plus grand que $3\frac{1}{2}''$, autant de fois on pourra estimer l'aberration insensible plus grande que $0{,}000075.F''$. Ainsi, en supposant $\alpha = 12 \times 3\frac{1}{2}'' = 42''$, on aura l'aberration insensible de longueur $a = 0.000075 \times 12.F$, ou $a = 0.0009 F$. Et comme les réfractions dans l'œil diminuent l'image d'environ $\frac{1}{3}$, si l'on prend le diametre de l'œil $= 1$ pouce, le point insensible dans l'œil aura pour diametre: $\frac{2}{3} \sin \alpha$ pouces. Le diametre de ce point sensible ne seroit donc que $\frac{1}{30900}$ pouces, si l'on prend l'angle visuel $\alpha = 3'',5$. Mais, si l'on suppose $\alpha = 42''$, ce diametre sera $= \frac{1}{7570}$ pouces, ce qui est encore bien petit.

XX.

Voïons maintenant quelle est la grandeur qu'on peut assigner à cet angle insensible α, d'après l'expérience des lunettes & des Télescopes célebres par leur bonté.

La

La lunette fondamentale de M. Huygens, qui sert de modele aux Tables dioptriques, avoit le foïer de l'objectif $F = 360$ pouces, la demi-ouverture $x = 1'',5$, le foïer de l'oculaire $f = 3'',3$. Je suppose l'objectif isoscele, & la force réfractive du verre: $m = 1,55$. Or l'aberration de sphéricité d'un point dans l'axe, lorsqu'on a $x = \frac{F}{24}$ est pour un tel objectif $a = 0.002909.F$, (I. Mém. art. XXIX. rem. 2.) Ici donc où l'on a $x = \frac{F}{240}$, par conséquent dix fois plus petit, l'aberration cent fois moindre, on a donc $a = 0.00002909 \times 360'' = 0''.0104724$, & puisqu'on a ici $a = 4,4.F \sin \alpha$ (XVIII.), on a $\sin \alpha = \frac{0.0104724}{1584} = 0.00000,6596$; donc l'angle $\alpha = 1'',36$. Il n'est pas étonnant qu'une confusion dont le diametre apparent n'est que $\frac{4}{3}$ de seconde, reste insensible; mais il faut y joindre la confusion beaucoup plus considérable qui doit résulter de l'aberration de réfrangibilité dans une lunette de 30 pieds. Cette aberration, en négligeant les raïons foibles & obscurs, a dû être tout au moins $= \frac{F}{125}$, & le diametre du cercle de confusion $= \frac{2x}{250}$: on a donc $\sin \alpha = \frac{2x}{250.f} = \frac{3''}{250 \times 3,3} = 0,003636$, ce qui indique un angle visuel α de plus de 12 minutes.

XXI.

Le Télescope à réflexion de M. Hadley, que M. Smith adopte pour modele de sa Table (Optic. 361.), a pour dimensions moïennes $x = 2'',5$, $F = 62'',5$, $f = \frac{3}{10}''$; son aberration de sphéricité pour les objets dans l'axe étant $a = \frac{1}{2}r - \frac{x}{\sin 2.C}$ (art. 11.), on a $r = 2F = 125''$, $\sin C = \frac{x}{r} = 0,02$; donc $C = 1°.8',$

75963,

75963, & sin 2 C = 0.03999206; par conséquent l'aberration de longueur est $a = \frac{25''}{0.3999206} - 62'',5 = 0'',0125$; donc, aiant sin $\alpha = \frac{ax}{2Ff}$ (art. XVIII.), on a ici le diametre apparent de la confusion sin $\alpha = \frac{0.0025}{3} = 0.0008333$, & l'angle visuel $\alpha = 171'',8$. Il en faudroit donc conclure, que, puisque ce Télescope représente les objets sans confusion, un angle visuel de 172 secondes ne fait point de sensation.

XXII.

Il sera à propos de rechercher encore l'aberration de ce Télescope pour les objets hors de l'axe. Soit le demi-diametre du champ visible $= d$, on aura l'angle d'incidence du raïon $rA = C + d$, qui sera réflêchi vers m, en sorte que l'angle externe m sera $= 2C + d$; & puisque la ligne de foïer Mgf décline de l'axe MC, d'un angle $CMg = d$, on aura l'angle en $g = 2C$. Or, par la nature du cercle, on a $p = \frac{1}{2}C$; & aiant l'angle $q = 90° - m$, on a l'angle entier $MAg = 90° - \frac{3}{2}C - d$. Or la corde MA est le double sinus de l'angle $\frac{1}{2}C$, pour un raïon $= r$, ce qui donne $MA = 2r \sin \frac{1}{2}C$; & par conséquent dans le triangle MAg, on aura la distance de foïer du raïon rA, Fig. 1.

$$Mg = \frac{2r. \sin \frac{1}{2}C. \sin (90° - \frac{3}{2}C - d)}{\sin 2C.}$$

On trouvera par le même procédé, pour le raïon ρa, sa distance de foïer

$$Mh = \frac{2r. \sin \frac{1}{2}C. \sin (90° - \frac{3}{2}C + d)}{\sin 2C.}$$

Et lorsque l'arc C est infiniment petit, ces deux formules donnent le foïer général

$$Mf = \frac{1}{2}r. \sin (90 \mp d)$$

ou $$Mg = \frac{2r.\ \sin\frac{1}{2}C.\ \cos(d + \frac{3}{2}C)}{\sin 2C.}$$

$$Mh = \frac{2r\ \sin\frac{1}{2}C.\ \cos(\frac{3}{2}C - d)}{\sin 2C.}$$

$$Mf = \frac{1}{2}r\ \cos d.$$

XXIII.

Dans le Télescope de M. Hadley, on a $r = 125''$, & le grossissement $\frac{F}{f}$ étant $= \frac{625}{3} = 208,33$, on aura (art. VII.) tang $d = \frac{1}{208,33} = 0.0048$, donc $d = 16',5$; aiant de plus $C = 1°.8',75963$ (art. XXI.), on a

$$Mg = \frac{250'' \times 0,0100005 \times 0,9993947}{0,03999206} = 62'',47777.$$

$$Mh = \frac{250'' \times 0,0100005 \times 0,99968402}{0,03999206} = 62'',49587.$$

$$Mf = 62'',5 \times 0,9999885 = 62'',49928;$$

on a donc l'aberration de longueur $gf = 0'',02151$; l'aberration latérale sera $\frac{gf \times MA}{Mf} = \frac{0'',02151 \times 2'',500125}{62'',49928}$, le diametre du cercle de confusion $= \frac{0'',02151 \times 2'',500125}{124,99956}$, & le sinus de l'angle visuel $\alpha = \frac{0.2151 \times 2,500125}{124,99956 \times 3} = 0,00143407$, ce qui supposeroit l'angle insensible $\alpha = 4'.56''$.

XXIV.

XXIV.

Aucun Opticien, que je fache, n'avoit encore remarqué cette énorme confufion que devroit produire le Télefcope de Hadley. Cependant ce n'eft pas encore la plus forte qui puiffe être tolérée dans les miroirs, puifque le Télefcope de M. Hauksbée, avec un foïer de 39 pouces, produit felon M. Smith (Opt. 365. rem. 2.) autant d'effet que celui de M. Hadley, avec un foïer de 62″, 5. L'aberration de longueur eft très petite dans ces Télefcopes, auffi bien que le cercle de confufion dans l'image du foïer. Mais l'exceffive petiteffe de l'oculaire augmente le diametre apparent de cette confufion dans l'œil, à un point qui devroit la rendre très fenfible, fi d'autres caufes n'empêchoient ce mauvais effet. 1°. D'abord, j'ai fuppofé pour les objets hors de l'axe que le champ du Télefcope foit auffi grand qu'il peut être, c'eft à dire de 33 minutes; on ne rapporte point la grandeur effective de ce champ, & je ne doute pas qu'elle ne foit moindre. 2°. L'oculaire eft précédé & fuivi d'un diaphragme, dont on n'indique pas les dimenfions. Ces diaphragmes peuvent beaucoup diminuer l'aberration en fupprimant les raïons les plus écartés. 3°. Le défaut de clarté dans les images réflêchies, doit rendre tolérable un cercle de confufion, qui feroit infupportable dans une lunette dioptrique, dont l'image eft plus vive. 4°. Les aberrations irrégulieres que la réfraction produit inévitablement par la figure même des verres, y augmentent la confufion réguliere, & font qu'à diametres égaux, celle-ci doit être plus fenfible dans les lunettes que dans les Télefcopes. Enfin 5°. plus l'oculaire eft petit, moins il eft poffible d'affigner exactement fon foïer, & l'amplification du Télefcope; or la moindre erreur à cet égard influe très confidérablement fur l'eftimation de l'angle de la confufion apparente. Eftimation dans laquelle l'épaiffeur même d'un petit oculaire peut entrer pour beaucoup.

XXV.

Puifque d'après ces confidérations on ne fauroit tirer de l'expérience des Télefcopes des éclairciffemens bien certains fur la plus

 grande

grande aberration tolérable dans la pratique, il faut encore revenir aux lunettes, & calculer quelle a dû être la confusion apparente du point le plus éloigné de l'axe. Comme la formule $a = x \sin d$, que nous avons trouvée (IX.), n'est que pour le cas où l'aberration dans l'axe est nulle, & qu'elle n'est pas d'ailleurs de rigueur géométrique, quoiqu'elle suffise dans la pratique, il faudra déterminer l'aberration de longueur par la méthode que nous avons suivie pour les miroirs (article XXII.). Soit toujours le demi-diametre du champ visible $= d$, la distance focale (Fig. 2.) $MF = F$, l'aberration dans l'axe $F'F = a$, l'arc $AM = C$, la demi-ouverture $AL = x$, & la lentille isoscele; soit de plus l'angle à l'axe $AF'L$ du raïon parallele $pA = \phi$, l'angle LAg sera $= 90^d - \phi - d$, & l'angle ALg étant $90 + d$, on aura l'angle en $g = \phi$; & par la même raison on aura dans le triangle aLh, l'angle en $a = 90^d - \phi + d$, l'angle en $L = 90^\circ - d$, & l'angle en $h = \phi$, ce qui donne le foïer $Lg = \frac{x.\cos(\phi + d)}{\sin \phi}$, & le foïer $Lh = \frac{x.\cos(\phi - d)}{\sin \phi}$; & puisque l'on a $x = F \times \text{tang}\, \phi$, lorsque ϕ sera infiniment petit, on aura le foïer des raïons qui tombent très près de l'axe $Lf = F.\cos d$.

XXVI.

Application à la lunette de M. Huygens.

On a ici, pour le plus grand champ possible, $\text{tang}\, d = \frac{1 \times f}{F} = \frac{11}{1200} = 0.0091668$, ce qui donne $d = 31'$. On a $\text{tang}\, \phi = \frac{x}{LF'}$, & $LF' = LM + MF - F'F = x.\ \text{tang}\, \frac{1}{2}C + F - a$. Or ici j'ai $\sin C = \frac{x}{r} = \frac{1'',5}{396}$, puisque je suppose $m = 1,55$, & par conséquent $r = 1,1F$; j'ai donc $LM = 1,5 \times 0.0018939$, & l'aberration dans l'axe étant (art. XX.) $a = 0''.0104724$, j'ai MF'

$MF' = 359'',9895276$, donc $LF' = 359'',992368$; donc $\tang \phi = \frac{1,5}{359,992368} = 0,0041667$; donc $\phi = 14',3238$,

donc $Lg = \frac{1'',5 \times \cos 45',3238}{\sin 14',3238} = 359'',9740$.

donc $Lh = \frac{1'',5 \times \cos(16',6762)}{\sin(14',3238)} = 360'',0158$,

donc $Lf = 360 \times \cos 31' = 359'',9853$.

Ainſi l'aberration de longueur totale $gh = 0'',0418$, & le foïer f des principaux raïons tombe ſur le quart de cette longueur. On aura le diametre de la confuſion apparente $\sin \alpha = \frac{0.0418 . x}{2.Ff} = \frac{0,0418 \times 1,5}{6,6 \times 360} = 0.000026389$, & par conſéquent l'angle viſuel inſenſible eſt ici $\alpha = 5'',44$. Ou, ſi l'on veut rapporter l'image préciſément au plan perpendiculaire à l'axe, où ſe forme l'image la plus nette d'un point dans l'axe, on aura $\sin \alpha = \frac{0''.0356 \times x}{Ff}$, & par conſéquent $\alpha = 9'',3$.

XXVII.

On connoit une lunette plus parfaite de M. Huygens, dont l'objectif de 34 pieds ſupportoit un oculaire de $2\frac{1}{2}$ pouces (Smith Opt. 365.). L'ouverture, qu'on n'indique pas, devoit être de $4'',48$, dans la proportion de 3 pouces pour une amplification linéaire de 109 fois. Ainſi l'aberration de ſphéricité d'un objet dans l'axe $= \frac{1,67558 . xx}{F}$ (art. III.), étoit ici $a = 0''.020663$, d'où l'on conclut l'angle viſuel de la confuſion $\alpha = 4,686$ ſecondes. Mais l'aberration des couleurs étoit tout au moins $= \frac{408''}{125} = 3'',2$ pouces, & le diame-

tre apparent des couleurs $\frac{2x}{250f} = \frac{4'',48}{625}$ formoit un angle visuel $\alpha = 25$ minutes.

Quant à l'aberration d'un point hors de l'axe, on a ici tang $d = \frac{2,5}{408}$, donc $d = 21',1$; on a $LF' = 407'',9849$, donc tang $\phi = \frac{x}{LF'}$ donne $\phi = 18',9$, d'où l'on conclut $Lg = 407''$, 96333. $Lh = 407'',9909$. & $Lf = 407'',992$. Ainsi l'aberration, du point g, au plan qui passe par l'image la plus distincte des objets dans l'axe, est $= 0'',0344$, & l'angle visuel de la confusion qui en résulte: sin $\alpha = \frac{0'',0344.x}{Ff}$ est de $15\frac{1}{2}$ secondes.

XXVIII.

Comme la confusion qui résulte des couleurs surpasse, au moins trois cens fois, celle qui résulte de la figure dans ces lunettes, il n'est pas possible d'en conclure immédiatement jusqu'où cette derniere confusion auroit pû aller avant de cesser d'être insensible. Dans la lunette de 12 pieds dont j'ai parlé (art. IV.), en lui supposant l'ouverture convenable on a $x = 0'',9486$. Ainsi l'aberration de sphéricité dans l'axe étoit $= 0'',01047$, & l'angle visuel de la confusion qui en provient $\alpha = 3,4$ secondes. Le diametre de la confusion produite par les couleurs, étoit au moins $\frac{0'',9486}{250}$, & le sinus de l'angle visuel $= \frac{x}{250.f} = \frac{1}{250 \times 2,2} = 0.001818$, ce qui donne $\alpha = 375$ secondes. Ainsi tant les aberrations de longueurs, que les angles visuels de la confusion, sont dans le rapport de 110 à 1; & également insensibles. Il semble donc qu'on en pourroit conclure que dans les lunettes de 30 & de 34 pieds, l'aberration de sphéricité auroit

roit encore été insensible, si elle n'avoit pas excédé la $\frac{1}{10}$ partie de l'abberration de réfrangibilité de ces lunettes, réduite à la $\frac{1}{250}$ de l'ouverture. A ce compte l'aberration dans l'axe auroit pû être cinq fois plus grande dans la lunette de 30 pieds, c. à d. faire un angle visuel de $1'',36 \times 5 = 8$ secondes; & environ trois fois plus grande dans la lunette de 34 pieds, ce qui supposeroit un angle insensible de $13\frac{1}{2}$ secondes pour l'aberration de figure d'un objet dans l'axe.

Pour déterminer avec précision, d'après l'expérience des bonnes lunettes, jusqu'où l'aberration de sphéricité est insensible, il faudroit avoir les dimensions d'un bon objectif achromatique de l'exécution de Mrs. Dollond; mais ces Messieurs n'en ont point instruit le public, & il n'est gueres possible de mesurer exactement la courbure des lentilles actuellement construites, quand le raion de courbure est un peu long. M. le Duc de Chaulnes l'a entrepris, & personne ne pouvoit mieux y réussir que lui; cependant les dimensions publiées dans le Journal des Savants supposent des rapports de réfraction & de dispersion si différents de ceux qu'on adopte ordinairement, que je ne saurois prendre ces mesures pour base du calcul de l'aberration insensible.

XXIX.

Puisqu'il doit y avoir un rapport constant entre l'ouverture & l'amplification $\frac{F}{f}$, on a le foïer de l'oculaire f constant pour toutes les distances focales F, savoir $f = 0'',28$; si, comme dans la lunette de M. Dollond, on a $F = 42''$, pour un grossissement de 150 fois, & $x = \frac{F}{24}$. Dans les Télescopes à réflexions, le rapport constant de x à $\frac{F}{f}$, est de $2'',5$ à $208'',333$, ce qui donne $x = \frac{0''.012.\,F}{f}$, & $\left(\text{en posant } x = \frac{F}{24}\right)$ $f = 0''.288$. Dans les lunettes ordinaires, le rapport de x à $\frac{F}{f}$, est de $1'',5$ à $\frac{360}{3,3}$, ou de 3.218, ce qui donne

donne $x = 0'',0137\frac{F}{f}$ & $f = 0'',33$. Comme les lunettes dioptriques transmettent plus de raïons que les miroirs n'en réfléchissent, il semble qu'à amplifications égales, l'ouverture de la lunette pourroit être moindre, ou du moins qu'il ne seroit pas besoin de la faire plus grande que celle du Télescope, & que par conséquent, en la proportionnant constamment à la distance focale, il ne seroit pas nécessaire de prendre $x = \frac{F}{24}$, comme nous l'avons fait. En prenant x plus petit, on diminueroit l'aberration; mais il est probable que la pratique a déjà déterminé à cet égard ce qui est le plus avantageux. Quoi qu'il en soit, la mesure de l'aberration & de la confusion insensible est constante dans ma méthode, & ne dépend point de la longueur du foïer, ou de la distance focale, comme il arrive dans les lunettes ordinaires. Si l'aberration de longueur tolérable est $= a''$; l'aberration latérale est $\frac{ax}{F} = \frac{a''}{24}$, le diametre de la confusion est $= \frac{a''}{48}$, & le sinus de l'angle visuel insensible $\frac{a}{48f} = \frac{a}{48 . 0'',28}$ est sin $\alpha = \frac{a}{13,44}$. On a donc $a'' = 13,44$. sin α, & sin $\alpha = 0.074405.a''$. Or, quand l'aberration dans l'axe est nulle, celle de l'objet le plus éloigné de l'axe, dans le plus grand champ possible, & pour un grossissement de 150 fois, est $\frac{1}{4}a = 0.000278.F$ (art. IX.); posant donc ici $F = 42''$, on a $a = 0''.024158$, donc sin $\alpha = 0,0017975$, ce qui donneroit l'angle visuel de la confusion $\alpha = 6'.10''$. plus grand encore que dans le Télescope de M. Hadley (art. XXIII.). Mais cette détermination n'est vraie qu'en supposant que les courbures nécessaires à rendre nulle l'aberration dans l'axe, ne contribuent point à diminuer celle d'un point hors de l'axe; & dailleurs, nous avons déjà vû (art. XII. XVII.) que la confusion qui résulte de cette derniere aberration se réduit sensiblement à rien, parce que le plus grand nombre des

des raïons du faiſceau cylindrique, ſe réuniſſent tous auprês du foïer en *f*.

XXX.

D'aprês toutes ces conſidérations, il paroît que, du moins autant qu'il n'eſt queſtion que de la pratique, l'eſſentiel eſt de rendre exactement nulle l'aberration des objets dans l'axe: 1°. parce qu'elle eſt la plus importante. 2°. parce qu'en la détruiſant, on a détruit en grande partie l'aberration des objets hors de l'axe. 3°. parce qu'au pis aller on eſt libre de diriger ſucceſſivement l'axe de la lunette vers les divers points de l'objet; & 4°. parce que ſi, pour rendre l'aberration totale la plus petite poſſible, il falloit, comme on l'a calculé dans la théorie, laiſſer ſubſiſter une partie de l'aberration dans l'axe, on riſqueroit de rendre l'image totale moins diſtincte; chaque point de cette image en ſeroit à la vérité un peu moins confus, mais n'y en aiant aucun de parfaitement net, on retomberoit peut-être dans l'inconvénient dont j'ai parlé (art. I.), rien de bien diſtinct n'attireroit préférablement l'attention, n'aideroit à démêler l'enſemble, & n'effaceroit les nuages qui l'enveloppent; au lieu que, lorſque le milieu de l'objet ſe dépeint avec toute la netteté poſſible, on en reconnoit plus clairement les parties voiſines qui lui ſont liées; celles-ci ſe peignent à leur tour très exactement à l'aide des principaux raïons qui concourent ſenſiblement en un ſeul point; il ſe forme ainſi une image forte, diſtincte & complette de l'objet total, dont la vivacité peut aiſément faire diſparoitre l'effet des raïons qui s'écartent trop, s'ils ne ſont déjà ſupprimés par l'ouverture de l'oculaire. L'expérience prouve qu'on peut donner à l'objectif d'une lunette une inclinaiſon à l'axe aſſez conſidérable, en tel ſens qu'on voudra, ſans que la netteté de l'image en ſouffre ſenſiblement, ſurtout quand l'ouverture n'eſt pas exceſſive; la même expérience nous montre tous les jours que les objets vus, ſoit directement, ſoit réflêchis par un miroir, forment une image très diſtincte au fond de l'œil, quoiqu'il n'y ait pas à douter, que par l'ouverture de la prunelle il ne tombe en même tems ſur le même eſpace de la rétine un très grand nombre de raïons

 ou

ou étrangers à l'objet de l'image, ou qui en ſont irrégulierement réfléchis, & qui par conſéquent devroient rendre l'image confuſe.

XXXI.

Il ſemble à la vérité que, dans les objectifs compoſés, il eſt facile de détruire toutes les aberrations dont la deſtruction n'eſt pas abſolument impoſſible, & qu'ainſi rien n'empêche de donner un plus grand degré de perfection aux lunettes, qu'elles n'auront ſi l'on ne détruit que les couleurs, & l'aberration de figure pour les objets dans l'axe. Ceci demande quelque explication. Il eſt vrai que pour détruire, par exemple, avec deux lentilles l'aberration de réfrangibilité, il ſuffit de mettre un certain rapport entre les foïers des deux lentilles. Cela n'eſt cependant exactement vrai que pour de petites ouvertures. Enſuite, comme on peut varier en pluſieurs manieres la proportion des faces de chaque lentille ſans changer ſon foïer, ou la ſomme des ſinus de courbure, on peut en pluſieurs manieres rendre nulle l'aberration de ſphéricité pour les raïons dans l'axe; il ſemble donc qu'il reſte encore aſſez d'indéterminé pour corriger l'aberration des raïons hors de l'axe. En effet, quoiqu'en déterminant la premiere face d'une lentille, l'autre face ſoit auſſi déterminée par le foïer, s'il étoit indifférent pour rendre nulle l'aberration dans l'axe de donner à l'autre lentille telle proportion de faces que l'on voudroit, on pourroit en choiſir une qui remédiât, du moins en partie, à l'aberration des raïons obliques. Mais cela n'eſt pas. Il faut déterminer les quatre faces à la fois ſi l'on veut anéantir l'aberration de ſphéricité dans l'axe; & la raiſon en eſt aiſée à concevoir. Il n'y a qu'une ſeule inclinaiſon du raïon émergent à l'axe qui rende cette aberration nulle, c'eſt lorſqu'on a $\phi' = AFM$; pour peu que ϕ' ſoit plus grand ou plus petit, il y aura quelque diffuſion en deçà ou au delà du foïer. Or ſuppoſons qu'on ait trouvé pour les faces C, C', K, K' des deux lentilles une proportion telle, qu'il en réſulte $\phi' = AFM$. On ne ſauroit, en laiſſant C invariable, augmenter ou diminuer la valeur de K, ſans altérer auſſi celle de ϕ', & par conſéquent auſſi ſans introduire quelque aberration. Il peut arriver à la vérité,

rité, qu'à force de diminuer ou d'augmenter la courbure de K, (si elle n'étoit d'abord, ni dans la proportion du *maximum*, ni dans celle du *minimum*,) on reviendra à une seconde valeur de K, qui donnera encore $\Phi' = AFM$. Ainsi l'on aura tout au plus à choisir entre deux courbures très-différentes, celle qui rendra la face K la plus propre à diminuer l'aberration des raïons obliques. Mais, comme en suivant ma méthode on prend d'abord la proportion qui, avec les faces les moins inégales, rend nulle l'aberration dans l'axe; il est clair que s'il falloit s'éloigner de cette proportion pour corriger l'aberration oblique, on ne sauroit le faire sans introduire de plus fortes courbures, & des raïons plus inégaux; & que par là, outre les inconvéniens de l'exécution, on courroit risque d'augmenter les aberrations indestructibles, & celle de réfrangibilité qui subsistoit encore.

En multipliant les lentilles, on multiplie les foïers particuliers, & comme il suffit, pour dissiper sensiblement les couleurs, de mettre un certain rapport entre le foïer commun négatif, & le foïer commun positif, il est certain qu'en faisant les objectifs de trois, ou de plusieurs lentilles, on augmente de beaucoup le nombre des cas qui peuvent donner $\Phi'' = AFM$. Mais il reste toujours vrai, quel que soit le nombre des lentilles, qu'il n'y a qu'un cas unique qui donne les courbures les plus égales en anéantissant l'aberration de sphéricité dans l'axe; & que ce cas est aussi celui qui diminue le plus les aberrations irrégulieres de sphéricité & de réfrangibilité, que c'est en même tems le plus propre à l'exécution, celui qui donne le moins d'épaisseur aux lentilles, celui qui permet les plus grandes ouvertures, & par conséquent celui qui semble pouvoir donner aux objectifs la plus grande perfection pratique dont ils soient susceptibles.

SECONDE PARTIE. (*)

Calcul de l'aberration des objectifs composés de deux ou plusieurs lentilles.

XXXII.

Quelque méthode que l'on emploie pour mesurer la force réfractive & dispersive des diverses espèces de verre, & quelque exactitude que l'on apporte à ces opérations, il ne faut pas se flatter d'atteindre à une précision absolue. La diversité des résultats des observations répétées avec le même soin, laisse toujours une latitude sur laquelle on est embarassé à choisir le vrai milieu. Les erreurs auxquelles ce choix expose peuvent être insensibles, lorsqu'elles se compensent; mais, si par malheur elles se renforcent mutuellement, on court risque, avec le calcul le plus scrupuleux, de donner aux Artistes des constructions moins parfaites que celles qu'un heureux tâtonnement leur pourroit indiquer. Quoi qu'il en soit, j'adopterai dans ce Mémoire les mesures suivantes, que j'ai conclues d'un grand nombre d'expériences réitérées, sur des prismes & des lentilles, de verre commun & de cristal d'Angleterre.

Rapport des sinus d'incidence & de réfraction dans le verre commun, ou dans le crownglass

pour les raïons rouges $r = 1,5262$.
pour les raïons violets $v = 1,5379$.
pour les raïons moïens $m = 1,532$.

Le même rapport dans le cristal d'Angleterre, le raïon passant du verre dans l'air

pour les raïons rouges $R = 1,5717$.
pour les raïons violets $V = 1,5903$.
pour les raïons moïens $n = 1,581$.

Le rapport de la dispersion du cristal à celle du verre, $dn = 1,59$.

Plus

(*) Lû le 16 Mars 1769.

Plus ces mesures s'éloignent de celles qu'on adopte ordinairement, plus aussi j'ai été soigneux de les vérifier par de nouvelles observations ; il ne seroit pas impossible que diverses masses d'un verre du même nom, n'eussent pas exactement la même force réfringente ; mais il est probable aussi, qu'elles n'en different pas au point de rendre toutes les expériences illusoires.

XXXIII.

Je nommerai, comme dans le Mémoire précédent,

la distance focale de l'objectif	F,
la demi-ouverture	$x = F : 24,$
les demi-arcs des courbures convexes	C, C′ etc.
les demi-arcs des courbures concaves	K, K′

la formule générale de la distance focale d'un objectif à deux lentilles, l'une plan-convexe, l'autre plan-concave étant : $F = \frac{x}{(m - 1) \sin C - (n - 1) \sin K}$ devient, en y appliquant nos mesures,

$$1 = 24 . [0,533 . \sin C - 0,581 . \sin K].$$

Or, pour détruire les couleurs, il faut prendre les sinus des courbures en raison inverse des dispersions, ce qui donne $\sin K = \frac{\sin C}{1,59}$; l'équation du foïer devient $24 \times 0,16659119497 \times \sin C = 1$, d'où l'on tire $\sin C = 0,2501132 57$, & $\sin K = 0,157303935$, ce qui doit être la somme constante des sinus des demi-arcs convexes & concaves, quel que soit le nombre des faces & des lentilles de l'objectif composé.

XXXIV.

Calcul de l'angle d'aberration de sphéricité d'un objectif à deux lentilles, l'une bi-convexe isoscele, de verre commun, l'autre bi-concave isoscele, de cristal d'Angleterre.

Puisqu'on a ici sin C $= \frac{0.250113257}{2} = 0.1250566$, on a C $= 7°.11',04145$; & de même aiant ici sin K $= 0.0786519$, on a l'arc K $= 4°.30,66546$.

Ainsi, en gardant nos dénominations du Mémoire précédent, & en développant la formule de l'angle à l'axe $\phi = m \sin\left(2C - \frac{\sin C}{m}\right) - C$, $\phi' = K - n \sin\left(2K - \frac{\sin(K+\phi)}{n}\right)$, la route du raïon parallele est déterminée dans sa traversée par les angles suivans.

I. *Lentille convexe.*	II. *Lentille concave.*
$\alpha = C = 7°.11',04145$,	$K + \phi = \alpha' = 12°.15',8253$
$\beta = 4°.40',93468$,	$\beta' = 7°.43,2729$
$\gamma = 9°.41',14822$,	$\gamma' = 1°.18,0579$
$\delta = 14°.56,20131$,	$\delta' = 2°.\ 3,4260$
$\delta - C = \phi = 7°.45,15985$,	$K - \delta' = \phi' = 2°.27,2394$
	or l'angle au foïer est $A = 2.\ 23,1571$
	reste l'angle d'aberration $\phi' - A = 4',0823$.

XXXV.

Formule générale de l'angle de la flèche.

Cette grande aberration est un peu diminuée par la flèche de la derniere face K, qui est concave. Or cette flèche est $= \frac{x.\ \text{sin verf. } K}{\sin K}$; mais, pour estimer l'angle λ d'aberration qui en résulte, on peut établir sans erreur sensible, que cet angle λ est à l'angle au

au foïer A, comme la flèche elle-même eſt au foïer F, ce qui donne $\lambda = \frac{A x. \text{ ſin verſ. } K}{F. \text{ ſin } K}$, ou en minutes $\lambda' = \frac{143',1571. \text{ ſin v. } K}{24. \text{ ſin } K}$, en ſorte que la formule générale pour l'angle de la flêche en parties de minutes ſera $\lambda' = \frac{5',96488. \text{ ſin v. } C}{\text{ſin } C}$, ou

$$\log \lambda' = 0,7756016 + \log \text{ſin v. } C - \log \text{ſin } C.$$

Dans notre cas, ſi l'on poſe, pour éviter les fractions, $K = 4°. 30'$, on trouvera par cette formule $\lambda = 0',23436$, puis pour $K = 4°. 31'$, $\lambda = 0',23523.9$; donc pour le vrai arc $K = 4°. 30,665$, on a $\lambda' = 0',23494$, & par conſéquent le vrai angle d'aberration de l'objectif à deux lentilles iſoſceles eſt

$$\phi - A - \lambda = 3';8474.$$

Avant de chercher les conſtructions propres à détruire cette aberration, je continuerai le calcul des aberrations que donnent les objectifs à pluſieurs lentilles iſoſceles.

XXXVI.

Calcul de l'angle d'aberration de ſphéricité d'un objectif à trois lentilles iſoſceles; ſavoir deux égales bi-convexes de verre commun, & une bi-concave de criſtal entre deux.

Puiſqu'il y a ici 4 faces convexes égales, on a ſin $C = 0.0625283$, & $C = 3°.35,09698$, les arcs concaves K; ſont les mêmes que dans l'objectif à deux verres, $K = 4°,30',66546$. Le développement des formules pour ϕ, ϕ', ϕ'', donne donc:

I. *Len-*

I. *Lentille convexe.* II. *Lentille concave.* III. *Lentille convexe.*

$$\phi = m \sin\left(2C - \frac{\text{f.}C}{m}\right) - C,\ \phi' = n \sin\left(2K - \frac{\text{f.}(K+\phi)}{n}\right) - K,\ \phi'' = m \sin\left(2C - \frac{\text{f.}(C+\phi')}{m}\right) - C$$

$C = \alpha = 3^\circ.35', 09698$, $K + \phi = \alpha' = 8^\circ.20', 3218$, $C + \phi' = \alpha'' = 5^\circ, 1', 4007$

$\beta = 2^\circ.20, 35078$, $\beta' = 5^\circ.15, 7872$, $\beta'' = 3^\circ.16, 59229$

$\gamma = 4^\circ.49, 84318$, $\gamma' = 3^\circ.45, 5437$, $\gamma'' = 3^\circ.53, 601677$

$\delta = 7^\circ.24, 75339$, $\delta' = 5^\circ.56, 9692$, $\delta'' = 5^\circ.58, 25004$

$\delta - C = \phi = 3^\circ.49, 65641$, $\delta - K = \phi' = 1^\circ.26, 3037$, $\delta'' - C = \phi'' = 2^\circ.23, 153057$.

Comme l'angle à l'axe ϕ'' est un peu plus petit que l'angle de mesure A, & qu'on auroit $A - \phi'' = 0', 004$, l'aberration de cet objectif à trois lentilles isosceles seroit négative & absolument insensible pour des lunettes d'une longueur commode, n'étoit qu'il faut tenir compte de la flêche du dernier arc C, qui est convexe. Or par la formule (XXXIV) on trouve ici $\lambda = 0'.18667$. Ainsi l'angle d'aberration positive est $\phi'' + \lambda - A = 0', 18258$.

Remarque.

Puis qu'ici l'angle à l'axe ϕ'' est en soi plus petit que l'angle au foïer A, il est évident qu'on ne gagneroit rien à placer le verre concave vers l'œil, l'aberration en seroit doublement négative, & l'arc concave K étant plus grand que le convexe C, la flêche donneroit un angle λ plus grand que celui que nous venons de déterminer. Le contraire a lieu, lorsqu'on suit les rapports $m = 1,55$, $n = 1,6$, $dn = 1,6$, comme je l'ai montré dans le Mémoire précédent.

XXXVII.

Calcul de l'angle d'aberration de sphéricité, dans un objectif de 4 verres isosceles.

Il y a ici deux combinaisons à choisir; l'une de trois lentilles bi-convexes, avec une seule bi-concave, l'autre de deux bi-convexes, alternant avec deux bi-concaves. La premiere combinaison ne donneroit

neroit assûrément point d'aberration positive, quand même la derniere face seroit convexe, parce que les arcs concaves K seroient presque doubles des arcs convexes C; mais, par là-même, il résulteroit d'un tel objectif une aberration négative, beaucoup trop forte; & comme d'ailleurs la lentille concave resteroit la même qu'à deux verres & à trois verres, on ne gagneroit rien du côté de la diminution des arcs; il est donc clair que cette combinaison seroit à tous égards inférieure à celle de trois verres; je me dispenserai par cette raison d'en faire le calcul.

J'ai montré dans mon premier Mémoire, qu'en général les combinaisons paires donnent une plus forte aberration que celles où il y a plus de lentilles convexes que de concaves; & j'en ai déjà indiqué la cause. On peut donc prévoir que la combinaison de deux lentilles bi-convexes avec deux bi-concaves, donnera une plus forte aberration que celle d'un objectif à trois verres; cependant, comme les courbures sont diminuées par cette combinaison, il ne sera pas inutile d'en faire le calcul.

Les arcs convexes sont ici les mêmes que dans l'objectif à trois lentilles. Mais le sinus des arcs concaves est plus petit de moitié; on a donc sin. K = 0.0393259, & par conséquent K = 2°. 15', 228257. Pour diminuer l'aberration qui sera positive, il convient que la derniere lentille soit concave; ainsi, en les alternant, la premiere sera convexe, & la route du raïon à travers cette premiere lentille, est précisément la même que dans l'objectif à 3 verres. En développant donc successivement les formules de ϕ, ϕ', ϕ'', & ϕ''', on aura les angles suivans:

I. *Lentille convexe.*

$$\phi = m \sin\left(2C - \frac{\sin C}{m}\right) - C,$$

$C = \alpha = 3^\circ.35',0969,$

$\beta = 2.\ 20,3507,$

$\gamma = 4.\ 49,8432,$

$\delta = 7.\ 24,7534,$

$\phi = 3.\ 49,6564,$

II. *Lentille concave.*

$$\phi' = K - n \sin\left(2K - \frac{\sin K + \phi}{n}\right)$$

$K + \phi = \alpha' = 6^\circ.\ 4,8846$

$\beta' = 3.\ 50,5336$

$\gamma' = 0.\ 39,9228$

$\delta' = 1^\circ.\ 3,1161$

$K - \delta = \phi' = 1^\circ.12,1121.$

III. *Lentille convexe.*

$$\phi'' = m \sin\left(2C - \frac{\sin C - \phi'}{m}\right) - C,$$

$C - \phi' = \alpha'' = 2^\circ.22',9848,$

$\beta'' = 1.\ 33,3178,$

$\gamma'' = 5.\ 36,8761,$

$\delta'' = 8.\ 37,2177,$

$\phi'' = \delta'' - C = 5.\ 2,1207,$

IV. *Lentille concave.*

$$\phi''' = K - n \sin\left(2K - \frac{\sin K + \phi''}{n}\right)$$

$\alpha''' = K + \phi'' = 7^\circ.17',34897$

$\beta''' = 4.\ 36,1795$

$\gamma''' = -0.\ 5,723$

$\delta''' = -0.\ 9,0481$

$\phi''' = K - \delta''' = 2^\circ.24,276366.$

Si de cet angle à l'axe ϕ''', on soustrait l'angle de la flèche du dernier arc qui est ici négatif, $\lambda = 0',11736$, on aura $\phi''' - \lambda = 2^\circ.24,159$, & par conséquent l'angle d'aberration positive de cet objectif est $\phi''' - \lambda - A = 1',00185$, presque six fois plus grand que celui d'un objectif à trois lentilles.

XXXVIII.

Calcul de l'angle d'aberration de sphéricité que donneroit un objectif de cinq lentilles isosceles, dont trois bi-convexes & deux bi-concaves.

Aiant ici six faces convexes, on aura le sinus $C = \frac{0.2501113257}{6} = 0.0416855$, & par conséquent l'arc $C = 2^\circ.23',3466$; l'arc concave reste comme dans l'objectif à quatre verres. Ce qui donne les angles comme suit:

I. Len-

I. *Lentille convexe.*	II. *Lentille concave.*	III. *Lentille convexe.*
$\alpha = 2^{\circ}.\ 23{,}3466,$	$\alpha' = 4^{\circ}.\ 47{,}9847,$	$\alpha'' = 2^{\circ}.\ 27{,}9520$
$\beta = 1.\ 33{,}5535,$	$\beta' = 3.\ \ 2{,}0237,$	$\beta'' = 1.\ 36{,}5584$
$\gamma = 3.\ 13{,}1397,$	$\gamma' = 1.\ 28{,}4327,$	$\gamma'' = 3.\ 10{,}1348$
$\delta = 4.\ 56{,}1001,$	$\delta' = 2.\ 19{,}8336,$	$\delta'' = 4.\ 51{,}4872$
$\phi = 2.\ 32{,}7535,$	$\phi' = -0.\ \ 4{,}6054.$	$\phi'' = 2.\ 28{,}1406.$

IV, *Lentille concave.*	V. *Lentille convexe.*
$\alpha''' = 4^{\circ}.\ 43{,}3688,$	$\alpha^{IV} = 2^{\circ}.\ 32{,}5584$
$\beta''' = 2.\ 59{,}1120,$	$\beta^{IV} = 1^{\circ}.\ 39{,}5631$
$\gamma''' = 1^{\circ}.\ 31{,}3445,$	$\gamma^{IV} = 3.\ \ 7{,}1301$
$\delta''' = 2^{\circ}.\ 24{,}4412,$	$\delta^{IV} = 4.\ 46{,}8737$
$\phi''' = -0^{\circ}.\ \ 9{,}2118,$	$\phi^{IV} = 2.\ 23{,}52706.$

L'angle de la flêche du dernier arc, qui augmente ici l'angle à l'axe, est $\lambda = 0'{,}12215$. Ainſi l'angle d'aberration poſitive eſt $\phi^{IV} + \lambda - A = 0'{,}492$, environ trois fois plus grand que celui d'un objectif à trois verres.

XXXIX.

Conſidérations ſur les objectifs compoſés de plus de cinq verres.

La méthode que j'ai emploïée juſqu'ici, s'applique, comme on voit, à tel nombre de lentilles que l'Artiſte voudra combiner. Mais je ne voudrois pas lui conſeiller de paſſer le nombre de cinq verres : ce nombre donne les raïons de toutes les lentilles preſque égaux, & d'une longueur commode pour l'exécution. La combinaiſon de ſix verres, ſi l'on joint trois concaves à trois convexes, donneroit une plus forte aberration à détruire, mettroit plus d'inégalité dans les courbures, & exigeroit des raïons trop longs pour les ſurfaces concaves, dont la demi-courbure ſeroit à peine d'un degré & demi. Si au contraire on combine quatre lentilles convexes avec deux concaves, l'aberration

tion positive à détruire sera à la vérité moins forte, mais elle excédera néanmoins celle à cinq verres; les courbures seront plus inégales qu'à cinq verres, & les raïons des surfaces convexes d'une longueur incommode dans des lunettes de cinq à six pieds. Cette derniere combinaison seroit cependant de beaucoup à préférer à l'autre.

Si l'on vouloit combiner quatre lentilles convexes avec trois concaves, on rapprocheroit sensiblement les courbures de l'égalité; on auroit C = 1°. 47′, & K = 1°. 30′. Le raïon de convexité seroit environ les quatre tiers de la distance focale, & celui de concavité surpasseroit cette distance de moitié; l'aberration restante dans les verres isosceles ne seroit pas fort considérable, mais elle excéderoit néanmoins celle d'un objectif à trois verres, & pour la détruire il faudroit encore allonger quelques raïons. D'ailleurs, la multiplicité des lentilles doubleroit le travail de l'Artiste, & intercepteroit une partie de la lumiere. Ces inconvéniens augmenteront à mesure qu'on voudra augmenter le nombre des verres. J'estime donc qu'il seroit superflu de pousser ici le calcul au delà de cinq lentilles. Si quelque Artiste, dans des vues particulieres, vouloit composer un objectif de plus de cinq verres, il trouvera dans la méthode que j'ai suivie jusqu'ici, & dans les expédiens que je proposerai encore, tous les secours nécessaires pour déterminer la construction la plus avantageuse, de quelque combinaison que ce soit; il n'a besoin pour cet effet que de connoitre l'usage des logarithmes & des tables des sinus.

XL.

En comparant l'aberration qui résulte des combinaisons de deux, de trois, de quatre, & de cinq lentilles isosceles, il est évident que les objectifs à trois verres sont ceux de tous qui produisent la plus petite aberration, & que ceux à deux lentilles donnent la plus grande. Cependant, comme chacune de ces quatre combinaisons a quelque avantage particulier, nous allons chercher la construction la plus parfaite pour chacun de ces objectifs, en commençant par celui à deux verres.

Re-

Remarque.

La raiſon pourquoi l'objectif à deux verres iſoſceles, l'un bi-concave, l'autre bi-convexe, donne la plus grande aberration de ſphéricité, c'eſt que de toutes les combinaiſons de cette eſpece, c'eſt celle où l'arc convexe C excede le plus l'arc concave K. La raiſon qui fait qu'au contraire l'objectif à trois verres iſoſceles donne la plus petite aberration de ſphéricité, c'eſt que de tous les objectifs combinés, NB. de lentilles alternantes, c'eſt celui où l'arc concave K excede le plus en grandeur l'arc convexe C, puiſqu'ici le nombre des lentilles des deux eſpeces eſt dans le rapport de 1 à 2. Je ne veux pas dire néanmoins qu'il n'y ait aucune combinaiſon de lentilles iſoſceles alternantes dont l'aberration poſitive ne ſoit réellement plus grande que celle de trois verres. J'ai montré que l'aberration de ſphéricité dépend de trois cauſes indépendantes l'une de l'autre. 1°. la différence entre le rapport des arcs & celui des ſinus; 2°. la grandeur abſolue des arcs, & 3°. la flêche de la courbure tournée vers l'œil. Or, de ces trois cauſes, il n'y a que les deux premieres qui rendent l'aberration d'un objectif à trois lentilles la plus petite de toutes. Plus on multipliera les lentilles, plus on diminuera l'angle de la flêche λ, & par conſéquent, il y aura une combinaiſon de pluſieurs verres iſoſceles où la diminution de l'angle λ compenſera l'augmentation de l'angle φ. Ainſi l'aberration des objectifs de 7, de 9, ou de 11 verres iſoſceles, ne différera que bien peu de celle d'un objectif à trois verres; & pourra même être moindre: c'eſt ce qu'il ne ſeroit pas difficile de déterminer exactement, mais je doute qu'aucun Artiſte veuille emploïer juſqu'à 7, 9, 11 lentilles, pour n'obtenir que le même effet qu'il peut attendre de trois.

XLI.

***Recherche de la conſtruction la plus parfaite dans la pratique pour un objectif à deux lentilles; en ſuivant les rapports* m $=$ 1,532, n $=$ 1,581, dn $=$ 1,59.**

Comme les lentilles iſoſceles produiſent ici une très grande aberration poſitive de 4 minutes (XXXIV.), il eſt évident par ce que

 j'ai

j'ai montré dans le Mémoire précédent, qu'on ne ſauroit détruire à beaucoup près cette aberration, en ne changeant que la proportion des faces convexes; & puiſque d'ailleurs ces faces ont déjà ici les plus grandes courbures, & que pour le ſuccès & la facilité de l'opération, il eſt toujours avantageux de diminuer le nombre des baſſins différents, il ſera expédient de laiſſer la lentille convexe iſoſcele, telle qu'elle eſt déterminée (article XXXIV.), & d'altérer uniquement la proportion des faces de la lentille concave, en s'approchant du *minimum* de φ' autant qu'il le faudra pour anéantir l'angle d'aberration. Ce *minimum*, dans une lentille concave, eſt lorſque la ſeconde face eſt plane, ou qu'on poſe $K' = 0$ (I. Mém. art. XXVII. cor. 2.), mais cette ſuppoſition donne déjà φ' trop petit, puiſqu'il n'eſt qu'environ $2^\circ.21'$. Ainſi l'on voit d'abord que la lentille convexe peut reſter iſoſcele, & à l'aide de l'analogie que j'ai expliquée dans le Mémoire précédent, on détermine après quelques tâtonnemens d'approximation, l'arc $K = 7^\circ.47'$, & par conſéquent l'arc $K' = 1^\circ.15,2129$, ce qui donne la route du raïon à travers la lentille concave comme il ſuit:

$$\alpha' = K + \varphi = 15^\circ.32',159$$
$$\beta' = 9.\ 45,225$$
$$\gamma' = -0.\ 43,012$$
$$\delta' = -1^\circ.\ 8,005$$
$$\varphi' = K' - \delta' = 2^\circ.23,218.$$

Or la flêche du petit arc K', donne $\lambda = 0',065$. Ainſi l'aberration reſtante $A + \lambda - \varphi' = 0',004$, ſera inſenſible & négative; & les raïons de faces qui réſultent des arcs de courbures pour une ouverture égale à une douzieme du foïer ſeront:

pour la lentille convexe, $r = r' = 0.3331825.F$

pour la lentille concave - $\begin{cases} r'' = -0.307658.F \\ r''' = +1,904636.F. \end{cases}$

Re-

Remarque.

Si l'on vouloit racourcir le raïon de la derniere face, il faudroit rendre inégales les faces de la premiere lentille, ce qui exigeroit un quatrieme baſſin. D'ailleurs il eſt aiſé de prévoir que, pour peu qu'on change la proportion des faces convexes, qui dans l'état d'égalité font déjà un arc C, de $7^{d}. 11'$, l'un des raïons de la premiere lentille deviendroit plus petit qu'aucun de ceux de la conſtruction précédente. Je ne m'arrêterai donc pas à cette recherche, qu'il ſera facile à tout Artiſte de faire lui-même, s'il la juge de quelque utilité dans la pratique.

XLII.

Recherche de la conſtruction la plus parfaite dans la pratique pour un objectif à trois lentilles, ſur les mêmes rapports.

On a ici à détruire une aberration poſitive, ou négative, ſelon qu'on placera la lentille concave; or la perfection pratique eſt rélative à la moindre inégalité des raïons, à la diminution des courbures, & au nombre des baſſins néceſſaires: il y a donc diverſes conſtructions qui à l'un ou à l'autre de ces égards ſeront les plus parfaites.

1°. D'abord, ſi l'on veut détruire l'aberration à l'aide des plus petites courbures poſſibles, il eſt clair qu'il faut rendre l'aberration négative, en plaçant le verre concave vers l'œil, parce que ce verre aiant les plus grands arcs doit reſter iſoſcele s'il ſe peut; l'altération doit tomber ſur les lentilles convexes, dont les courbures peuvent devenir très inégales, avant que la plus courbe excede l'arc K $= 4°. 30'$. Mais l'inégalité des courbures convexes ne diminue que bien peu une aberration poſitive, parce que le *minimum* de l'angle ϕ répond preſqu'à l'égalité des faces; il eſt beaucoup plus facile d'augmenter cet angle en s'éloignant du cas iſoſcele, que de le diminuer: il eſt donc toujours plus aiſé, à l'aide des faces convexes, de détruire une aberration négative, quoique plus conſidérable, qu'une aberration poſitive qui ſeroit beaucoup plus petite; & comme, dans notre cas, l'aberration négative à détruire n'eſt qu'environ $0', 278$; il n'eſt pas même néceſ-

ſaire

faire d'altérer les deux lentilles convexes; la premiere peut rester isoscele, aussi bien que la lentille concave, en sorte qu'on n'aura que quatre raïons, ou quatre bassins différents: je trouve par la méthode indiquée dans le premier Mémoire, que toute l'altération qu'il faut faire à la seconde lentille convexe, pour détruire l'aberration négative, se réduit à partager la somme constante des sinus $C'' + C'''$, qui est 0.1250566 (XXXIV.), en sorte que l'on ait sin $C'' = 0.0570559$, & sin $C''' = 0.0680007$, tandis que sin $C =$ sin C' reste $= 0.0625383$, & sin $K =$ sin $K' = 0.0786519$ (XXXIV. XXXV.); ce qui donne la construction suivante:

I. Construction d'un objectif à trois lentilles, sans aberration, avec les plus petites courbures possibles.

Premiere lentille bi-convexe	$r = r' = \pm$	0.666365.F
seconde lentille bi-convexe	$r'' = +$	0.730229.F
	$r''' = -$	0.612748.F
troisieme lentille bi-concave	$r^{IV} = r^{V} = \mp$	0.529760.F.

2°. Mais, comme il semble plus convenable de placer la lentille concave entre les deux convexes, ce qui rend l'aberration positive, cette combinaison exige une autre construction. L'aberration qu'on a ici à détruire, ne fait à la vérité qu'un angle de 0',18 (XXXVI.); mais, comme elle est positive, il ne faut pas espérer de la détruire entierement à l'aide des seules lentilles convexes, par la raison que j'ai déjà indiquée. Le *minimum* de la premiere lentille qui suppose sin $C = m$ sin C', produit la plus grande diminution sur l'angle à l'axe, & cette diminution n'est ici que de 0',114. Le *minimum* de la seconde lentille convexe, qui suppose à peu près $C''' + \Phi' = m.C^{IV}$, ne mettroit qu'une différence d'environ 22 minutes entre les arcs C''' & C^{IV}, & par conséquent ne les éloigneroit que de 11' de l'état isoscele, ce qui ne sauroit opérer l'anéantissement de l'aberration restante. Il faut donc nécessairement altérer aussi la lentille concave; & cela étant, il y a deux constructions qui paroissent être les plus avantageuses de toutes, mais

mais dont chacune mérite la préférence sur l'autre par un avantage particulier; l'une c'est de donner à la premiere lentille la proportion qu'exige le *minimum* de l'angle Φ; de construire la seconde lentille convexe égale à la premiere, pour épargner deux bassins, & de proportionner les faces de la lentille concave intermédiaire de maniere à rendre nulle l'aberration restante. Or la formule du *minimum* donne $\sin C = 0.0756661$, & par conséquent $\sin C' = 0{,}0493905$, & pour détruire l'aberration restante, on trouve $\sin K = 0.0822284$, donc $\sin K' = 0.0750754$. Ce qui donne la construction que voici:

II. Construction d'un objectif sans aberration, à trois lentilles, avec les plus petites courbures possibles, & quatre raïons différens, en plaçant la lentille concave entre les deux convexes.

$$r = r^{IV} = + 0.550664.F$$
$$r' = r^{V} = - 0.843618.F$$
$$r'' = - 0.506718.F$$
$$r''' = + 0.554997.F.$$

3°. L'autre construction suppose que, pour diminuer le nombre des bassins, on préfere de corriger l'aberration à l'aide des faces concaves seules, & qu'on laisse les deux lentilles convexes isosceles. Il est vrai que par là l'une des courbures concaves sera plus grande que dans la construction précédente, & que c'est déja nécessairement celle qui fournissoit le plus petit raïon; mais, comme l'aberration à détruire n'est pas considérable, & qu'on épargneroit un bassin, je ne sai si cette construction ne seroit pas à préférer à la précédente; elle exige qu'on prenne $\sin K = 0.0901498$, & par conséquent $\sin K' = 0.0671540$. Ce qui donne les dimensions suivantes.

III. *Construction d'un objectif sans aberration à trois lentilles, avec le moindre nombre de bassins possible, en plaçant la lentille concave au milieu.*

$$r = r' = r^{IV} = r^{V} = 0.666365.F$$
$$r'' = - 0.462194.F$$
$$r''' = + 0.620464.F.$$

Remarque.

Quoique les trois constructions que je viens de proposer semblent renfermer tous les avantages qu'on peut desirer dans la pratique, j'en ai cependant trouvé une quatrieme, qui, si je ne m'abuse, doit l'emporter de beaucoup, & pour la facilité, & pour le succès de l'exécution sur toutes les autres; puisqu'elle n'exige que deux bassins, & qu'elle laisse toutes les lentilles isosceles. J'en ai déjà indiqué ci-dessus le principe: c'est de tolérer, s'il le faut, une légere aberration de réfrangibilité, pour détruire celle de sphéricité sans s'écarter de l'égalité des faces. La méthode en est très aisée, & je vai l'expliquer dans l'article suivant.

XLIII.

La formule de la distance focale dans les mesures que nous avons adoptées, donne $0.532.\sin C - \frac{0.581.\sin C}{dn} = \frac{1}{24}$, ou $\sin C = \frac{dn}{12,768.\,dn - 13,944}$; d'où il est aisé de voir que, plus dn croitra, plus aussi l'arc C, & par conséquent l'arc K, $\left(= \text{ang}\ \frac{\sin C}{dn}\right)$ décroitront, & réciproquement. Ainsi, lorsqu'on prendra $dn = 1,59 + p$, on aura pour C, $C - dC$, & pour K, $K - dK$; au contraire, en posant $dn = 1,59 - p$, l'arc C deviendra $C + dC$, & l'arc K sera $K + dK$. Or, dans un objectif à trois lentilles, la formule de l'angle à l'axe est (en mettant les arcs pour les sinus) $\Phi'' = 4(m-1)\,C - 2\,(n-1)\,K$; en variant donc dn, on aura l'accroissement ou la diminution de cet angle à l'axe, $d\Phi'' = 4\,(m - 1)\,dC$

1) $dC - s(n-1)\,dK$. Et en général, si le nombre des surfaces convexes est $= S$, celui des concaves $= s$, on aura $\Phi = S(m-1)C - s(n-1)K$, & $d\Phi = S(m-1)\,dC - s(n-1)\,dK$.

Lors donc qu'en posant le rapport vrai des dispersions, $dn = 1,59$, une combinaison quelconque de lentilles isoscèles aura donné une aberration de sphéricité positive, il n'y aura, pour détruire cette aberration, sans altérer l'égalité des faces, qu'à chercher une valeur de dn, telle que $d\Phi$ en devienne négatif; si au contraire l'aberration se trouve négative, il faudra augmenter d'autant l'angle à l'axe, & par conséquent chercher une valeur de dn, qui rende $d\Phi$ positif, & tel dans les deux cas qu'il doit être pour que l'aberration soit nulle. Je suppose les aberrations telles, qu'il ne soit pas besoin pour les détruire d'assigner à dn des valeurs si éloignées du vrai rapport 1,59, qu'il en pût résulter une aberration de réfrangibilité excessive. Les recherches que j'ai faites à l'entrée de ce Mémoire indiqueront les bornes dans lesquelles il faudra se renfermer.

Quand on augmente la valeur de dn, nous venons de voir que dC & dK sont négatifs. Ainsi l'augmentation de dn, donne $d\Phi = -S(m-1)\,dC + s(n-1)\,dK$; d'où il est clair que, pour détruire une aberration positive en augmentant le rapport des dispersions dn, il faut que $S(m-1)\,dC$ soit plus grand que $s(n-1)\,dK$. Ce sera précisément le contraire si l'on prend dn plus petit que 1,59. Réciproquement encore, si l'on a à détruire une aberration négative, l'accroissement de dn exige qu'on ait $S(m-1)\,dC < s(n-1)\,dK$, & la diminution de dn demande le contraire.

Mais, quand j'augmente dn de la valeur p, les arcs K & C, qui avant la variation étoient entr'eux comme 1 à dn, sont maintenant :: 1. $dn + p$; & par conséquent dans un rapport plus éloigné. Donc C a rélativement plus diminué que K; ainsi, toutes choses d'ailleurs égales, on doit avoir $S(m-1)\,dC > s(n-1)\,dK$; on peut donc détruire l'aberration positive en augmentant la valeur de dn. Si cependant l'arc C est plus subdivisé que l'arc K, c'est à dire, s'il y a

 plus

plus de lentilles convexes que de concaves, il peut aisément arriver que la diminution absolue $-$ SdC, ne surpasse pas autant la diminution absolue $-$ sdK, que $n-1$ surpasse $m-1$; & alors, loin d'avoir diminué l'aberration positive en posant dn plus grand que 1,59, on l'auroit augmentée. C'est alors le cas d'assigner à dn une valeur au dessous de 1,59; car on doit s'attendre que, dans une même combinaison d'objectif, la diminution de dn, produira un effet opposé à celui qu'auroit fait l'augmentation de dn.

Mais, si l'on diminue dn de la quantité p, les arcs K, & C, qui auparavant étoient en raison de 1 à dn, sont à présent comme 1 à $dn - p$, dans un rapport plus rapproché. Par conséquent, C a moins augmenté rélativement que K; & comme d'ailleurs on a constamment $m-1 < n-1$; il peut arriver qu'on ait $S(m-1)\,dC < s(n-1)\,dK$: donc aiant ici $d\Phi = +S(m-1)\,dC - s(n-1)\,dK$, on aura dans ce cas-là $d\Phi$ négatif; tel qu'il doit être pour détruire une aberration positive.

Comme la somme des arcs convexes est toujours supérieure à celle des arcs concaves, il est certain que dans toutes les combinaisons possibles on doit avoir $SdC > sdK$. Mais la valeur absolue des élémens dC, dK, differe selon la grandeur des arcs respectifs C & K. Ainsi à deux lentilles l'arc K étant plus petit que l'arc C, la valeur absolue de sdK, en sera doublement moindre, & celle de SdC doublement plus grande. C'est précisément le contraire dans l'objectif à trois lentilles; ici par la même raison la valeur absolue sdK est augmentée, & celle de SdC diminuée; donc l'excès de SdC sur sdK est beaucoup moindre dans l'objectif à trois lentilles que dans celui à deux verres; & comme cet excès ne suffit plus pour compenser l'excès de $n-1$, sur $m-1$, on y a $4(m-1)\,dC < 2(n-1)\,dK$, & par conséquent pour rendre ici $d\Phi''$ négatif, il faut diminuer le rapport des dispersions, & poser $dn < 1,59$.

Dans l'objectif à deux verres au contraire, l'excès de SdC sur sdK, étant plus considérable, surpasse celui de $n-1$ sur $m-1$; donc,

donc, pour détruire dans un objectif à deux lentilles une aberration positive, il faut que dC soit négatif, ce qui suppose $dn > 1,59$.

Il résulte de là qu'il suffira d'une beaucoup moindre variation de dn pour détruire une même aberration positive lorsqu'il faudra y emploïer la diminution de dn, que lorsqu'il faudra y emploïer son accroissement, parce que dans la diminution, la différence de $m - 1$ à $n - 1$ concourt à diminuer l'angle à l'axe; au lieu que cette même différence $m - n$, diminue d'autant l'effet que produit la variation de dn augmenté.

J'espere que ceci peut suffire pour expliquer cette nouvelle méthode; une théorie plus recherchée ne feroit qu'obscurcir ce qu'il est très aisé d'appercevoir dans chaque cas particulier; j'en ferai tout de suite l'application à notre objectif à trois lentilles.

XLIV.

IV. Construction d'un objectif sans aberration à trois lentilles isosceles, dont les deux bi-convexes sont de verre commun, & la bi-concave au milieu de cristal d'Angleterre, en supposant $m = 1,532$ *&* $n = 1,581$.

Lorsque l'on prend le rapport des dispersions $dn = 1,59$; les lentilles isosceles donnent une aberration positive dont l'angle est $= 0', 182$ (XXXVI.): pour rendre cette aberration nulle, sans s'écarter de l'égalité des faces, nous venons de voir qu'il faut prendre dn plus petit que $1,59$, mais ce n'est que par le tâtonnement qu'on peut déterminer précisément de combien dn doit être diminué; c'est du moins, ce me semble, la voie la plus courte & la plus sûre pour y réussir.

Je suppose d'abord $dn = 1,52$, & la formule $24 \left(0,532 - \frac{0.581}{1,52}\right) \sin C = 1$, me donne le sinus constant $C = 0.2782170$; donc, le sinus constant $K = 0.1830375$, par conséquent dans l'objectif à trois lentilles on auroit $\sin C = 0.0695542$, & $\sin K =$

 o.

0.0915187, donc C $=$ 3°.59′,30357, & K $=$ 5°.15,01487. Or le ſimple calcul par les arcs donneroit ici $\Phi'' = 4\,(m-1)\,C - 2\,(n-1)\,K$ $=$ 142′,765; il eût donné, lorſque nous avons pris dn $=$ 1,59 (XXXVI.), Φ'' $=$ 143′,212, & alors le calcul exact donnoit Φ'' $=$ 143,153; il donneroit donc ici, à quelque choſe près, Φ'' $=$ 142′,706, & par conſéquent, même en ajoutant l'angle de la flêche λ $=$ 0′,2, l'aberration ſeroit déjà négative $=$ − 0′,25; d'où l'on voit qu'il n'étoit pas beſoin de prendre dn ſi petit pour détruire l'aberration.

En poſant dn $=$ 1,55, je trouve par la même méthode ſinus C $=$ 0.0662801, ſinus K $=$ 0.0855227, ce qui donne l'arc C $=$ 3°.48′,0211, & l'arc K $=$ 4°.54,365; donc Φ'' $=$ $4\,(m-1)\,C - 2\,(n-1)\,K$ $=$ 143′,1761, & par l'analogie plus exactement Φ'' $=$ 143′,117: ce qui, à cauſe de l'angle de la flêche λ $=$ 0′,198, laiſſeroit encore ſubſiſter une aberration poſitive $=$ + 0′,158. Entre ces deux limites le calcul exact détermine la valeur que doit avoir dn pour détruire entierement l'aberration de ſphéricité, ſavoir dn $=$ 1,5454, à quoi répond le ſinus C $=$ 0.06675775; & le ſinus K $=$ 0.0863974, d'où réſulte pour une ouverture $= \frac{F}{12}$,

le raïon de convexité $r = r' = r^{IV} = r^{V} =$ 0.6241474F

& le raïon de concavité $r'' = r''' =$ 0.4822673F.

Remarque I.

On riſquera d'autant moins, en ſuivant cette conſtruction, de laiſſer ſubſiſter une trop forte aberration de réfrangibilité, que la valeur qu'il a fallu donner à dn, eſt encore beaucoup plus grande que celle que l'on aſſigne ordinairement à ce rapport, puiſqu'on ſuppoſe communément que la diſperſion du criſtal n'eſt à celle du verre commun que comme 1,5 à 1, & que les lunettes conſtruites ſur les calculs de M. Clairaut qui adoptoit ce rapport de dn $=$ 1,5, ont été par-

parfaitement achromatiques, autant qu'on en peut juger par l'approbation qu'elles ont eue. De plus, bien que les courbures soient un peu plus grandes que dans les deux premieres constructions, elles sont pourtant moindres que dans la troisieme, & telles qu'il n'en peut résulter aucun inconvénient dans la pratique.

Remarque II.

Comme il importe peu pour l'exécution que le foïer soit pris en nombres ronds, & qu'au contraire il seroit à souhaiter qu'on pût assigner en nombres entiers la longueur des raïons, ce qui est toujours possible pour l'un des deux, on peut poser dans la construction que je viens de proposer $r = r^{I} = r^{IV} = r^{V} = 1.$

& l'on aura: $r^{II} = r^{III} = 0.772682.r$

& $F = 1{,}6021806.r.$

Si par exemple on prend le raïon de convexité $= 26$ pouces, celui de concavité sera $= 20'',0897$, ou 20 pouces 1 ligne, & le foïer $= 41'',6569.$

Remarque III.

Si la force réfringente des verres étoit comme on la suppose communément, c'est à dire, $m = 1{,}55$, $n = 1{,}6$, & qu'on voulût détruire l'aberration d'un objectif à trois lentilles isosceles sans altérer l'égalité des faces, on trouvera par la même méthode que je viens de suivre, qu'il faudroit assigner au rapport des dispersions la valeur $dn = 1{,}54$, lorsque le verre concave sera entre les deux lentilles convexes. Or cette valeur de dn donne le sinus C $= 0.0649460$, & le sinus K $= 0.0843465$, ou l'arc C $= 3^{\circ}.43',4257$, & l'arc K $= 4^{\circ}.50,3036$; & puisqu'on a $r = \frac{x}{\text{fin}\,C}$; $r^{II} = \frac{x}{\text{fin}\,K}$, on aura la construction de cet objectif sans aberration en prenant

$$r = r^{I} = r^{IV} = r^{V} = 0.6415586.F$$

$$\&\quad r^{II} = r^{III} = 0.4940011.F,$$

ou

ou en posant $r = 1$,
on aura le raïon de concavité $r'' = 0.77.r$
& le foïer $F = -1,5587043.r$.

Remarque IV.

Si l'on pose ici $r = 26$ pouces, pour le raïon des deux lentilles convexes, on aura donc le foïer $F = 40'',5263$, & le raïon de la lentille concave $r'' = 20'',02$; ce raïon ne différera par conséquent de celui que nous avons eu (Rem. II.) pour les rapports $m = 1,532$, $n = 1,581$, que de $0''.0697$. Or cette différence est si petite qu'à peine l'Artiste pourra-t-il la saisir dans l'exécution; si l'on prend donc un milieu entre les rapports que j'adopte dans ce Mémoire, & ceux que j'ai suivis dans le Mémoire précédent, comme entre les deux valeurs extrêmes qu'on puisse assigner tant à m qu'à n, on auroit pour $r = 26$ pouces, $r'' = 20'',055$. D'où il résulte évidemment, qu'au moins sur des lunettes d'environ trois pieds & demi, la différence entre les rapports $m = 1,532$, $n = 1,581$, & ceux qui donnent $m = 1,55$; $n = 1,6$, ne sauroit produire un effet sensible dans l'aberration; ou, pour mieux dire, que cet effet seroit inévitable dans l'exécution, puisqu'un Artiste, avec la plus grande exactitude, aura peine à répondre de ne s'être pas trompé en plus ou en moins de 0,035 sur 20, ou de $\frac{1}{571}$ sur la longueur d'un raïon.

Remarque V.

Si l'on pouvoit compter sur une précision exacte dans l'exécution, l'objectif que je viens de proposer pourroit déterminer sans peine les vrais rapports m & n. Le foïer de chacune des lentilles convexes étant ici $f = \frac{r}{2(m-1)} = \frac{13''}{m-1}$, seroit de 23,636 pouces, si m est 1,55, & ce même foïer seroit $f = 24,436$ pouces, si m est 1,532. Or une différence d'environ 10 lignes, sur une distance focale qui n'est que de deux pieds, doit être bien sensible; ainsi, en mesurant avec soin la distance focale d'une lentille convexe de cet objectif

jectif on devroit avoir la valeur de m assez exactement. En faisant construire dans le même bassin une lentille convexe de cristal, son foïer détermineroit de même la valeur de n. Mais on peut aussi conclure cette derniere valeur du foïer général de l'objectif, dès qu'on aura déterminé le rapport m: on doit trouver la distance focale $F = 41,657$ pouces, si les rapports sont $m = 1,532$, $n = 1,581$ (Rem. II.); on la trouvera $F = 40,526$ pouces, si ces rapports sont $m = 1,55$, $n = 1,6$ (Rem. IV.). Cette différence qui est de 13 lignes & demie, ne sauroit échapper à l'observateur qui mesurera un foïer de $3\frac{1}{2}$ pieds. C'est à l'Artiste à savoir jusqu'à quel degré de précision il peut donner au bassin la courbure prescrite; &, ce qui est tout aussi essentiel, jusqu'à quel point la courbure de la lentille répondra exactement à celle du bassin même; les moindres erreurs sur ces mesures rendroient ces déterminations fautives.

Remarque VI.

D'après ces considérations il ne sera pas inutile d'examiner si l'on peut se promettre dans la pratique quelque avantage réel de nos calculs, & de ceux des Géometres, pour détruire l'aberration des objectifs à trois lentilles. J'ai fait voir dans ce Mémoire, & dans le précédent, qu'en laissant ces lentilles isosceles, quelque rapport qu'on adopte pour les forces réfringentes, l'aberration de cet objectif est très petite, & qu'elle résulte presque uniquement de la demi-épaisseur de la derniere lentille convexe. On ne sauroit la détruire qu'en multipliant les bassins, ou du moins en augmentant les courbures des faces; ce qui n'est pas sans inconvénient. Voïons donc à quoi se réduit la différence sur des lunettes d'une longueur commode, je veux dire d'environ $3\frac{1}{2}$ pieds.

En posant $m = 1,532$, $n = 1,581$, $dn = 1,59$, nous avons trouvé (XXXVI.) $\sin C = 0.0625283$, & $\sin K = 0.0786519$. Ainsi la construction de cet objectif à trois verres isosceles exigeroit:

pour le raïon de convexité $r = r' = r^{IV} = r^{V} = 0.666365\,F$

pour le raïon de concavité $r'' = r''' = 0.52976\,F$,

 donc

donc en posant $r = 1$, on aura $r'' = 0.795 . r$, & $F = 1,5068 r$: soit donc $r = 26$ pouces; le foïer sera de 39 pouces, & le raïon de la lentille concave sera $r'' = 20'',67$. Or, pour détruire l'aberration sans altérer l'égalité des faces, j'ai trouvé ce raïon $r'' = 20'',0897$ (Rem. II.); toute la différence sur la longueur de ce raïon se réduit donc à 0,58 pouces, c'est à dire à 1 sur $34\frac{1}{2}$. A moins donc que l'Artiste ne puisse répondre de ne pas se tromper, soit dans la construction du bassin, soit dans l'exécution de la lentille, de la valeur de $\frac{1}{35}$ du raïon de concavité, il seroit assez inutile de chercher d'autres proportions que celle que donne naturellement la combinaison de trois verres isosceles.

Ce n'est pas tout; il faudroit même que l'Artiste pût s'assurer de ne pas se tromper de la moitié moins, sur la longueur d'un raïon, avant qu'on pût se promettre quelque avantage des calculs que la théorie donne. Car, s'il peut se tromper de $\frac{1}{70}$ sur le raïon de concavité, il peut se tromper d'autant sur le raïon de convexité; or il est évident que, si les deux erreurs sont en sens contraire, l'aberration qu'on vouloit détruire subsistera en son entier, & qu'on aura le désavantage d'avoir inutilement augmenté les arcs des courbures. Ce sera bien pis encore, si pour détruire l'aberration on fait selon, la théorie des Géometres, les faces d'une même lentille inégales; il en résultera d'abord des arcs plus courbes; ensuite, au lieu de deux bassins, il en faudra tout au moins trois, peut-être même six; l'erreur d'un $\frac{1}{70}$ peut devenir sextuple, si le malheur veut que ces erreurs s'accumulent au lieu de s'entredétruire, c'est à dire, si celles qu'on commettra sur les bassins des faces convexes, sont toutes dans un même sens, soit en plus ou en moins, & qu'on se trompe sur les bassins des faces concaves dans le sens opposé, soit en moins ou en plus.

En laissant subsister l'aberration qui résulte de l'objectif à trois lentilles isosceles, & en supposant que les bassins ne sont jamais exactement justes, ou que du moins les lentilles elles-mêmes ne le sont pas, il y a quatre cas également possibles: ou les erreurs sur les deux bas-

sins

sins seront dans le même sens, il n'importe gueres que ce soit en plus ou en moins. Dans ces deux cas, la petite aberration reste sensiblement la même qu'on trouve en supposant les verres exacts. Ou 3°. l'erreur sur le bassin des lentilles convexes allongera le raïon, & l'erreur dans le bassin des verres concaves le racourcira. Ici l'aberration seroit diminuée, & probablement détruite. Ou enfin 4°. l'erreur racourcira le raïon de convexité, & allongera l'autre. Dans ce dernier cas l'aberration sera augmentée, & probablement doublée.

Or ces mêmes cas sont également possibles dans l'objectif à trois verres isosceles, calculés selon ma méthode, pour rendre l'aberration nulle. Les deux cas, l'un de l'erreur en plus, & l'autre de l'erreur en moins sur chaque raïon, favorisent la destruction totale de l'aberration; le troisieme cas produira une aberration négative, & le quatrieme une aberration positive, l'une & l'autre à très peu près égales à l'aberration qu'on vouloit détruire. Ainsi ce dernier objectif a sur l'autre deux avantages probables; l'un, que l'aberration à erreurs égales sera la moitié plus petite; l'autre, qu'il y a deux à parier contr'un que cet objectif sera plutôt sans aberration que le premier. Mais en revanche le premier objectif a un avantage certain, c'est qu'il exige les plus petites courbures. Ce seroit donc au succès seul à décider la question de la préférence, si je ne venois pas de montrer que le hazard entre toujours pour beaucoup dans ce succès, & que l'erreur la moins inévitable dans l'exécution peut non seulement rendre les calculs les plus savans inutiles, mais encore nuisibles à la perfection pratique des lunettes.

Remarque VII.

Les réflexions de la remarque précédente ne concernent au reste directement que les objectifs à trois lentilles, ou en général ceux dont la combinaison de verres isosceles ne produit qu'une petite aberration. Il est aisé de voir, par exemple, qu'un objectif à deux verres isosceles seroit très défectueux, puisqu'il y auroit une aberration de presque 4 minutes (XXXIV. XXXV.), qu'on ne sauroit détruire qu'en

altérant la proportion des faces, comme je l'ai montré (XLI.), ce qui exige néceſſairement trois baſſins; car la méthode que j'ai donnée (art. XLIII.) pour conſerver l'égalité des faces, & diminuer le nombre des baſſins, n'eſt pas même applicable ici. La raiſon en eſt 1°. que l'aberration à détruire eſt trop grande. 2°. que, comme l'arc de convexité C eſt plus grand que l'arc de concavité K, il faudroit augmenter la valeur du rapport des diſperſions *dn* pour diminuer une aberration poſitive, & que l'augmentation de *dn* rend cette diminution de plus en plus inſenſible. On ne pourroit donc emploïer cette méthode que pour des lunettes dont la longueur & l'amplification ſeroient peu conſidérables; en ce cas là, la conſtruction que j'eſtime la plus avantageuſe ſeroit de laiſſer ſubſiſter la moitié de l'aberration de réfrangibilité, & de ſuppoſer $dn = 3$; l'aberration de ſphéricité ne ſeroit plus qu'environ d'un angle $\phi' - A = 0'.7$, on auroit

le ſinus de convexité $C = 0.0615764$,
& le ſinus de concavité $K = 0.0205254$,

ce qui donne:

le raïon de convexité $r = r' = 0.67666.F$
le raïon de concavité $r'' = r''' = 2.02533.F.$

Il ſeroit bien poſſible, que la grandeur de ces raïons, la forte diminution des arcs de courbure, & la facilité de l'exécution, rendiſſent cet objectif à deux lentilles plus parfait dans l'uſage, qu'il ne paroit l'être dans la théorie.

XLIV.

Recherches ſur la conſtruction d'un objectif ſans aberration à 4 lentilles, ſavoir deux bi-convexes de verre commun, & deux bi-concaves de criſtal; enſorte qu'on y emploïe le plus petit nombre de baſſins différens, & les plus petites courbures des faces qu'il ſoit poſſible: en ſuppoſant toujours les rapports des forces réfringentes $m = 1,532$, $n = 1,581$, $dn = 1,59$.

Les verres iſoſceles produiſent dans cette combinaiſon une aberration poſitive dont l'angle eſt $\phi''' - A = 1',119$ (art. XXXVII.).

Cet-

Cette aberration étant si grande, on ne pourroit la diminuer que bien peu en prenant le *minimum* de Φ pour les lentilles convexes; on ne sauroit donc éviter d'altérer la proportion des faces des lentilles concaves: ainsi il convient de laisser les verres convexes isosceles, tant pour ne pas multiplier les bassins sans nécessité, que pour ne pas augmenter les plus grands arcs de courbures de cette combinaison. Mais doit-on aussi laisser une des lentilles concaves isoscele, & chercher à détruire l'aberration par le *maximum* de l'autre, quand même cela suffiroit? Non, puisqu'alors il faudroit emploïer quatre raïons différens, & mettre une trop grande disproportion entre les deux faces de l'un des verres concaves. Il faut donc partager également l'altération nécessaire entre les deux lentilles concaves, ensorte qu'on puisse exécuter cet objectif avec trois bassins, & que les plus grands arcs restent aussi petits qu'il sera possible.

Comme cet objectif est analogue à celui de deux verres (art. XLI.), où il falloit pour détruire l'aberration prendre $K = 7^\circ.47'$, nous prendrons d'abord ici K plus petit de moitié, c'est à dire $K = 3^\circ.53'$, & ne calculant que les verres concaves, on a, pour la seconde lentille qui est concave, $\alpha' = \Phi + K = 7^\circ.42,6564$ (art. XXXVII.), ce qui donne $\Phi' = 1^\circ.11',6246$. Or, dans les verres isosceles, j'avois $\Phi' = 1^\circ.12',1121$ (art. cité); cet angle a donc diminué par l'altération de la premiere lentille concave de $0',4876$, ce qui augmente d'autant l'angle d'incidence sur la lentille convexe suivante $\alpha'' = C - \Phi'$: on aura donc à très peu près $\Phi'' = 5^\circ.2',1207 - 0'.4876$, donc l'incidence sur la derniere lentille concave sera $\alpha''' = K + \Phi'' = 3^\circ.53' + 5^\circ.1',633 = 8^\circ.54',633$, ce qui donne l'angle à l'axe $\Phi''' = 2^\circ.23',03325$, d'où résulteroit une aberration négative $A - \Phi''' = 0',1239$. Je conclus de là par une premiere analogie que, si pour diminuer cet angle à l'axe de $1', 243$, il a fallu augmenter l'arc K (qui dans le cas des verres isosceles étoit de $2^\circ.15',228$.) de $97',772$, il auroit suffi de l'augmenter de $88'$, pour diminuer l'angle à l'axe de $1', 119$. Ce qui me donne une valeur plus

 appro-

approchée de K, favoir K = 3°. 43′. En calculant donc les deux lentilles concaves fur cette nouvelle valeur, le même procédé me donne l'angle à l'axe $\phi''' = 2°.23',2844$; ou une aberration pofitive $\phi''' - A = 0',1273$. De là, par une feconde analogie, il eft aifé de conclure que la véritable valeur de l'arc K, pour rendre l'aberration nulle, fera: K = 3°. 48′. J'ai donc finus K = 0.0662739, & par conféquent finus K′ = 0.0123779, ce qui donne la conftruction fuivante:

le raïon des 2 lentilles convexes $r = r' = r^{IV} = r^{V} = 0.666365$ F,

le raïon de la premiere face des deux lentilles concaves $r'' = r^{VI} = 0.628704$ F,

le raïon de la feconde face des deux lentilles concaves $r''' = r^{VII} = 3.366214$ F.

Remarque I.

En fuivant la méthode que j'ai propofée dans l'article XLIII. on trouvera, pour détruire l'aberration de cet objectif à quatre lentilles, une conftruction bien plus facile, & dont je crois que l'effet feroit fupérieur à celui de la conftruction précédente, malgré l'aberration de réfrangibilité qui n'eft pas entiérement détruite. Je trouve, par un calcul femblable à celui de l'article XLIV. que pour détruire ici une aberration pofitive de fphéricité = 1′, 119 fans altérer l'égalité des faces, il faut fuppofer le rapport des difperfions comme de 1 à 2, ce qui donne $dn = 2$, & par conféquent le finus C = 0.0431332, & le finus K = 0.0215666, d'où réfulte la conftruction fuivante à deux baffins:

le raïon des quatre faces convexes

$$r = r' = r^{IV} = r^{V} = 0.966.\text{F},$$

le raïon des quatre faces concaves

$$r'' = r''' = r^{VI} = r^{VII} = 1.932.\text{F}.$$

Re-

Remarque II.

Si dans cette construction, pour avoir les raïons en nombres entiers, on pose $r = 1$, on a $r'' = 2$; $F = 1,0352$: ainsi pour une lunette d'environ trois pieds & demi, on prendra $r = 41$ pouces, & le foïer sera $= 42,4$ pouces. Ou en général, en prenant le raïon de concavité précisément double du raïon de convexité, le foïer sera à peu près égal à la longueur de ce dernier raïon, plus $\frac{1}{30}$ de cette longueur.

XLVI.

Recherches sur la meilleure construction d'un objectif sans aberration à cinq lentilles, dont trois bi-convexes de verre commun, & deux bi-concaves de cristal d'Angleterre, les rapports étant: $m = 1,532$, $n = 1,581$, $dn = 1,59$.

L'aberration que donnent ici les verres isoscèles est, en y comprenant l'angle de la flèche $= + 0',492$ (XXXVIII.). Pour la rendre nulle, il est évident que la meilleure méthode est de laisser isoscèles les trois lentilles convexes, qui ont les plus grandes courbures, & d'altérer également les faces des deux verres concaves, en sorte qu'on n'ait que trois raïons, & trois bassins différents. Or les verres concaves sont ici les mêmes que dans la combinaison précédente à quatre verres; & en augmentant la face antérieure K de $93'$, nous avons détruit une aberration $= 1,119$: il semble donc qu'avec une augmentation moindre de moitié on pourroit détruire une aberration dont l'angle n'est que $0',492$. Mais, comme les arcs convexes sont ici plus petits que dans l'objectif à quatre verres dans la raison de 2 à 3, l'effet de l'altération en sera d'autant moindre: cette considération indique d'abord la valeur à assigner à K, savoir $K = 2°.15' + 1°.10'$; & à l'aide de l'analogie on la trouve plus exactement, $K = 3°.35'$, ce qui donne pour la face postérieure de chaque lentille concave, sin $K' = 0.0161516$, d'où résulte la construction suivante:

le raïon des six faces convexes

$$r = r' = r^{IV} = r^{V} = r^{VIII} = r^{IX} = 0.999548\,F,$$

le

le raïon des faces antérieures concaves

$$r^{II} = r^{VI} = 0{,}666665\,F,$$

le raïon des faces postérieures concaves

$$r^{III} = r^{VII} = 2{,}579724.F.$$

Remarque I.

Comme dans l'objectif à cinq verres isosceles, l'arc convexe C est plus grand que l'arc concave K; si l'on veut détruire l'aberration de sphéricité en laissant les verres isosceles, il faudra supposer *dn* plus grand que 1,59, par les raisons que nous avons vues (XLIII.). Mais, parce que l'excès de C sur K est très peu considérable, aiant ici C = 2°.23', & K = 2°.15' (art. XXXVIII.), ce ne sera qu'en assignant à *dn* une valeur beaucoup au dessus de 1,59, qu'on parviendra, par la méthode que j'ai proposée, à rendre l'aberration insensible, quoique cette aberration ne soit que d'une demi-minute. Or, plus on augmente *dn*, plus on augmente l'aberration de réfrangibilité, & les raïons des faces; ainsi, pour ne pas faire ceux-ci d'une longueur incommode, & pour que les deux aberrations soient à peu près également tolérables, il ne faudra pas assigner à *dn* une valeur au delà de 3; en lui donnant cette valeur, on trouvera le sinus C = 0.0205254, & le sinus K = ½ sin C = 0.0102627, d'où résulte une construction bien aisée d'un objectif à cinq verres, sur deux seuls raïons, qui, bien qu'imparfait dans la théorie, seroit probablement très bon dans la pratique:

le raïon des six faces convexes = 2,03.F,
le raïon des quatre faces concaves = 4,06.F.

Remarque II.

En supposant ici le raïon de convexité = 1, on a le raïon de concavité = 2, & le foïer F = 0,49261. Ainsi, en faisant le bassin des 3 lentilles convexes de 7 pieds de raïon, & celui des deux lentilles concaves de 14 pieds, on auroit l'objectif composé d'une lunette de quarante pouces & demi.

XLVII.

XLVII.

Recherches sur l'effet de la transposition des verres isosceles pour diminuer l'aberration.

J'ai dit à l'entrée de ces Mémoires qu'un des moïens qu'on pourroit tenter pour diminuer l'aberration sans altérer la figure des lentilles seroit de les transposer. Pour expliquer cette méthode, nous allons examiner le cas d'un objectif composé de quatre lentilles égales, isosceles bi-convexes, & de deux lentilles égales & isosceles bi-concaves. On aura ici $\sin C = 0.03126415$; $C = 1°.47',4969$, & $\sin K = 0.03932597$; $K = 2°.15',2276$. De là il est aisé de trouver par notre méthode pour chaque espece de lentille l'angle à l'axe d'un raïon incident parallele. On aura:

pour la lentille convexe $\Phi = 1°.54',47327$,
pour la lentille concave $\Phi = 2°.37',36666$.

Or, à l'aide de ces deux angles, on a sans aucun calcul la suite des angles à l'axe, pour toutes les combinaisons possibles; & ces angles donneroient précisément la même valeur au dernier Φ^{V}, dans toutes les transpositions, n'étoient les petites altérations qui résultent de l'incommensurabilité entre les arcs & les sinus. Quatre lentilles convexes égales, que je nommerai C, C, C, C, peuvent se transposer avec deux lentilles concaves aussi égales K, K, en $\frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.4.\ 1.2}$ façons; c'est à dire de quinze manieres différentes, dont cinq donneront le dernier verre concave, & les dix autres auront pour dernier verre une lentille convexe. Voici le Tableau de ces quinze transpositions.

C	$\Phi = +$	$1°.54',4733$
C	$\Phi' = 2\Phi = +$	$3.\ 48,9465$
C	$\Phi'' = \Phi' + \Phi = +$	$5.\ 43,4198$
C	$\Phi''' = \Phi'' + \Phi = +$	$7.\ 37,8931$
K	$\Phi^{IV} = \Phi''' - \Phi = +$	$5.\ \ 0,5265$
K	$\Phi^{V} = \Phi^{IV} - \Phi = +$	$2.\ 23,16$

C - -	Φ	=				+		1°.54,47
C - -	Φ'	=	Φ	+	Φ	=	+	3. 48,94
C - -	Φ''	=	Φ'	+	Φ	=	+	5. 43,41
K - -	Φ'''	=	Φ''	−	Φ	=	+	3. 6,05
C - -	Φ^{IV}	=	Φ'''	+	Φ	=	+	5. 0,52
K - -	Φ^{V}	=	Φ^{IV}	−	Φ	=	+	2. 23,16.

C - -	Φ	=				+		1°.54',47
C - -	Φ'	=	Φ	+	Φ	=	+	3. 48,94
K - -	Φ''	=	Φ'	−	Φ	=	+	1. 11,58
C - -	Φ'''	=	Φ''	+	Φ	=	+	3°. 6,05
C - -	Φ^{IV}	=	Φ'''	+	Φ	=	+	5. 0,52
K - -	Φ^{V}	=	Φ^{IV}	−	Φ	=	+	2. 23,16.

C - -	Φ	=				+		1°.54',47
K - -	Φ'	=	Φ	−	Φ	=	−	0. 42,89
C - -	Φ''	=	Φ'	+	Φ	=	+	1. 11,58
C - -	Φ'''	=	Φ''	+	Φ	=	+	3°. 6,05
C - -	Φ^{IV}	=	Φ'''	+	Φ	=	+	5. 0,52
K - -	Φ^{V}	=	Φ^{IV}	−	Φ	=	+	2. 23,16.

K - -	Φ	=				−		2°.37',36
C - -	Φ'	=	Φ	−	Φ	=	−	0. 42,89
C - -	Φ''	=	Φ'	+	Φ	=	+	1°.11,58
C - -	Φ'''	=	Φ''	+	Φ	=	+	3°. 6,05
C - -	Φ^{IV}	=	Φ'''	+	Φ	=	+	5°. 0,52
K - -	Φ^{V}	=	Φ^{IV}	−	Φ	=	+	2. 23,16.

Com-

Combinaisons qui placent la lentille convexe vers l'œil.

K	- -	Φ	$\equiv$	−	2°. 37′, 36
C	- -	Φ'	$\equiv$	−	0. 42, 89
C	- -	Φ''	$\equiv$	+	1. 11, 58
C	- -	Φ'''	$\equiv$	+	3. 6, 05
K	- -	Φ^{IV}	$\equiv$	+	0. 28, 69
C	- -	Φ	$\equiv$	+	2. 23, 16.

K	- -	Φ	$\equiv$	−	2°. 37′, 36
C	- -	Φ'	$\equiv$	−	0. 42, 89
C	- -	Φ''	$\equiv$	+	1. 11, 58
K	- -	Φ'''	$\equiv$	−	1. 25, 78
C	- -	Φ^{IV}	$\equiv$	+	0. 28, 69
C	- -	Φ^{V}	$\equiv$	+	2. 23, 16.

K	- -	Φ	$\equiv$	−	2°. 37′, 36
C	- -	Φ'	$\equiv$	−	0. 42, 89
K	- -	Φ''	$\equiv$	−	3. 20, 25
C	- -	Φ'''	$\equiv$	−	1. 25, 78
C	- -	Φ^{IV}	$\equiv$	+	0. 28, 69.
C	- -	Φ^{V}	$\equiv$	+	2. 23, 16.

K	- -	Φ	$\equiv$	−	2°. 37′, 36
K	- -	Φ'	$\equiv$	−	5°. 14, 72
C	- -	Φ''	$\equiv$	−	3°. 20, 25
C	- -	Φ'''	$\equiv$	−	1. 25, 78
C	- -	Φ^{IV}	$\equiv$	+	0. 28, 69
C	- -	Φ^{V}	$\equiv$	+	2. 23, 16.

C	- -	ϕ	=	+	1°. 54, 47
K	- -	ϕ'	=	−	0. 42, 89
K	- -	ϕ''	=	−	3°. 20, 25
C	- -	ϕ'''	=	−	1°. 25, 78
C	- -	ϕ^{IV}	=	+	0°. 28, 69
C	- -	ϕ^{V}	=	+	2. 23, 16.

C	- -	ϕ	=	+	1°. 54, 47
C	- -	ϕ'	=	+	3°. 48, 94
K	- -	ϕ''	=	+	1. 11, 58
K	- -	ϕ'''	=	−	1. 25, 78
C	- -	ϕ^{IV}	=	+	0. 28, 69
C	- -	ϕ^{V}	=	+	2. 23, 16.

C	- -	ϕ	=	+	1°. 54', 47
C	- -	ϕ'	=	+	3°. 48. 94
C	- -	ϕ''	=	+	5. 43, 41
K	- -	ϕ'''	=	+	3°. 6, 05
K	- -	ϕ^{IV}	=	+	0. 28, 69
C	- -	ϕ^{V}	=	+	2. 23, 16.

C	- -	ϕ	=	+	1°. 54', 47
C	- -	ϕ'	=	+	3°. 48, 94
K	- -	ϕ''	=	+	1°. 11, 58
C	- -	ϕ'''	=	+	3°. 6, 05
K	- -	ϕ^{IV}	=	+	0. 28, 69
C	- -	ϕ^{V}	=	+	2. 23', 16.

C	- -	ϕ	=	+	1°. 54, 47
K	- -	ϕ'	=	−	0. 42, 89
C	- -	ϕ''	=	+	1. 11, 58
C	- -	ϕ'''	=	+	3°. 6, 05
K	- -	ϕ^{IV}	=	+	0. 28, 69
C	- -	ϕ^{V}	=	+	2. 23, 16.

C	- -	ϕ	=	+	1°. 54, 47
K	- -	ϕ'	=	—	0. 42, 89
C	- -	ϕ''	=	+	1. 11, 58
K	- -	ϕ'''	=	—	1. 25, 78
C	- -	ϕ^{IV}	=	+	0. 28, 69
C	- -	ϕ^{V}	=	+	2°. 23, 16.

L'inspection de ce tableau montre en gros que l'aberration n'est pas fort considérable, & qu'elle sera positive lorsque la derniere lentille sera convexe; l'angle de la flêche sera alors $= 0'.0933$. Mais, si le dernier verre est concave, l'angle de la flêche qui sera $= 0', 117$, rendra cette aberration négative. De là il résulte que, dans les cinq premieres combinaisons, il faut choisir le cas qui donne le plus grand angle à l'axe ϕ^{V}, & qu'il faut au contraire, dans les dix dernieres combinaisons, chercher le cas qui donnera ϕ^{V} le plus petit possible.

Or il est évident par le développement des ϕ dans le tableau, que le dernier angle à l'axe ϕ^{V} qui est toujours positif, est d'autant plus grand, que tous les angles précédents auront été plus grands dans le sens positif; c'est à dire, que les angles convergens à l'axe auront eu un plus grand nombre de degrés, & que les angles divergens de l'axe en auront eu un plus petit; d'où il est aisé de voir que, pour diminuer l'aberration négative dans les cinq premieres combinaisons, l'arrangement CCCCKK est le plus favorable de tous, puis que tous les angles à l'axe y sont positifs, & que l'on y a un angle de 7°. 37'. On verra par les mêmes considérations que les quatre autres arrangemens vont en dégradant dans l'ordre suivant: CCCKCK; CCKCCK; CKCCCK & KCCCCK: ce dernier sera le moins favorable de tous.

Par une raison contraire, pour diminuer dans les dix combinaisons suivantes l'aberration positive, il faut choisir l'arrangement dont les angles convergens sont les plus petits & les angles divergens ou négatifs les plus grands. Ce qui indique, comme le cas le plus favorable

rable, l'arrangement KKCCCC, où non seulement il y a quatre angles négatifs, mais où encore l'un de ces angles va à 5^{d}. 14'. Or cet arrangement est celui du même objectif que nous avons trouvé le meilleur lorsque la lentille oculaire est concave; d'où l'on voit, pour l'observer en passant, qu'un objectif combiné peut quelquefois être retourné en sens contraire sans inconvénient; les autres neuf combinaisons s'écartent de la perfection de l'arrangement KKCCCC, dans l'ordre suivant: KCKCCC; CKKCCC; KCCKCC; CKCKCC; KCCCKC; CKCCKC; CCKKCC; CCKCKC & CCCKKC.

Pour connoitre précisément le degré d'avantage que chaque arrangement peut avoir, il n'y a qu'à prendre la somme des angles φ, φ', φ'' & φ''' de chaque combinaison, les deux derniers angles φ^{IV} & φ^{V} étant les mêmes, dans une même espece d'aberration.

Ainsi, lorsque l'aberration est négative, on trouve: $\varphi + \varphi' + \varphi'' + \varphi'''$

pour l'arrangement	CCCCKK	= +	19°. 2'
- - - -	CCCKCK	= +	14°. 31
- - - -	CCKCCK	= +	9°. 59
- - - -	CKCCCK	= +	5°. 29
- - - -	KCCCCK	= +	0°. 28.

Pareillement, lorsque l'aberration à détruire est positive, on a $\varphi + \varphi' + \varphi'' + \varphi'''$

dans l'arrangement	KKCCCC	= −	12°. 36'
- - - -	KCKCCC	= −	8. 4.
- - - -	CKKCCC	= −	3. 33.
- - - -	KCCKCC	= −	3. 33
- - - -	CKCKCC	= +	0°. 58.

dans

dans l'arrangement	KCCCKC	=	+ 1°. 58′
	CKCCKC	=	+ 5°. 59
	CCKKCC	=	+ 5°. 59
	CCKCKC	=	+ 8°. 59
	CCCKKC	=	+ 14°. 31.

Au reste, on aura dans ce système de six lentilles isoscèles la construction suivante :

le raïon des 8 faces convexes, $r = 1,33273F$,

le raïon des 4 faces concaves, $R = 1,05952F$.

Remarque I.

Si l'on pose $r = 1$, on aura $R = 0.795$ & $F = 0.75$: ainsi, en prenant le raïon du bassin des lentilles convexes de 56 pouces, celui des verres concaves sera de 44,52 pouces, & l'objectif aura un foïer de trois pieds & demi.

Remarque II.

Comme le choix du meilleur arrangement ne suffiroit pas pour détruire une aberration un peu forte ; le moïen le plus aisé de la rendre nulle sera de suivre la méthode que j'ai proposée (art. XLIII.). Car, puisque, dans ce système de six lentilles, l'arc de convexité C est plus petit que l'arc de concavité K, on voit d'abord qu'il faudra assigner à dn une valeur au dessous de 1,59, & qu'ainsi l'on pourra détruire l'aberration positive sans altérer beaucoup le vrai rapport des dispersions, & par conséquent sans introduire des couleurs. On n'aura pas même besoin, vû la petitesse des arcs, d'un calcul trop scrupuleux ; puisque la simple formule $\Phi^V = 8\ (m - 1)\ C - 4\ (n - 1)\ K$, donnera l'angle à l'axe à très peu près exactement. En supposant donc $dn = 1,5$, on aura $\sin C = 0.0360023$, & $\sin K = 0.0480121$, d'où l'on conclut $\Phi^V = 4,256 \times 123',79346 - 2,324 \times 165',1238$, ou Φ^V 2°. 25′,1182. Or, puisque les arcs concaves sont ici

ici un peu plus grands que les arcs convexes, on peut compter que le calcul exact donneroit cet angle à l'axe encore un peu plus petit; mais l'angle de la flèche de la derniere courbure convexe sera ici $\lambda = + 0', 1076$. Pour peu donc que le calcul exact donne ϕ' plus petit, & qu'on choisisse un arrangement favorable des lentilles, il n'est pas douteux que la petite aberration $+ 0', 068$ sera anéantie, sans qu'il en résulte des couleurs, & sans altérer l'égalité des faces. J'en conclus donc, que la meilleure construction d'un objectif à six lentilles sera la suivante:

le raïon des 8 faces convexes, $r = 1,15733 F$,

le raïon des 4 faces concaves, $R = 0,8678. F$.

Ou bien, posant $r = 1$, on aura $R = 0.7498275$ & $F = 0.86455$, d'où l'on trouve, pour un objectif d'environ quarante pouces de foïer, le raïon du bassin des faces convexes, $r = 48$ pouces, & le raïon du bassin des faces concaves, $R = 36$ pouces.

Remarque III.

Il sera bon d'observer, tant à l'égard de cette construction que de toutes les autres, que lorsqu'il faudra laisser subsister pour la facilité de l'exécution quelque petite aberration de sphéricité, il est avantageux que ce soit une aberration négative, parce qu'elle sera diminuée, ou peut-être même détruite, par l'aberration des oculaires, qui étant toujours positive, augmenteroit au contraire l'aberration restante de l'objectif, si celle-ci étoit aussi positive.

Remarque IV.

Au reste, je dois en finissant ces recherches avertir les Artistes qui voudront vérifier mes calculs, ou en faire de pareils sur d'autres données, que dans les objectifs composés de plusieurs lentilles les demi-arcs des faces étant fort petits, la simple différence des logarithmes des sinus ne donneroit pas assez exactement les parties décimales des minutes. La méthode la plus facile que je puisse leur indiquer en ce

ce cas-là c'est de se servir des deux formules suivantes, où L signifie le logarithme, & N le nombre naturel qui lui correspond:

I. Aiant l'arc A' en minutes & décimales, on aura son sinus S:

$$S = N.(L.A + 96,4637261) - N.(3.L.A + 88.6130271).$$

II. Aiant le sinus S, on aura en minutes & décimales l'arc correspondant A:

$$A = N.(L.S - 96,4637261) + N(3.L.S - 97,2418773).$$

En emploïant ces formules qui sont fondées sur la série de Newton $S = A - \frac{1}{6}A^3 + \text{etc.}$ on ne se trompera pas d'un $\frac{1}{100}$ de seconde, sur des arcs qui n'excéderont pas 4 degrés; mais je ne voudrois pas conseiller d'en faire usage dans le calcul des aberrations, pour des angles de 6 à 7 degrés, parce que l'erreur excéderoit déjà une demi-seconde; heureusement dès le quatrieme degré, les différences logarithmiques donnent l'arc à $\frac{1}{100}$ de seconde près très exactement; il suffira donc d'emploïer les formules que je viens d'indiquer pour des arcs au dessous de 4 degrés; & pour tous les autres, on peut s'en fier aux logarithmes des tables des sinus.

Remarque V.

Si les arcs sont au dessous d'un degré, il suffit des premiers termes, & l'on aura tout de suite:

$$\log S = l.A' + 6.4637261, \text{ ou } \log A' = l.S - 6.4637261,$$

ou pour plus d'exactitude, lorsque les arcs sont un peu plus grands, on soustrait du logarithme de l'arc donné en minutes & décimales, le logarithme des minutes entieres, & la différence ajoutée au logarithme du sinus d'un arc de ce nombre de minutes entieres, donnera le logarithme du sinus cherché, & réciproquement: soit par ex. l'arc donné $= 1^\circ. 2',948854$, on ôte le logarithme de 62, du logarithme de 62,948854, & la différence $= 0.0065961$, ajoutée au logarithme des tables pour le sinus de $1^\circ. 2'$, donne le logarithme du

sinus de 1°. 2', 948854, = 8. 2626904. Si au contraire le logarithme d'un sinus donné étoit = 8. 3189783; on en soustrairoit le logarithme du sinus des tables le plus approchant, savoir celui de l'arc de 1°. 11'; & la différence = 0.0040247, ajoutée au logarithme du nombre des minutes = 71, donneroit le logarithme de l'arc = 1.8552830, ce qui répond au nombre 71',661.

Remarque VI.

Il y auroit bien une formule assez aisée & qui jusqu'à 20 degrés ne s'écarte pas d'un $\frac{1}{10}$ de seconde, mais ne l'aiant trouvée que par induction je ne puis ni la démontrer, ni la garantir; quoi qu'il en soit la voici. L'angle A étant donné en minutes, on trouvera le logarithme du sinus correspondant:

$$\log S = \log A + 6,4637261 - \frac{A}{60} \times \frac{A}{60}\left[220 + \left(\frac{A}{60} + 4\right) \times \left(0.05 + 0.001\left(\frac{A}{60} - 12\right)\right)\right].$$

Si l'arc est au dessous de 12 degrés, le dernier membre qui ne peut jamais être négatif, $0.001.\left(\frac{A}{60} - 12\right)$ évanouit. Ainsi, depuis l'angle d'une minute, jusqu'à l'angle de 12^d., la formule donne: $l.S = l.A + 6,4637261 - N(2l.A - 1,2134851) - N(3l.A - 6,6354836)$; au delà de 12^d. elle est: $l.S = l.A + 6,4637261 - N(2l.A - 1,2135797) - N(3l.A - 6,7112043) - N(4l.A - 0,1126048)$. L'on veut trouver, par exemple, le logarithme du sinus d'un arc de 17°:30'.30''. On a A = 1050',5, donc

l.A = 3.0213961.	2l.A = 6.0427922.	3l.A = 9.0641883.	4l.A = 2.0855844
+ 6.4637261	− 1.2135797	− 6.7112043	− 0.1126048
9.4851222	4.8292125	2.3529840	1.9729796
− 67805. = N = 67485,8	+ N = 225,4	+ N = 93,968.	

l.S = 9.4783417; ce qui ne s'écarte pas de plus de 0.0000004, du véritable logarithme du sinus de 17°.30'.30''.

Ré-

Réciproquement, le logarithme d'un sinus étant donné, on aura le logarithme de l'arc en minutes :

$$\mathrm{l.A} = \mathrm{l.S} - 6,4637261 + \frac{AA}{3600}\left[220 + \left(\frac{A}{60} + 4\right)\left(0.05 + 0.001\left(\frac{A}{60} - 12\right)\right)\right].$$

Or on connoit par les tables la valeur de A, en nombres entiers, ce qui suffit pour l'usage de cette formule. Soit donné, par exemple, $\mathrm{l.S} = 9.4783421$, qui répond à un arc au dessus de 17°. 30′; on a $\frac{AA}{3600}\left[220 + \left(\frac{A}{60} + 4\right)\left(0.05 + 0.001\left(\frac{A}{60} - 12\right)\right)\right] = (17,5)^2 [220 + 0.05 \times 21,5 + 0.021,5 \times 5,5] = (17,5)^2 \times 221,19325 = 67740$; donc $\mathrm{l.A} = 9.4783417 - 6,4637261 + 67740 = 3.0213900$; donc $A = 1050',485$. Or j'avois supposé $AA = 1050^2$. Il se trouve $= 1050,485^2$; il faut donc encore ajouter au log. A trouvé, le double rectangle $\frac{2 \times 1050 \times 0.485}{3600}$, multiplié par 221. Ainsi le vrai log. A est $= 3.0213900 + \frac{442 \times 105 \times 0.485}{360} = 3.0213962$; donc $A = 1050',5$.

Remarque VII.

Si l'on développe les trois premiers termes de la série de *Newton*: $S = A - \frac{A^3}{6} + \frac{A^5}{120}$, on aura les deux formules suivantes plus exactes que celles de la remarque 4e.

I°. Pour trouver le sinus, l'arc étant donné en minutes & décimales

$$S = N(l.A + 6,4637261) - N(3l.A + 8.6130271) + N(5l.A + 0.2394493).$$

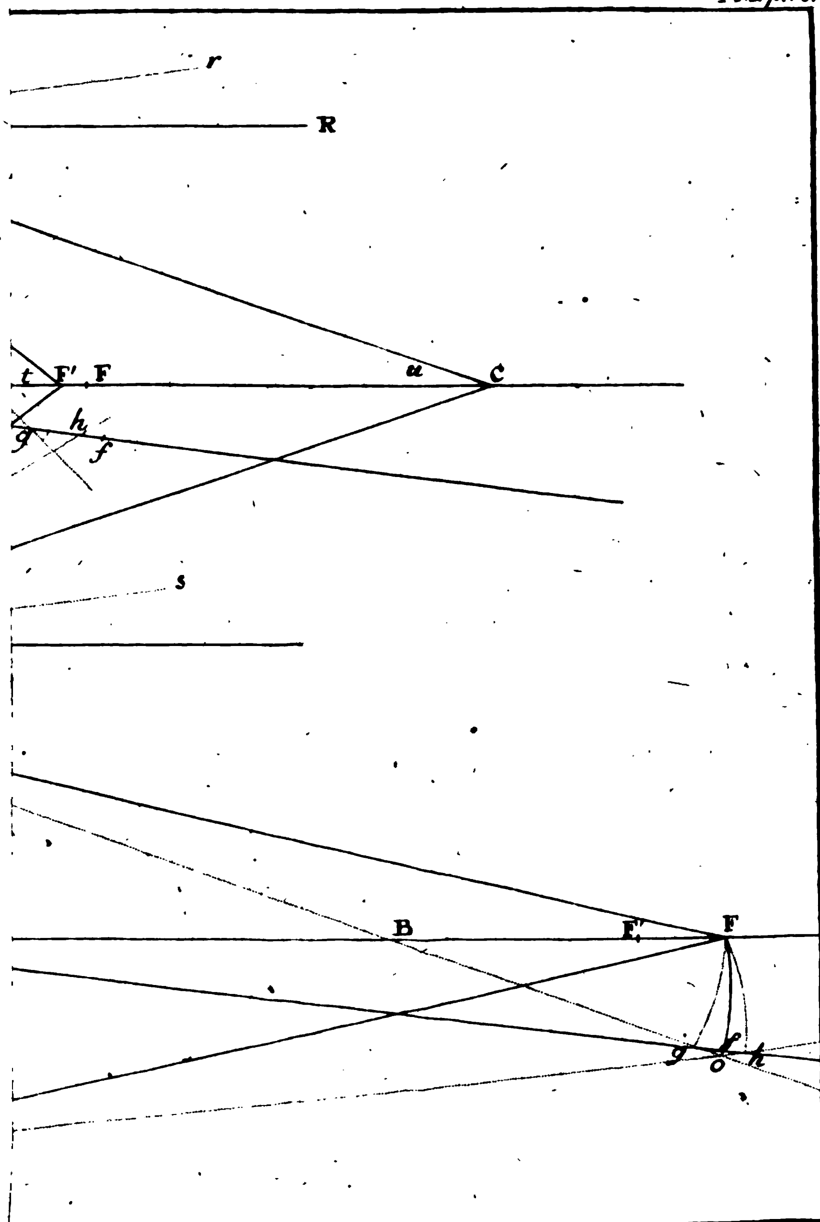
II°. Pour trouver l'arc en minutes & décimales, le sinus étant donné

$$A = N(l.S - 6,4637261) + N(3l.S - 7.2418773) + N(5l.S + 2,4113352).$$

à l'aide desquelles on trouvera jusqu'à 20d. le sinus, & jusqu'à 14d. l'arc, sans que l'erreur aille à une demi-seconde. Mais au delà de 14°. l'erreur sur l'arc devient trop sensible dans un calcul où l'on doit déterminer l'angle avec une grande précision. Pour l'avoir exactement jusqu'à 20°, il faut encore ajouter à l'arc trouvé par la formule, le nombre de minutes, ou plutôt de décimales qui répond à $N(7 l.S + 2.2222848)$.



DIS-



r
R
t
F'
F
u
C
h
g
f
s
B
F'
F
g
f
o
h

F

q f h

o

f h

g u

Fig. 6.

O

T t m s m u V

T′ V′

y y

p s p

n

q o q

DISSERTATION BOTANIQUE
SUR
LE CARPOBOLUS DE MICHELI
PAR MR. GLEDITSCH.

Traduit de l'Allemand.

Je suis persuadé que bien des gens qui s'attachent à l'étude de l'Histoire Naturelle & de la Botanique, ont des préjugés sur la stérilité de notre Patrie, qui leur font porter un jugement peu exact sur le succès de la culture des champs ou des jardins de ces contrées; quoiqu'ils puissent lire, dans des Ecrits publiés il y a quelques années, & dans d'autres encore plus récens, que dans toutes les Provinces de la Marche de Brandebourg il y a plusieurs endroits qui, par la fertilité des campagnes, par la bonté plus ou moins grande du sol, & par l'abondance de plantes également rares & utiles, se distinguent & ne cedent en rien aux pays de l'Allemagne les mieux cultivés. A' la vérité, la plûpart des Voyageurs, qui ne voyent que quelque coin de la Marche, ou qui la traversant dans des voitures publiques, sont obligés de suivre certaines routes déterminées, sans être à portée de voir les endroits fertiles, concluent mal à propos des grands chemins qui sont pleins d'un sable également incommode aux hommes & aux animaux, & de ce sable farineux toujours en mouvement, qui vole autour des collines, à la nature du sol des autres districts de la Marche. D'autres regardent avec une sorte d'horreur nos bruyeres, nécessaires aux brebis au printems & en été, & qui sont toujours agréables aux abeilles en automne, aussi bien que nos forêts, qui leur paroissent, je ne sais sous quel point de vue, tristes, & noires ou jaunâtres, tandis qu'elles sont très recommandables par la quantité d'arbres résineux qui y croissent.

Les personnes qui en jugent ainsi, ignorent l'importance des matieres que ces bois fournissent, leur grand prix chez les étrangers, & l'usage très étendu du baume qui découle de ces arbres, qui le dispute en bonté & en force avec les autres baumes étrangers, qui viennent d'au delà les mers, & dont la plûpart sont factices.

Qu'elles sachent donc que la bonté intrinseque naturelle de plusieurs provinces de notre Patrie leur est pour la plus grande partie inconnue; & que nous possédons des terroirs véritablement découlans de lait & de miel dans une foule de collines, de prairies, de campagnes & de forêts, qu'environne un sable qui choque la vue & semble annoncer la stérilité. Quoi qu'il en soit, mon dessein n'étant pas de pousser ici plus loin l'éloge de la fertilité de notre partie, j'ai plutôt en vue d'établir la bonté naturelle du terroir de la Marche, en tirant mes preuves autant de la quantité copieuse des plantes de tout genre qu'il produit, que de la rareté & de la beauté de plusieurs de ces plantes, qu'on rencontre aussi dans d'autres pays. Je puis m'appuyer ici sur l'autorité de témoins illustres; & je n'alléguerai pas simplement la collection de plantes de la Marche que je possede en propre; mais j'y joindrai les rélations des Botanistes les plus distingués; par exemple, du célebre *Linné*, par rapport aux plantes de Laponie & de Suede; de M. *Gmelin* l'oncle, par rapport à celles de Russie, de Sibérie & du Kamschatka; de M. *Oederer*, dans sa *Flora Danica;* de M. *de Haller*, pour la Suisse; de M. *Vaillant*, pour les environs de Paris; de M. *Gerard*, pour les Provinces de France; de M. *Allion*, pour Nicée; de M. *Micheli*, dans ses *Nova Plantarum Genera*, avec les Observations qu'il a faites dans une partie de l'Italie; de M. *Jaquin*, pour le territoire de Vienne; de *Scopolius*, pour la Carniole; de *Ruppius*, pour les environs de Jena, & de plusieurs autres Savans dont la réputation est décidée en fait de Botanique.

Les familles des *Orchis*, des *Gramen*, des *Joncs*, des *Mousses* & des *Champignons*, dont on n'a pas encore fait un examen assez complet, rendent la quantité des plantes que la Marche produit, beaucoup

coup plus considérable; & un bon nombre des mêmes especes croissent aussi dans le territoire même de Rome, dans ceux de Naples, de Florence, de Paris & de Londres. Il n'y a pas beaucoup d'especes de *fougeres;* on les trouve attachées aux racines des arbres, aux murs & aux collines, dans des lieux couverts d'une mousse humectée; mais pour les *joncs*, les *mousses* & les *champignons*, ils abondent dans les lieux susdits.

Le nombre des champignons, entre lesquels il regne une variété merveilleuse, est assez grand dans l'Allemagne en général; mais, dans quelques unes de nos Provinces, il va si loin qu'il paroit quelquefois incroyable, surtout pour ceux qui n'ont pas l'occasion de parcourir, en automne & à l'entrée de l'hyver, les immenses demeures des champignons, qui ne se rencontrent souvent qu'au hazard dans nos forêts. Parmi nos champignons les plus rares, il en existe que d'autres ont aussi rencontrées en diverses Provinces d'Italie, en Baviere, dans le Palatinat, en Autriche & en Hongrie; j'ai fait mention d'une partie dans l'ouvrage que j'ai autrefois publié sous le titre de *Methodus fungorum.*

Mais, comme chaque jour amene de nouvelles découvertes, il est depuis arrivé que de nouvelles especes de cet ordre, par exemple, celles qu'on nomme *Elvelæ*, *Clavariæ*, & *Lycoperdi*, propres à certains lieux, ont été ajoutées aux précédentes; especes mieux connues des experts & plus recherchées que les autres. Nous nous proposons d'en indiquer ici une seule en guise d'échantillon, & d'en donner seulement pour cette fois une explication succincte. Dans l'espace de vint ans, je l'ai trouvée deux fois dans les agréables promenades de notre Parc; elle est tout à fait petite, assez rare & fort belle. Jamais ce Champignon ne s'est offert aux recherches de qui que ce soit, ni ailleurs, ni dans le territoire de Berlin, ou dans le reste de la Marche; de l'aveu des Botanistes modernes, c'est une espece de *Lycoperdon*, autrefois inconnue, & qui n'a pas été découverte avant les tems de *Micheli*, ce pénétrant Botaniste aux regards duquel les productions les

plus

plus petites & les plus cachées du regne végétal ne pouvoient se dérober : il l'a nommée *Carpobolus*, c'est à dire, *un champignon dont le fruit se détache par une sorte d'éjaculation.*

Quoique je ne fasse pas difficulté de mettre ce champignon au rang des plantes les plus rares de la Marche ; cependant, autant que j'ai pu l'inférer des circonstances du sol, des lieux, de la situation & du tems de la végétation, il se peut qu'il y en ait plusieurs répandus dans d'autres endroits tant de la Marche que hors de ce pays ; c'est peut-être leur extrême petitesse qui empêche qu'on ne les apperçoive : ils sont le partage des seuls Observateurs, qui, par leur industrie obscure, mais à laquelle on ne sauroit pourtant donner trop d'éloges, mettent au grand jour ce que la Nature semble se plaire à cacher le plus soigneusement.

Le *Carpobolus* de *Micheli* naît principalement dans les endroits sombres des forêts, dans les terres basses, un peu humides & couvertes de vapeurs, où l'on trouve aussi çà & là des chênes creux, d'une vieillesse décrépite, & qui ont à peine un reste de vie. Leur bois carié, qui se réduit en poudre, passe peu à peu par les fentes & les creux du tronc, dont il parvient à environner toute la base, où, mêlé avec la pourriture des *joncs*, des *mousses* & des *champignons*, il forme une sorte de terre nouvelle, de la hauteur de trois ou quatre pouces, en forme de croûte spongieuse un peu humide, & qui est ce qu'il y a de plus propre à faciliter la végétation de la semence des champignons qui est enduite d'une mucosité naturelle. Cette croûte donc, formée par le bois carié dans les lieux où l'ombre regne, est la matrice naturelle du *Carpobolus.*

Il y en a qui prétendent avoir vû ces Champignons (hors de la Marche) dans du bois pourri, mou & carié, répandus sur les branches des arbres, dans des lieux naturellement bourbeux. D'autres l'ont trouvé dans des endroits couverts de mousse & arrosés par des eaux saillantes ; & quelques uns, dans des monceaux de bois carié autour des

des racines des arbres. C'eſt preſque le plus petit de tous les champignons; mais il ſe ſoutient longtems, il a de la peine à périr ou à quitter ſa place naturelle; & cela n'arrive que lorſqu'il eſt accablé tout à coup & enſéveli par quelque maſſe plus conſidérable de pouſſiere de bois ſeche, ou qu'il vient à être entraîné par l'abondance & l'impétuoſité de l'eau: ce qui a quelquefois lieu vers la fin de l'automne.

Or l'écorce de ce ſol compoſé de terre & de bois pourri, qui ſe forme tous les ans autour des troncs des arbres cariés, s'affaiſſant & abandonnée à elle-même, reçoit & conſerve, dans ſa ſubſtance poreuſe, un peu humide, & où il entre du mucilage de champignon, les ſemences du *Carpobolus*, enveloppées dans leur propre glu, qui enſuite s'y développent & viennent à éclorre. De là vient qu'on eſt aſſuré de retrouver pendant quelques années la même eſpece dans le même endroit.

Vers le tems où le *Carpobolus* a coûtume d'être dans ſa plus grande vigueur, il ſe diſpoſe à faire éclater & à jetter autour de lui les globules ſéminaux, ſes véſicules mûres étant déterminées à cette éjaculation par un mouvement ſubit de conſtriction de ſa baſe. Je crois devoir remarquer que cette diſſémination arrive le plus ſouvent depuis le milieu du mois d'Octobre juſqu'en Décembre. Car, dès que le grand froid ſurvient, tout roidit; & ſi le temps eſt enſuite tiede, ces champignons ſe fondent aiſément en une ſorte de liqueur pourrie.

Le *Carpobolus*, avant que d'être développé, ſe préſente ſous la forme de petits grains, tantôt ſeul, tantôt par pelotons; il forme quelquefois comme de petits gazons, plus ou moins condenſés, tels qu'on les voit dans la Planche III. Fig. 1. & dans la Planche IV. Fig. 1. 2. Parmi ces grains ſont répandus d'autres *Carpôboles* un peu plus grands, & qui ſe développent d'avantage dans des mottes de pouſſiere imprégnées de la glu des champignons; leurs écorces, ou *Volvæ calycinæ*, étant ouvertes, l'intérieur obſervé au Microſcope réjouit la vue, la plûpart reſſemblant à une petite roſe ou à une petite

 étoile

étoile dorée, (Planche III. Fig. 1. *b. b.* & Fig. 2. *d. d.*) elles ſont déployées & affermies; leur bord a cinq, ſix à ſept découpures égales, le centre eſt convexe, mais dans la ſuite il y en a pluſieurs où il devient concave.

Le centre, ou le diſque du *Carpobolus*, quand il eſt parfaitement développé & dans toute ſa largeur, paroit non ſeulement avancé, ou arrondi, (Planche III. Fig. 3. *o. p.* & ſous les lettres *h. i.*) mais, dans quelques uns qui ſe trouvent répandus parmi les autres, la cavité du diſque eſt un peu obſcure, (Pl. III. Fig. 2. *d. d.*) & ſans globule. Quant aux petits grains dont nous avons déjà fait mention, & qui ſont comme des points dorés, ſemés entre les petites roſes, en ſe développant leur forme ſubit des variations continuelles, & on les voit changer ainſi d'une maniere imperceptible. Pour l'ordinaire ils ſont ſphériques & oblongs, (Pl. III. Fig. 3. *m.*) ou bien plus ovales ou conoïdes; les uns ſont plus tardifs & les autres plus précoces; & pendant l'accroiſſement, ces grains dorés, vûs par une loupe, offrent une pointe dont la couleur eſt beaucoup moins foncée, ou même blanche comme de la neige, le reſte de la ſurface étant comme humecté de roſée & gras (Planche III. Fig. 2. *c. f.*). Toutes ces différences ne paroiſſent indiquer que celles de l'âge des *Carpoboles*.

Le *Carpobolus* recueilli dans le territoire de Berlin, que nous avons repréſenté Planche III, differe un peu en grandeur de celui qui croît en Italie, & dont *Micheli* a donné la Figure, que nous avons placée Planche IV. Fig. 1. 2. Le nôtre, qui eſt pareillement tout doré, ſe termine, comme il a déjà été dit, en une pointe d'une couleur un peu plus claire, & finalement en une tache blanche qui s'éleve imperceptiblement. Les petits corps granulés, que nous avons déjà ſouvent indiqués & décrits, & où le *Carpobolus* eſt contenu, ſe développent en forme de calyce, ou dans quelques uns, tantôt en forme d'entonnoir, (Planche III. Fig. 3. *o. p.*), tantôt en forme de cloches; les corps de cette derniere forme ſont un peu plus courts, obtus, avec un fond dilaté, ou moins reſſerré que dans les précédens (Planche III.

Fig.

Fig. 2. *e.* & lett. *h. i. k. l.*). Ils ſont tous membraneux, creux & droits. Les intégumens corticaux extérieurs de ce champignon, ou, ce qui revient au même, ſon enveloppe (*Volva*), conſiſtent en une double membrane (Planche IV. lett. D. E. F. G.) collée enſemble par une mucoſité déliée & tranſparente qui eſt répandue entre deux.

Dans le diſque creux de chaque corpuſcule en forme de calyce, ſe trouve attaché le fruit rond, véſiculaire, d'un blanc d'abord de neige, enſuite terni, qui tient à un petit filet très court, (Planche III. Fig. 1. *b.* Fig. 2. *f.* & lett. *g. h* Planche IV. Lett. A. G. H. L.) tout garnis de ſemences ſemblables à de la pouſſiere très menue (Planche IV. lett. I.). Le fonds de la cavité du calyce contient une liqueur qui s'exhale peu à peu, dans laquelle au commencement la véſicule qui porte la ſemence eſt tout à fait plongée, mais enſuite, quand l'intégument vient à s'entr'ouvrir, elle s'éleve un peu davantage: ce qui procede d'une plus grande conſtriction du fond, de façon que les globules ſortent plus d'à moitié hors de la cavité du diſque au deſſus de l'enveloppe, (Planche III. Fig. 2. *e.* lett. *l. k.* Fig. 3. *n. n.*) & dans la Planche IV. le champignon de *Micheli* G. qui préſente les enveloppes du calyce conſidérablement augmentées en grandeur, lett. D. E. F. G., ſemble indiquer aſſez clairement une variété, qui differe de ce que nous avons exprimé par la Fig. 3. de la Planche III. On peut juger avec aſſez de certitude que le premier de ces champignons eſt venu dans un ſol plus compacte, & le ſecond dans une terre ſpongieuſe.

Mais il arrive dans notre *Carpobolus* une ſorte de diſſémination ſpécifique, qui, dans un certain moment de projection, n'eſt pas moins vive que ſubite; & cela, lorſque la liqueur contenue au dedans de l'enveloppe eſt conſumée. Cette exhalaiſon de la liqueur, ſuivant l'obſervation de notre célebre Profeſſeur *Sulzer*, ſe fait avec beaucoup de ſuccès en continuant, pendant un court eſpace de temps, de faire agir un ſouffle tiede ſur le champignon. Alors la baſe de l'enveloppe en forme de calyce ſe reſſerre, & la véſicule ſéminale ronde, parfaite & mûre, ſe détachant du centre du fond par la rupture du filet très délié

 qui

qui lui servoit auparavant de lien, darde comme d'un seul coup la semence en l'air avec la plus grande vîtesse, à peu près comme les boulets partent des canons.

Il ne paroit pas qu'on puisse conjecturer d'autre cause de ce phénomene que la raréfaction fort expansive de la liqueur qui, après l'exhalation, reste encore au fond de l'enveloppe & que la chaleur de l'air change à la fin en vapeurs élastiques, dont le mouvement produit l'irritation de la membrane intérieure, suivie de sa contraction: de là la violente & subite explosion du globule placé au dessus, qui bouchoit auparavant les bords de la cavité. M. *Forskoehl*, cité dans les *Spec. Plant. Linn.* p. 2652, compare la projection éjaculatoire du globule, qui se fait hors de l'enveloppe du *Carpobolus*, à la maniere dont sautent les petits vers qui sont dans le fromage.

Le premier Botaniste qui a examiné ce phénomene & en a rendu compte, est *Micheli*, de la pénétration duquel nous avons déjà fait l'éloge. Le mouvement éjaculatoire du globule séminal de ce champignon l'a engagé à lui donner le nom de Carpobolus; & voici ce qu'il en dit, avec autant de vérité que de précision, dans ses *Nov. Plant. Gen.* pag. 221: „Etant occupé à parcourir les plantes de ce genre, „j'ai renfermé autrefois plusieurs petits morceaux de bois desséché, „chargés de *Carpoboles*, (comme dans la Fig. 1. de la Planche IV,) dans „un coffret de bois, qui avoit une aune de longueur, & une demi-aune de largeur & de hauteur; l'ayant placé dans ma chambre, il s'y „fit pendant la nuit suivante à plusieurs reprises un bruit retentissant, „comme si on l'avoit frappé d'un coup de pied. Ensuite, le lendemain matin, j'ai trouvé des morceaux de cette matiere attachés de „tous côtés au couvercle & aux parois du coffret."

L'illustre *Haller* n'a point vu le moment de la projection élastique de ce champignon; & je n'ai jamais pû saisir non plus ce moment singulier de l'éjaculation, mais j'ai aussi mis quelques croûtes de terre de champignons, presque toutes couvertes de Carpoboles, dans une petite

tite cassette de bois, garnie de papier, que j'ai placée, au mois de Novembre, dans un poële tiede: après quoi, la nuit suivante, & encore pendant celle qui l'a suivie, j'ai entendu un son foible, à peu près semblable à celui que rend un papier épais lorsqu'on le déchire; & le matin, les traces des globules se sont manifestées sur le papier.

Le *Carpobolus* de *Micheli* a beaucoup de rapport avec le *Geastrum* du même. De l'aveu des Botanistes modernes, ce champignon entre dans le genre naturel du *Lycoperdon*, & y figure avec le *Lycoperdon* vulgaire de tous les Auteurs, le *Lycoperdoïde*, le *Lycoperdastre*, le *Tuber*, & le *Geastrum*. Mais il constitue une espece singuliere de ce genre, tout à fait distincte des autres, & dont l'affinité avec le *Geastrum* consiste dans sa double enveloppe, radiée par les pointes du limbe, ouverte, & un peu renversée. Elle ressemble aussi au *Peziza*, par sa substance membraneuse, par sa figure tournée tantôt en cloche, tantôt en entonnoir, & par la concavité du calyce, qui est plus applanie dans le *Geastrum*.

Ainsi le *Carpobolus* de *Micheli* est une espece naturelle du *Lycoperdon*, qui consiste dans une enveloppe concave en forme de calyce, dont le bord ouvert est radié, faite en forme de cloche ou d'entonnoir, d'abord fermée, & contenant une vésicule toute pleine de semence déliée, comme la plus menue poussiere, qu'elle lance ensuite en l'air, la faisant partir du centre avec une extreme rapidité lorsqu'elle vient à s'ouvrir. Le corps pulvérulent du globule est revêtu d'une membrane très fine, tel qu'on le voit Planche IV. lett. A. G. H. I.

Quant aux noms de ce champignon, tant ceux que les Auteurs ont déjà connus, que les nouveaux, je puis ajouter ici les suivans; [& nous les laisserons avec leurs définitions en Latin.]

LYCOPERDON (Carpobolus) *volva calyciformi, limbo radiato colorato patente: vesicula seminali projectili.*

Lycoperdon corticibus revolutis, stellatis, globulo projectili. Haller. *Hist. stirp. Helvet.* p. 1654. n. 2175.

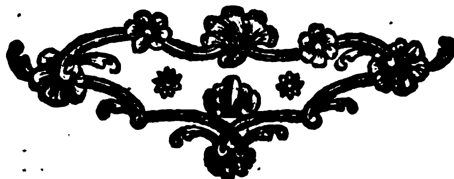
Lycoperdon radiatum (7.) disco hemisphærico, radio colorato. Linn. *Spec. Plant.* 2d. 2. 2652.

Carpobolus aureus, volva alba, fructu obscuro, seminibus subrotundis albicantibus. Michel. *N. Plant. Gen.* p. 221. Tab. 201. n. 2.

Carpobolus *segmentis longioribus.* Hill. *Hist.* pag. 54.

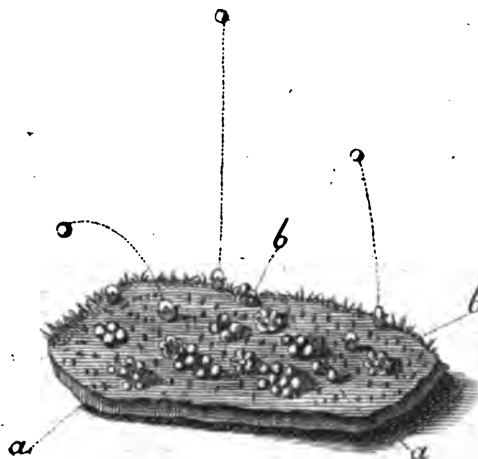
En Allemand: *der Kugelwerfer.*

Cette description succincte pourra suffire pour faire connoître cette plante extrèmement petite du genre des *Lycoperdon*, dont nous ignorons d'ailleurs entierement les autres qualités & l'usage dans l'œconomie de la Nature. Il y a plusieurs contrées de l'Allemagne où cette plante n'a pas encore été apperçue, tant elle échape aisément aux yeux des amateurs de la Botanique par son extreme petitesse.

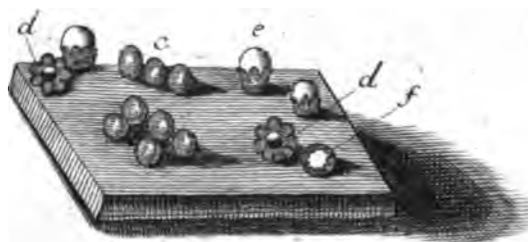


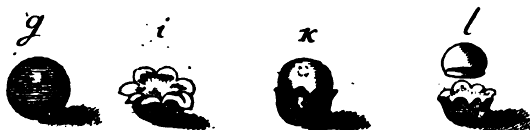
SUR

Fig. 1.



.2.





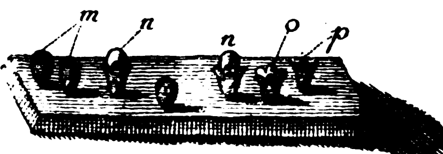
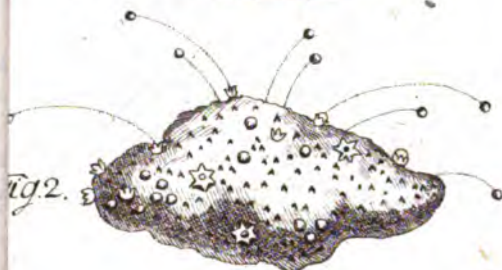
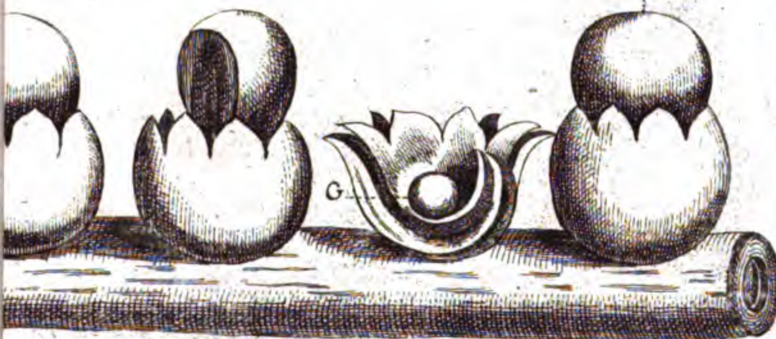



Fig.1.

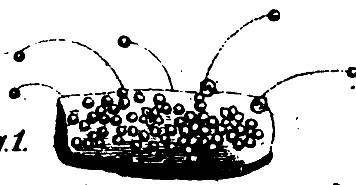

Fig.2.

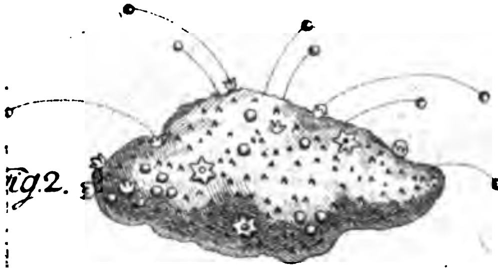

C
D
E
F


G

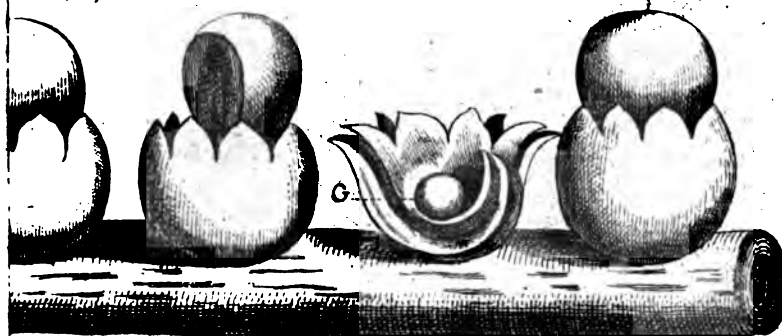

H


I


Fig. 1.


C
D
Fig. 2.


C
D
E
F


G


H


I

SUR QUELQUES

INSTRUMENS ACOUSTIQUES.

PAR MR. LAMBERT.

§. 1.

Il y a un ſiecle que le Chevalier *Morland* propoſa & exécuta l'idée qu'il s'étoit formée de l'Inſtrument acouſtique qu'on nomme *Porte-voix*. Ce qu'il y avoit de nouveau dans cette idée ne conſiſtoit pas en ce que le ſon pouvoit par cet Inſtrument être entendu à une diſtance conſidérable. Les trompettes, les cors de chaſſe & d'autres Inſtrumens ſemblables, qui ſont de beaucoup plus ancienne invention, n'en laiſſoient point douter. Mais la queſtion étoit, ſi les ſons articulés, les ſyllabes, les parolès pouvoient par quelque inſtrument ſemblable être non ſeulement entendues, mais compriſes à une auſſi grande diſtance. C'eſt ce que le Chevalier *Morland* eſſaya en 1670, & le ſuccès répondit à ſon attente. Cette Invention ſe répandit en peu de tems de telle ſorte qu'en moins d'une année on vit des Porte-voix dans tous les pays cultivés, & les Navigateurs ſurtout ne tarderent pas d'en faire uſage ſur mer. Le Chevalier *Morland* publia de ſon côté une deſcription des différentes eſpeces qu'il en avoit fait faire, qui ſe répandit auſſi vite que l'Inſtrument. On vit que ces Porte-voix étoient une eſpece de trompette ſuffiſamment aggrandie. Sur la fin de cette deſcription, le Chevalier *Morland* invite les Géometres & les Phyſiciens à donner à cet inſtrument la figure & en général toute la perfection dont il pouvoit être ſuſceptible.

§. 2. Le premier qui en 1672 prétendit avoir rafiné là-deſſus, c'eſt un Mécanicien nommé *Caſſegrain*, connu ſurtout par des Inſtrumens d'Optique. Il donna à ſes Porte-voix une figure hyperbolique

lique, & prétendit avoir par là mieux réussi que le Chevalier *Morland*, en ce qu'un Instrument de sa façon, qui n'avoit que 5 pieds de longueur, portoit la voix tout aussi loin qu'un autre de 7 pieds fait de la façon de Morland. En Allemagne, J. Chr. *Sturm*, Professeur à Altorf, imita Cassegrain pour ce qui regarde les dimensions, mais il ne laissa pas de faire des essais avec des instrumens d'une figure plus ou moins entortillée.

§. 3. Les choses en resterent là jusqu'en 1719, où M. *Hase*, Professeur à Wittemberg, publia une Dissertation où il tâcha de perfectionner ces Instrumens avec plus de succès. Des théoremes connus depuis longtems dans la Catoptrique lui firent voir que, bien loin de donner aux Porte-voix la figure de l'hyperbole entre l'asymtote, comme *Cassegrain* l'avoit prétendu, la figure elliptique & la parabolique y étoient infiniment plus propres. Comme les deux especes de Porte-voix qu'il proposa conformément à ces théoremes, se trouvent dans presque toutes les Institutions élémentaires de Physique, je ne m'arrêterai pas à en faire ici une description. D'ailleurs, il n'est pas difficile de se les figurer, pour peu qu'on se rappelle ce qu'on a depuis longtems démontré à l'égard des miroirs paraboliques & elliptiques. Aussi l'idée de M. *Hase* consiste en ce qu'il regarde les Porte-voix comme une espece de miroir, qui réfléchit le son. Et à cet égard la théorie de ces miroirs étoit un travail tout fait, qu'il n'avoit qu'à appliquer.

§. 4. De cette maniere, c'est une espece de phénomene du monde intellectuel que l'histoire des Porte-voix nous offre. Ces Instrumens auroient pu être inventés depuis qu'on a des trompettes ou d'autres instrumens semblables, c'est à dire, depuis un tems immémorial. Il n'y manquoit que la simple idée d'essayer de parler par une trompette, en tout cas suffisamment aggrandie. Cette idée, comme un grand nombre d'autres semblables, étoit réservée au siecle précédent, siecle animé par une ardeur de faire de nouvelles tentatives, qui depuis s'est fort rallentie. L'idée de M. *Hase* auroit pareillement pu être de plus ancienne date, parce que les miroirs paraboliques & ellipti-

liptiques étoient connus longtems auparavant. Bien souvent, quand il s'agissoit de lignes courbes, on ne pensoit que trop aisément aux Sections Coniques, & déjà par cette raison le Chevalier *Morland* auroit pu s'en aviser. *Cassegrain* emploïa l'hyperbole sans le savoir. *Sturm* le découvrit & en resta-là.

§. 5. M. *Hase* s'en tint pareillement à ce qu'il savoit des miroirs. Et quoique l'application qu'il en fit aux Porte-voix fût très sensée & ce qu'il y avoit jusqu'alors de mieux imaginé sur cette matiere, il s'en faut de beaucoup que ce soit-là tout ce qu'il y avoit à désirer. Car, outre que des figures paraboliques & elliptiques s'exécutent très difficilement, les miroirs qui ont cette figure ne sont pas si exemts de tous les défauts, qu'on le croit communément. Qu'un miroir parabolique réunisse dans son foïer les raïons qui y tombent, cela n'est vrai en toute rigueur qu'à l'égard des raïons paralleles à l'axe. Pour tous les autres raïons cette regle souffre des aberrations d'autant plus considérables, que les raïons sont plus obliques & que le miroir a plus de courbure. Il en est de même à l'égard des sons, qui dans les Porte-voix, tout paraboliques qu'ils peuvent être, ne partent pas d'un seul point, & s'y réfléchissent sous des angles de toute grandeur, de sorte qu'il s'en faut de beaucoup que la propagation s'en fasse dans une direction entierement parallele à l'axe. Ensuite, le son peut se renforcer dans les Porte-voix comme dans d'autres instrumens de Musique, & cela produit des réflexions toutes différentes de celles qui sont analogues à la réflexion de la lumiere. Ainsi M. *Hase*, quelque bonne que puisse être son invention, semble avoir laissé la véritable théorie des Porte-voix tout autant en arriere qu'il l'avoit trouvée en 1719, lorsqu'il publia sa Dissertation. Je n'ai pas vu que cette matiere ait été retouchée depuis. Les Auteurs plus modernes que j'ai consultés, en parlent comme d'une chose fort embrouillée & fort difficile. En effet, on trouvera qu'ils ont raison pour peu qu'on fasse attention à cette infinité de réflexions que le son souffre dans ces Instrumens, & qui toutes doivent entrer dans le calcul. Cette infinité effraie, & pro-

produit une eſpece d'évanouiſſement momentané, ou de vertige, comme ſi on voioit devant ſoi un abyme. De là vient qu'on ſe déſiſte du projet comme ſi on le laiſſoit tomber des mains. Mais ſi, après tout, cet abyme n'étoit qu'imaginaire? Du moins il convient de ne point perdre courage avant que d'avoir bien vu ce qui en eſt. Des cas aſſez ſemblables, que j'ai traités dans ma *Photométrie*, m'ont fait voir que ces ſortes de fraïeurs peuvent très bien être paniques, & dans l'analyſe l'infini n'eſt plus un article qui doive embarraſſer. Il s'agiſſoit d'eſſaïer ſans ſe rebuter au premier aſpect. J'ai fait cet eſſai, & on va voir juſqu'où il a réuſſi. Il s'agit principalement de la théorie des Porte-voix, mais ſi, chemin faiſant, je rencontre des choſes qui puiſſent avoir d'autres uſages, je ne les paſſerai pas ſous ſilence. Le païs que je vais parcourir eſt encore peu connu, & c'eſt de ces païs-là qu'on eſt avide de tout ſavoir. Mais, pour être digne de foi, je vais indiquer d'où je ſuis parti, & quel chemin j'ai pris. Entrons donc en matiere.

§. 6. On ſait que la propagation du ſon ſe fait en ligne droite, à moins qu'il ne paſſe d'un air plus denſe dans un autre moins denſe ou réciproquement. Car, dans ce cas, il ſe fait une eſpece de réfraction, qui probablement ſe fait auſſi lorſque le ſon paſſe p. ex. par un mur de figure priſmatique. Mais ici je puis faire abſtraction de tout cela.

§. 7. Enſuite, on ſait que le ſon ſe réfléchit. C'eſt ce qu'on ſait depuis qu'on a ceſſé de regarder l'*Echo* comme une eſpece de Divinité, ou de Fantôme, qui s'amuſe à répéter ce qu'on dit, ou du moins les dernieres ſyllabes.

§. 8. Enfin, on ſait que tout corps ſonore répand le ſon de tout côté, & que c'eſt là la raiſon pourquoi le ſon s'affoiblit à meſure que la diſtance augmente. On peut établir que cet affoibliſſement croit en raiſon du quarré de la diſtance, tout comme la lumiere.

§. 9.

§. 9. Quant à la réflexion du ſon, on ſait encore qu'il en eſt comme de toutes les autres réflexions, c'eſt à dire, que l'angle de réflexion eſt égal à l'angle d'incidence. C'eſt ſur cela que ſe fonde le moïen de conſtruire & de créer, pour ainſi dire, des Echos artificiels.

§. 10. Tout cela eſt aſſez connu. Mais, dans la combinaiſon des deux derniers Phénomenes, il y a quelque choſe qui peut embarraſſer. Les corps ſonores ne nous mettent gueres en état de produire un ſon, qui ne ſoit dirigé que vers une certaine contrée. La queſtion eſt donc ſi cela eſt impoſſible en ſoi-même. *Newton* le prétend, & la théorie du ſon, qu'il a le premier éclaircie, ſemble l'inſinuer. Il rapporte même une Expérience pour conſtater la choſe, & pour prouver en même tems, que le ſon & la lumiere n'ont rien de commun pour ce qui regarde le mécaniſme de leur propagation. Cette expérience ne parut pas déciſive à M. *Euler*. On ſait, dit *Newton*, que les raïons du ſoleil paſſent en droite ligne par un trou ſans que derriere le trou ils ſe répandent de tout côté. Si donc la lumiere ſe propageoit comme le ſon, il faudroit que le ſon paſſât également en droite ligne, & qu'il formât un cone ſonore, comme la lumiere forme un cone lumineux. De la ſorte on n'entendroit rien dès qu'on ſe trouveroit à côté de ce cone ſonore. Or on entend de tout côté derriere le trou, par lequel le ſon paſſe; donc etc. Voilà l'argument de *Newton*. M. *Euler* y répond, que le ſon non ſeulement paſſe par le trou, mais encore par la planche, la porte, ou le mur, mais qu'il n'en eſt pas de même de la lumiere, qui ne paſſe que par les corps tranſparens. Je n'ai pas fait l'expérience propoſée par *Newton*, mais je ſais, par d'autres obſervations analogues, ce que cette expérience peut faire voir; c'eſt que l'oreille placée dans le cone ſonore dont je viens de parler, entend plus clairement & plus fortement, que lorſqu'il eſt de côté.

§. 11. L'exemple de l'Echo me paroit à cet égard le plus concluant. L'écho ſe produit lorſque le ſon eſt réfléchi d'un mur ou d'un rocher, qui ſe trouve à une diſtance ſuffiſante. Il n'eſt pas beſoin que

ce mur ou ce rocher ait beaucoup de surface, & pour la question dont il s'agit, il est bon qu'il en ait le moins qu'il soit possible. Dans ces sortes de cas j'ai toujours observé, que l'écho bien loin de se faire entendre tout alentour, ne se fait entendre que là où suivant les regles de la réflexion, le son réflêchi passe. Soit AB un mur semblable, C le point d'où le son ou la voix part, ACB sera le cone ou la pyramide sonore, qui par la réflexion se replie vers *ab*. En *ab* on entend la voix ou le son comme partant du point *c*. J'ai observé que la largeur *ab* est assez petite; & si le mur ou le rocher AB est recourbé en forme de miroir, il se peut que *ab* est moins large que AB, & alors l'écho renforce le son, tout comme un miroir concave renforce les raïons en les concentrant. Tout cela n'auroit jamais lieu, si le son en tombant en AB se répandoit de tout côté. Cela n'arrive que lorsque AB est un objet sonore, qui par le mouvement ondulatoire de l'air commence à faire des vibrations propres à produire un son. On voit donc par là, que moïennant la réflexion on peut intercepter un cone, ou une pyramide sonore, & donner au son une direction linéaire, comme on peut la donner à la lumiere. Ajoutons encore que si le son en AB se répandoit de tout côté, on l'entendroit en *ab* comme extrèmement affoibli. Car AB seroit alors comme un miroir sphérique convexe, qui, pour répandre la lumiere incidente de tout côté, ne produit qu'une lumiere réfléchie extrèmement foible. Mais il y a des Echos qui renforcent le son. Ainsi la réflexion du son se fait comme celle de la lumiere.

Planche V. Fig. 1.

§. 12. Il convenoit d'insister sur cette assertion parce que *Newton* paroit être d'un sentiment contraire, & l'autorité de *Newton* équivaut à un argument assez fort. La théorie du son, dont il a donné la première ébauche, semble lui avoir fait concevoir la chose de la façon qu'il a fait. En effet, une particule d'air étant agitée dans une direction quelconque, il semble qu'elle met en mouvement toutes les particules contigues, & de cette maniere le son devroit se répandre de tout côté. C'est aussi ce qu'on observe dans les corps sonores, qui produisent un

son.

son. Mais l'expérience de l'Echo, que je viens de rapporter, fait voir que tout cela doit être conçu d'une autre façon. Ce sera donc le corps sonore qui communique à l'air un mouvement suivant toutes les directions. Mais, en interceptant un cone sonore ACB par un plan AB, ce cone se replie suivant sa direction linéaire, & si les particules d'air D, qui lui sont contiguës, participent à l'agitation de l'air compris dans le cone replié *a*AB*b*, le mouvement que ces particules D reçoivent, doit être extrèmement foible, puisque l'écho ne se fait entendre que lorsque l'oreille se trouve placée dans le cone replié.

§. 13. Passons maintenant à voir comment le son se renforce dans les trompettes & autres instrumens semblables. La réflexion du son qui s'y fait, y contribue sans contredit, & même beaucoup. Mais ce n'est pas là la seule cause. On sait que la trompette ne rend pas tous les sons, mais simplement ceux qui suivent l'ordre des nombres naturels 1, 2, 3 - - - - 16, de sorte que dans l'intervalle de quatre octaves la trompette ne donne que 16 sons, qui sont ceux qu'il faut entonner pourque la trompette y réponde. On peut à la vérité crier dans une trompette en donnant à la voix un ton quelconque, mais alors c'est cette voix qu'on entend & non pas le son de la trompette. La trompette renforcera cette voix par la simple réflexion, mais de beaucoup moins que si elle sonnoit elle-même. Ainsi il est clair que le mouvement trémulatoire qu'on peut donner à la trompette, est une des principales causes qui en renforcent le son. Voïons comment.

§. 14. En sonnant d'une trompette, ce n'est d'abord que l'air qui y est agité. Mais, si les oscillations des particules d'air sont isochrones à celles dont la trompette est susceptible, alors la trompette commence à avoir un mouvement oscillatoire; & quand on continue de sonner, il se fait dans ce mouvement une espece d'accumulation, en ce que les particules élastiques du métal reçoivent de nouvelles secousses avant qu'elles perdent l'effet des secousses précédentes. C'est par là que l'histoire de ces personnes, qui à force de crier dans un verre le font

 cre-

crever, devient plus ou moins explicable. On explique encore par là, comment cela peut arriver à une cloche, lorsqu'on la sonne trop longtems & trop fortement.

§. 15. La réflexion du son dans la trompette contribue assez considérablement à augmenter cette accumulation du mouvement oscillatoire des particules du métal. Mais, comme dans chaque réflexion les particules de l'air perdent une partie de leur force, c'est par là qu'il faut expliquer le paradoxe que ce renforcement du son présente; car il semble que l'effet est plus grand que la cause qui le produit. Mais, comme cela ne sauroit être, il est clair que le son dans ces cas doit être plus foible au commencement & vers la fin, tandis qu'il est plus fort vers le milieu de l'intervalle du tems qu'il dure. La somme totale sera égale à la cause qui la produit, & bien souvent elle est moindre, parce que, quelqu'élastique que puisse être le métal de la trompette, il se perd toujours plus ou moins de mouvement dans ses particules, de sorte que le son est moins fort de ce qu'il pourroit être.

§. 16. Ce mouvement oscillatoire des particules du métal contribue de son côté à répandre le son de la trompette suivant toutes les directions, quoique du reste le son le plus fort suive principalement la direction de la trompette elle-même ou de son axe. Mais, quand même ces sortes d'instrumens pourroient être faits en sorte qu'ils répandissent le son également de tout côté, ils n'en seroient que d'autant plus conformes à leur but. Il n'en est pas de même des Porte-voix. On veut que ces Instrumens ne portent le son que vers une seule contrée, & tout le son qu'ils produisent suivant une autre direction quelconque est reputé perdu, d'autant qu'il déroge à la force du son qu'on veut porter tout entier vers l'endroit où on veut se faire entendre. Ainsi, lorsqu'il s'agit de Porte-voix, il faut faire en grande partie abstraction du mouvement oscillatoire, à moins qu'on ne puisse démontrer que, par le renforcement du son qui en résulte, on gagne plus qu'on ne perd. Cette démonstration sera assez difficile, si elle n'est pas impossible. Car on ne se sert pas des Porte-voix pour produire simplement

ment un son fort, mais un son articulé, des syllabes, des paroles. Or, comme l'accumulation du mouvement oscillatoire ne se fait pas dans un instant, on voit qu'il faudroit parler avec une lenteur extreme. Mais, en parlant lentement, ce ne sont que les voïelles qu'on traine, puisque les consonnes ne sont que des modifications instantanées des voïelles. Ainsi le Porte-voix ne feroit entendre que les voïelles, & d'une façon si sonore, qu'il faudroit deviner les consonnes, ce qui n'est pas toujours facile. J'en infere que pour parler distinctement par un Porte-voix, ce mouvement oscillatoire doit être évité. Cela est faisable en fabriquant ces instrumens de matieres peu élastiques; ou, si on les fabrique de matieres élastiques, il faut parler d'un ton que l'instrument ne rend pas, & qui par conséquent ne le fait pas resonner. Du reste, dans l'un & l'autre cas, la théorie des Porte-voix, & surtout de leur figure, revient à la théorie de cette infinité de réflexions du son qui s'y forment. Et si cette infinité ressemble à un abyme, je vais du moins le sonder. Peut-être ne sera-t-il pas si immense qu'il paroit.

§. 17. Ce n'est pas par la recherche de la figure la plus convenable des Porte-voix, qu'il faut commencer. Ce probleme, quoique le premier qui ait été proposé sur cette matiere par le Chevalier *Morland*, est un des derniers qu'il faudra résoudre. La bonne Logique veut qu'avant que d'en venir à l'analyse que ces sortes de problemes demandent, on commence par une espece de synthese, & cette synthese elle-même commence par les cas les plus simples. Par là on apprend à voir clair pour ce qui arrivera dans des cas plus composés. Commençons donc par considérer des Porte-voix de figures simplement cylindriques, & passons ensuite aux figures coniques. Les figures prismatiques & pyramidales n'entrent pas ici en considération, quoique du reste elles pourroient être traitées tout au moins aussi facilement que les deux figures que je vais examiner.

§. 18. Soit donc un cylindre ABED, son axe CF. Dans cet axe soit un point sonore C. Ce point répandra le son de tout cô- Fig. 2.

té,

té, & il y aura un cone sonore BCE, qui aura le bout du cylindre pour base, & le son qui s'y propage sort du cylindre en lignes droites, c'est à dire, sans être réflêchi. Soit donc une autre direction quelconque CM. Le son qui suit cette direction, sera réflêchi en M, N, O, & de O il sortira du cylindre suivant la direction OF. Et comme CM, en tournant autour de l'axe CF, forme la surface d'un cone, que nous pourrons nommer surface conique sonore, on voit que OF forme une surface toute semblable, & le son propagé suivant la surface du cone CM sort du cylindre comme s'il avoit été excité dans le point F. Mais, à mesure que l'angle MCF varie, la distance CF variera également, de même que les angles OFC. Ainsi le son sortant du cylindre se répand de tout côté derriere le plan qui en BE coupe le cylindre à angles droits, comme si le point sonore avoit été placé dans ce point d'intersection. Toute la différence que le cylindre peut produire, c'est que le son dans chaque réflexion change de force, & qu'en sortant du cylindre il ne se répand pas uniformément. On voit donc que la figure cylindrique, & partant aussi toutes les figures prismatiques, doivent être rejettées. C'est aussi la raison pourquoi je ne m'arrêterai pas à considérer les directions du son qui ne passent pas par l'axe. Voïons donc ce qui en est des figures coniques.

Fig. 3. §. 19. Soit BCA un cone, CN son axe. Que le son suivant la direction DF coupe l'axe en E, & qu'étant successivement réflêchi en F, H, il sorte du cone suivant la direction HI. Or, l'angle de réflexion étant toujours égal à l'angle d'incidence, nous aurons

$$CFD = BFH$$
$$FHC = IHA.$$

Mais, par les élémens de Géometrie, il est

$$CFD = FDA - ACB$$
$$CHF = HFB - ACB.$$

Soit

Soit donc l'angle du cone ACB $= \phi$, l'angle FDA $= \omega$, il sera

$$CFD = BFH = \omega - \phi$$
$$CHF = IHA = \omega - 2\phi,$$

d'où l'on voit que, dans chaque réflexion suivante, l'angle d'incidence diminue d'une quantité ϕ, qui pour un même cone est constant, parce que ϕ est l'angle du cone BCA.

§. 20. Ce théoreme est d'une fécondité admirable & nous aidera à voir le fond de l'abyme, qui d'abord sembloit causer un vertige. Introduisons pour plus de briéveté quelques dénominations. Il nous faut ici un terme qui à l'égard du son désigne à peu près ce que le terme *raïon* signifie à l'égard de la lumiere. Si le mouvement linéaire du son étoit aussi visible que celui de la lumiere, il y auroit un terme introduit depuis longtems, & la ressemblance auroit probablement décidé pour le terme *raïon* En françois on donne ce nom à des choses infiniment moins ressemblantes. Au moïen d'un peu d'habitude le terme de *raïon sonore*, ou *raïon acoustique*, ou *raïon phonique*, n'aura rien de choquant. J'emploierai cependant aussi le terme de *ligne phonique*, comme je me suis déjà servi du terme de *cone sonore*, qui équivaut à cet égard au terme de *cone phonique*.

§. 21. L'angle du cone ϕ étant donné, de même que le premier angle d'incidence ω, on trouve très facilement tous les autres angles d'incidence suivans & le nombre de réflexions que le raïon phonique souffre avant que de sortir du cone, ou pour mieux dire, avant que de n'être plus réflêchi. Car les angles d'incidence seront

$$\begin{array}{l}\omega\\ \omega - \phi\\ \omega - 2\phi\\ \omega - 3\phi\\ \quad\text{etc.}\\ \omega - n\phi.\end{array}$$

 Cette

Cette ſuite finit toujours là où les termes commenceroient à être négatifs. Ainſi, pour trouver le nombre des réflexions que le raïon phonique ſouffre avant que de ne plus être réflêchi, on n'a qu'à diviſer ω par Φ, en ne prenant pour quotiens que des nombres entiers. Le quotient donnera le nombre des réflexions, & le réſidu donnera le dernier angle d'incidence, qui aura lieu en ſuppoſant le cone d'une longueur indéfinie.

§. 22. Ce dernier angle d'incidence étant toujours plus petit que l'angle du cone Φ, on voit qu'aucun raïon phonique ne ſort du cone prolongé à l'infini. Soit FHC le dernier angle d'incidence, l'angle de réflexion IHA lui eſt égal, & par conſéquent plus petit que l'angle du cone ACB. Ainſi le raïon phonique HI ne pouvant plus couper le côté CB, il ne ſortira plus de ce que je nommerai l'enceinte du cone.

§. 23. Suppoſons réciproquement qu'un raïon phonique IH entre dans le cone. Soit le premier angle d'incidence en H $= \psi$, les angles ſuivans ſeront

$$\psi + \Phi$$
$$\psi + 2\Phi$$
$$\psi + 3\Phi$$
$$\psi + 4\Phi$$
etc.

Ces angles vont donc en augmentant en progreſſion arithmétique jusqu'à ce qu'ils commencent à ſurpaſſer l'angle droit; alors le raïon phonique commence à retourner, & il ceſſe de ſubir des réflexions ultérieures là où l'angle $\psi + n\Phi$ iroit excéder la ſomme de deux angles droits. C'eſt à quoi il faut avoir égard lorſqu'il s'agit des inſtrumens propres à aider l'ouïe. La figure conique à moin qu'on ne la tronque n'y eſt gueres propre, parce que tout le ſon qui y entre, en ſort de nouveau, ſans qu'il parvienne juſqu'à la pointe C.

§. 24.

§. 24. On voit ſans peine qu'il en eſt de même à l'égard de la lumiere, ſi on fait du cone un miroir poli en dedans. Car, en plaçant une chandelle en K, la moitié de la lumiere qu'elle répand entre dans le cone, & en ſort de façon qu'elle reſte, du moins en grande partie, dans l'enceinte du cone prolongé. Il en eſt de même en tronquant le miroir conique près de C, & en y plaçant la chandelle. Par ce moïen on peut changer en cone lumineux la lumiere qu'une chandelle répand par tout un hémiſphere; & ce cone portera la clarté d'autant plus loin, que l'angle du cone ſera plus petit. Il convient encore que le cone ait une longueur ſuffiſante. C'eſt de quoi je parlerai d'abord. J'obſerve ſeulement ici que, quoiqu'un cylindre puiſſe être regardé comme un cone tronqué, dont l'angle eſt $= 0$, & par conſéquent le plus petit de tous, il ne laiſſe pas de produire un effet tout contraire, en ce qu'il répand par tout un hémiſphere, la lumiere, ou le ſon, qu'on lui préſente à réflêchir.

§. 25. Quant aux diſtances CD, CF, CH, elles ſe calculent aſſez facilement. Car il eſt

$$\sin(\omega - \phi) : CD = \sin\omega : CF$$
$$\sin(\omega - 2\phi) : CF = \sin(\omega - \phi) : CH,$$

& partant

$$CF = \frac{\sin\omega}{\sin(\omega - \phi)} \cdot CD$$

$$CH = \frac{\sin\omega}{\sin(\omega - 2\phi)} \cdot CD,$$

d'où il ſuit que la diſtance à laquelle ſe fait la n^{tieme} réflexion, eſt

$$= \frac{\sin\omega}{\sin(\omega - n\phi)} \cdot CD.$$

§. 26. Cette formule nous met en état de comparer la longueur du cone avec la disperſion du ſon, pour ce qui regarde les raïons phoniques qui paſſent par l'axe du cone. Suppoſons que

$$x = \frac{\int \omega}{\int (\omega - n\phi)} \cdot CD,$$

exprime la diſtance à laquelle un raïon phonique ſubit la derniere réflexion; on voit que cette diſtance peut devenir fort grande lorſque le dernier angle d'incidence $\omega - n\phi$ eſt très petit. Mais, comme on ne ſauroit donner au Porte-voix une longueur indéfinie, il eſt clair qu'il y aura toujours des raïons phoniques qui n'y ſubiſſent pas la derniere réflexion. Mais on peut toujours donner au cone une longueur telle, que tous les raïons ſubiſſent du moins la pénultieme réflexion. Car l'angle pénultieme tombe entre ϕ & 2ϕ, en ſorte qu'il ne ſauroit être plus petit que ϕ. Ainſi la longueur requiſe ſera

$$x = \frac{\sin \omega}{\sin \phi} \cdot CD.$$

§. 27. Suppoſons donc le cone tronqué en D, de ſorte que DK ſoit l'embouchure. On voit que l'angle FDA $= \omega$ aura le plus grand ſinus poſſible lorſqu'il eſt droit, & l'angle même ne ſauroit être plus grand que ADK $= 90° + \frac{1}{2}\phi$. Et comme entre $90 + \frac{1}{2}\phi$ & $90 - \frac{1}{2}\phi$ il tombe un multiple de ϕ, on fera ce multiple $= \omega$, & la longueur du cone ſera

$$x = \frac{\sin \omega}{\sin \phi} \cdot CD.$$

§. 28. Mais, comme l'angle du cone ne doit pas être fort grand, le ſinus de $90° + \frac{1}{2}\phi$ ne differe gueres du ſin ω. Ainſi, en faiſant

$$x = \frac{CD . \sin (90° + \frac{1}{2}\phi)}{\sin \phi} = \frac{CD}{2 \sin \frac{1}{2}\phi},$$

cette formule nous offre la conſtruction ſuivante. Qu'on prenne la lon-

longueur CL = CM telle, que la chorde LM ſoit = CD, & CL = CM ſera la longueur qu'il faudra donner au cone, pour que les raïons phoniques y ſouffrent du moins la pénultieme réflexion, & alors le ſon ne ſe répandra que par un cone dont l'angle eſt $= 2\Phi$.

§. 29. Par là on voit que cette longueur CL = CM dépend principalement de l'angle du cone. Car, quel que ſoit cet angle, l'embouchure DK doit toujours avoir une certaine grandeur. Elle ne ſauroit gueres être au-deſſous de $1\frac{1}{2}$ pouce, à moins qu'en y appliquant les levres on ne ſe trouve empêché de parler clairement & ſans difficulté. Enſuite, il ſeroit inutile de la faire plus grande parce, que cela aggrandiroit tout le reſte ſans néceſſité. Ainſi il faut regarder DK comme une quantité conſtante & donnée. Or il eſt

$$DK : CD = LM : CM$$

$$CD = LM$$

donc

$$CM = \frac{CD^2}{DK}.$$

Mais il eſt

$$DK = 2 . CD . \sin \tfrac{1}{2}\Phi$$

ou bien

$$CD = \tfrac{1}{2} DK . \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}\Phi$$

donc il ſera

$$CM = \tfrac{1}{4} DK . (\operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}\Phi)^2$$

ou bien

$$CM = \frac{DK}{4 . \sin \frac{1}{2}\Phi^2}$$

ou à très peu près

$$CM = \frac{DK}{\Phi\Phi}.$$

§. 30. Suppoſons p. ex. qu'on veuille donner à CM une longueur de 6 pieds ou 72 pouces, en faiſant DK $= 1\frac{1}{2}$ pouce. On aura

$$72 = \frac{3}{8 \,.\, \sin \frac{1}{2}\phi^2}$$

ce qui donne

$$\text{ſ}\,\tfrac{1}{2}\phi^2 = \tfrac{1}{192} \qquad \begin{array}{l} CD = \tfrac{3}{4}\sqrt{192} = 10{,}4 \text{ pouces.} \\ DA = 72 - 10{,}4 = 61{,}6 \text{ pouces.} \end{array}$$

$$2\,\text{ſ}\,\tfrac{1}{2}\phi^2 = \tfrac{1}{96} = 0{,}01042 = 1 - \text{coſ}\,\phi$$

$$\text{coſ}\,\phi = 0{,}98958$$

$$\phi = 8^\circ.17'' = LCM.$$

Et le ſon ſortant par le cone LCM ſe répandra par un cone dont l'angle eſt $= 2\phi = 16^\circ.17''$.

§. 31. Pour évaluer l'effet de ce cone, il faut remarquer que le même ſon qui eſt reſſerré dans ſon enceinte, eſt celui qui ſans Porte-voix ſe répandroit par tout un hémiſphere. Soit cet hémiſphere BAD, le cone FCE, de ſorte que l'angle FCA $=$ ACE $= \phi$. Or ce cone coupe de la ſurface de la ſphere un ſegment FAE, dont l'aire eſt à l'aire de l'hémiſphere comme le quarré de la corde FA au quarré de la corde AB. Faiſant donc

Fig. 4.

$$CA = 1$$

il ſera

$$AF = 2 \sin \tfrac{1}{2}\phi$$

$$AB = \sqrt{2}.$$

Donc le ſon eſt renforcé par le Porte-voix dans le rapport de $4(\sin \frac{1}{2}\phi)^2$ à $2 = 2(\sin \frac{1}{2}\phi)^2 : 1$. Et par conſéquent, dans l'exemple rapporté, comme $\frac{1}{96}$ à 1, ou comme 1 à 96.

§. 32. Suppoſons maintenant qu'un homme puiſſe être entendu à la diſtance de 300 pieds. Si cet homme parle avec la même force par ce Porte-voix, cette diſtance augmentera dans le rapport de

FA

FA à BA, & partant dans l'exemple rapporté elle ſera $= 300\sqrt{96}$ $= 2940$ pieds. L'effet ſera plus grand à meſure qu'on allonge le cone: c'eſt ce que nous verrons dans la ſuite.

§. 33. Soit un cone ACB, tronqué en DK, de ſorte que DK ſoit l'embouchure. Soit un point ſonore P, & en ne conſidérant encore que les raïons phoniques qui paſſent par l'axe du cone, il s'agit de voir plus en détail, comment ces raïons deviennent divergens. Qu'on tire du point P vers le côté CB autant de lignes phoniques P*a*, P*b*, P*c*, P*d*, P*e*, qu'on voudra, toutes ces lignes ſeront réfléchies tout comme ſi elles ſortoient d'un point Q, en ſorte que QK $=$ KP. La ligne PB eſt la premiere de celles qui ſont réfléchies. La ligne P*d* eſt réfléchie en ſorte que *dn* eſt parallele à CA. La ligne P*c* eſt réfléchie en A, & par conſéquent la derniere de celles qui ne ſouffrent qu'une ſeule réflexion, avant que de ſortir du cone. La ligne P*b* eſt réfléchie en *g*, en ſorte que *gm* eſt parallele à CB. Et la ligne P*a* eſt réfléchie en *a*, *f*, *e* en ſorte que *el* eſt parallele à CA. Ainſi tous les raïons phoniques compris dans l'angle *d*PB ne ſubiſſent qu'une ſeule réflexion. Les raïons phoniques compris dans l'angle *d*P*c* pourroient ſubir la ſeconde réflexion, mais ne la ſubiſſent pas, puiſque le cone eſt terminé en A. Les raïons compris dans l'angle *c*P*b* la ſubiſſent. Et de la même maniere, on trouvera qu'entre les raïons compris dans l'angle *b*P*a*, ceux qui ſont plus près de *b* pourroient ſubir la troiſieme réflexion, ſi le cone étoit aſſez long, mais qu'en effet il n'y a que les raïons plus proches de *a*, qui la ſubiſſent en effet. Cette alternative aura encore lieu à l'égard des raïons qui pourroient ſubir, ou qui ſubiſſent en effet la quatrieme, cinquieme etc. réflexion. Fig. 5.

§. 34. Les ſecondes réflexions, qui ſe font en *f*, *g*, A etc. ont pour centre commun le point R, & il eſt QD $=$ DR. Les troiſiemes réflexions, qui ſe font en *e*, B etc. ont pour centre commun le point S, & il eſt SK $=$ KR etc. Or, ſi du centre C on tire par le point P un cercle, tous ces points P, Q, R, S etc. ſe trouvent dans la circonférence du cercle RPS. Si donc des points B, A, on tire

les

les tangentes BV, AT, prolongées en v, t, on aura le cone vWt, dans l'enceinte duquel le ſon ſe répandra. On voit ſans peine que l'angle vWt diminue à meſure qu'on allonge le cone.

§. 35. Le cercle TPV repréſente en effet une ſphere, tout comme le triangle BCA repréſente un cone. Ainſi, les centres des raïons réflêchis ſe trouvant tous dans la ſurface de la ſphere TPVE, on peut conſidérer cette ſphere comme ſonore, mais de façon que le ſon qu'elle produit, converge d'abord vers le point W, & en diverge par le cone vWt. Comme cette ſphere eſt aſſez petite, on voit pourquoi, en parlant par un Porte-voix conique, les différentes modifications de la voix ne ſe confondent point. Cela arriveroit, ſi les points P, Q, R, S etc. ſe trouvoient diſperſés à pluſieurs centaines de pieds les uns des autres; car ces points ſont tels, que la diſtance p. ex. Se eſt $= ef + fa + a$P, & par conſéquent égale à la ſomme des chemins que le raïon phonique parcourt en zigzag à cauſe des réflexions qu'il ſubit. Et comme on pourroit donner aux porte-voix une figure telle, que les chemins parcourus par les raïons phoniques ſeroient d'une longueur fort inégale, on voit que cette inégalité n'a pas lieu quand la figure eſt conique, du moins pour ce qui regarde les raïons qui paſſent par l'axe du cone; car juſqu'à préſent ce ſont les ſeuls que nous aïons conſidérés, parce que dans une matiere un peu embrouillée, la bonne méthode veut qu'on aille du plus ſimple au plus compoſé.

§. 36. Mais paſſons maintenant à la théorie des raïons phoniques, d'une direction quelconque. Soit ACB un cone, que je ſuppoſe être droit & dont la baſe ſoit circulaire. Soit MBNA une de
Fig. 6. ſes ſections, BA ſon diametre, & le triangle BCA repréſentera la ſection qui ſe feroit le long de l'axe EC & du diametre BA. Soit QFD une autre ſection, QD ſon diametre parallele à AB, perpendiculaire à l'axe, & ſe trouvant dans le plan BCA. Qu'un raïon phonique partant du point M tombe en Q, il s'agit de trouver comment il y eſt réflêchi. Pour cet effet, figurons-nous un plan qui touche la ſurface du cone le long de la droite AC. Ce plan ſera perpendiculaire

laire au plan BCA. Tirons MN en ſorte que MA $=$ AN; la droite MPN ſera perpendiculaire au plan BCA, & parallele à celui qui touche le cone le long de la droite AC. Maintenant, par la théorie de la compoſition du mouvement, le raïon phonique MQ pourra être conſidéré comme réſolu en deux autres MP, PQ, & il eſt clair qu'il n'y a que ce dernier qui ſera réflêchi. Concevons donc la droite QT, qui ſoit dans le Plan BCA & perpendiculaire à AC. Soit encore la droite PR parallele à AC. On fera TR $=$ BT, & en tirant la droite RQ, cette droite repréſentera le raïon PQ réflêchi, & il ſera

$$PQT = TQR$$
$$PQA = RQC.$$

Soit enfin la droite RS parallele & égale à PN $=$ MP, & la droite QS repréſentera le raïon MQ réflêchi. Tirons encore la droite NC, & le point n, qui eſt celui de l'interſection de cette droite & du raïon QS, ſera le point où le raïon réflêchi tombe ſur la ſurface du cone, & où par conſéquent il ſera de nouveau réflêchi. Soit $nbma$ la ſection circulaire qui paſſe par le point n, ba ſon diametre parallele à BA, & nm parallele à MN; le point p ſera encore le point d'interſection du raïon QR, & les points P, p, C ſeront en ligne droite.

§. 37. Car, en tirant RW parallele & égale à PA, & en faire Re $=$ PE, on tracera du centre e un cercle SWV. Ce cercle pourra être conſidéré comme la baſe d'un cone VQW, & le cercle $nbma$ ſera l'interſection commune de ce cone & du cone BCA. Or il eſt

$$QR : RW = Qp : pa$$
$$QR : RS = Qp : pn$$

de plus

$$CP : PA = Cp : pa$$
$$CP : PN = Cp : pn$$

donc il ſera

$$QR : Qp = RW : pa = RS : pn$$
$$CP : Cp = PA : pa = PN : pn$$

 &

& partant

$$pa : pn = RW : RS = PA : PN.$$

Mais il eſt

$$RW = PA.$$

$$RS = PN.$$

Donc pour l'un & l'autre cone le rapport $pa : pn$ eſt le même, donc le point p eſt le point d'interſection des droites CP, QR, ab, mn.

§. 38. Il convient d'obſerver que les analogies dont je me ſuis ſervi dans le §. précédent, demandoient un certain choix, puiſque les triangles PQA, RQW ne ſont point ſemblables, quoique l'angle PQA = RQW, & quoique RW eſt parallele & égal à PA. La raiſon en eſt que les cercles BNAM, SWV, étant perpendiculaires à l'axe du cone BCA, ne ſauroient être perpendiculaires à la droite AC. De là vient que AQ > QW, quoiqu'il ſoit PQ = QR, & PA = RW, & l'angle PQA = RQW. Mais paſſons aux conſéquences.

§. 39. Comme trois points quelconques, qui ne ſont pas en ligne droite, déterminent la poſition d'un plan, il eſt clair qu'on peut faire paſſer un plan par les trois points M, Q, n, & le cone BCA étant coupé ſuivant ce plan, on aura une ellipſe, dans le plan de laquelle ſe fait la réflexion du raïon phonique au point Q. Il eſt clair auſſi que le plan de cette ellipſe paſſe perpendiculairement par le plan qui touche la ſurface du cone le long de la droite AC. Cela pourra donner lieu à de nouvelles ſpéculations, mais je ne crois pas avoir beſoin de m'y arrêter.

§. 40. On conçoit également, qu'un raïon phonique tel que MQ, après la réflexion qu'il ſubit en Q, continuera d'être réfléchi en n, comme dans d'autres points ſuivants, & que tous ces points formeront ſur la ſurface du cone une eſpece de ſpirale, dont en tous cas on pourroit chercher l'équation. Mais, cette ſpirale étant à double courbure, nous ferons mieux de la décompoſer. Il s'agit de ſéparer ce

ce qu'il y a de progreſſif dans le mouvement du raïon phonique d'avec ce qu'il y a de circulaire. Et c'eſt à quoi nous ſerviront les deux proprietés que nous venons de trouver.

§. 41. La premiere eſt, que les points N, *n*, C ſont en ligne droite, & cela donne MA = AN, c'eſt à dire, le mouvement circulaire ſe fait à angles égaux, ou bien les angles MEA, AEN etc. dans chaque réflexion, croiſſent en progreſſion arithmétique. Ainſi, le premier étant donné, on trouve tous les autres ſans peine.

La ſeconde proprieté eſt, que les points P, *p*, C ſont en ligne droite. Et comme, dans la conſidération du mouvement progreſſif, nous pouvons faire abſtraction du mouvement circulaire, le mouvement progreſſif pourra être conſidéré comme ſe faiſant ſimplement dans le plan BCA, & en particulier dans le triangle PCA. Car, en reculant le point *n* dans le point *a*, on reculera les points Q, M, d'une même quantité, c'eſt à dire, d'un angle = MEA. Ainſi p. ex. faiſant l'arc QF d'autant de degrés que l'arc *an*, on voit ſans peine que les points F, *a*, peuvent être ſubſtitués aux points Q, *n*. Et l'avantage qu'on en retire, c'eſt que par là on n'a pas beſoin de changer de plan. Car la droite F*q* ſera perpendiculaire au plan BCA, comme l'étoit la droite MP, & la décompoſition du mouvement ſe fera de la même maniere.

§. 42. C'eſt ainſi que la détermination du mouvement progreſſif ſe réduit ſimplement à la détermination des réflexions que le raïon décompoſé PQ ſubit dans le triangle PCA, c'eſt à dire, à ce que nous avons déjà démontré à l'égard de la 3, 4 & 5[me] figure.

§. 43. Il ne reſte donc qu'à voir ce qu'il y a ici de particulier. La premiere obſervation qui ſe préſente, c'eſt que AP, & partant l'angle PCA, varie en même tems que l'arc AM ou l'angle MEA. Or nous avons vû ci-deſſus que le raïon phonique ſubit d'autant plus de réflexions ſucceſſives, que l'angle PCA eſt plus petit, toutes choſes d'ailleurs égales. Cela augmente le nombre des zigzags. Mais, comme

 la

la diſtance d'un point de réflexion à l'autre eſt d'autant moins grande, cela ſe compenſe, ſoit entierement, ſoit en grande partie.

§. 44. Il importe d'examiner cette compenſation. Car, ſi elle étoit exacte à tous égards, la belle fiction de la ſphere ſonore, qui a lieu à l'égard des raïons qui coupent l'axe, auroit lieu pour des raïons quelconques, & toute la théorie des Porte-voix coniques ſe réduiroit à un ſeul théoreme. Voilà ce qui m'a engagé à examiner la nature de cette ſphere, avant que de pourſuivre toute autre recherche: & j'ai vu d'abord que je pouvois tirer de grands ſecours du théoreme, que tout diametre de la ſphere peut être conſidéré comme un axe, & que tout ce qu'on démontre de l'un de ces axes, eſt également applicable à tous les autres, puiſqu'ils ſont abſolument équivalens.

Fig. 5. §. 45. Retournant donc à la 5me figure, j'ai trouvé la ſphere & le cone déjà décrits. Voici le raiſonnement que j'ai ſuivi, & qui, après différens eſſais, m'a fait voir clair en tout cela. Conſidérons la figure comme une projection orthographique de la ſphere & du cone, & KD repréſentera un ſegment de la ſphere. Il eſt clair qu'il eſt circulaire, parce qu'il eſt formé par un cone circulaire dont le ſommet eſt au centre de la ſphere. Qu'on prenne ſur la ſurface de ce ſegment ſphérique un point quelconque P, & qu'on conçoive un plan, qui paſſe à angle droit & le long de la ligne CB, par le plan du papier. On trouvera de l'autre côté de ce plan un point Q, qui ſeroit l'image du point P, ſi ce plan étoit un miroir. On voit ſans peine que le point Q eſt également ſur la ſurface de la ſphere. Et par des théoremes de Catoptrique fort connus, ce point Q eſt le point de réunion de tous les raïons réflêchis P*af*, P*bg*, P*c*A etc. Or, à moins que le point P ne ſe trouve ſur le cercle KD, la figure ne repréſente que la projection orthographique de ces raïons, & il s'en faut de beaucoup qu'ils ſoient réflêchis vers la droite CA. Tout au contraire, ils ſeront réflêchis vers une autre droite tirée ſur la ſurface du cone. Car ces raïons réflêchis ſont tous dans le plan du triangle *a*QB. Or ce plan paſſe par le ſommet du cone, & partant il coupe le cone, d'abord le long de

de la droite CB, & la seconde fois le long d'une autre droite, qui passe également par C.

§. 46. Mais, quelle que soit la position de cette autre droite, le point Q sera à son égard ce qu'étoit le point P à l'égard de la droite CB. On trouvera donc de la même maniere sur la surface de la sphere un point R, qui pour les secondes réflexions sera ce qu'étoit le point Q pour les premieres. Et comme pour toutes les réflexions suivantes ce même raisonnement revient toujours, on voit que chaque fois les raïons sont réflêchis tout comme s'ils partoient de quelque point de la surface de la sphere ETV. C'est tout comme si on parloit avec une ouverture de bouche égale à cette sphere. Ainsi le théoreme que je n'ai rapporté ci-dessus (§. 35.) que rélativement aux raïons qui passent par l'axe du cone, s'étend généralement à tous les raïons, & le son qui se produit dans l'embouchure KD, que je considere comme un segment sphérique, reste resserré dans l'enceinte du cone *v*W*t*, que nous pourrons appeller le cone phonique ou sonore du Porte-voix conique.

§. 47. Nous voilà donc au fond de l'abyme dont j'ai parlé au commencement. J'avoue que cette infinité de réflexions m'avoit longtems empêché d'y regarder de plus près, & je vois que tous ceux qui depuis la premiere idée du Chevalier *Morland* ont parlé de son probleme, doivent s'être trouvés plus ou moins dans le même cas. Mais, si cette infinité de réflexions effraïoit au point qu'on se désistât de toute recherche, on doit naturellement être bien plus frappé de les voir toutes réduites à une sphere & à un cone.

§. 48. Mais voions encore comment le son se distribue. Soit BCA le cone, ED son embouchure, MKI la sphere sonore. Soit F un point quelconque de l'embouchure. Les raïons phoniques qui de ce point sortent du cone sans être réflêchis, sont compris dans l'espace conique *f*BFA*f*. Qu'on fasse DG = GF, & HE = EF, & en tirant HB*h*, HA*h*, GB*g*, GA*g*, on trouvera que les raïons Planche VI. Fig. 7.

 pho-

phoniques qui ne subissent qu'une seule réflexion, sont compris dans les deux espaces coniques *h*BHA*h*, *g*BGA*g*. J'ai tiré les arcs *ff*, *gg*, *hh*, qui font voir plus facilement jusqu'à quel point ces espaces coïncident. De la même maniere, en faisant EK = EG, DI = DH, & en tirant KB*k*, KA*k*, IB*i*, IA*i*, on trouvera que les raïons qui subissent deux réfractions, sont renfermés dans les espaces coniques *k*BKA*k*, *i*BIA*i*, & les arcs *kk*, *ii* font également voir jusqu'à quel degré ces espaces coïncident.

§. 49. Or il est facile de voir que la coïncidence diminue par chaque nouvelle réflexion, puisque l'intervalle PQ se rapproche ou se resserre de plus en plus. On n'aura donc qu'à tirer les tangentes TB*t*, VA*v*, & elles détermineront les limites de la coïncidence, tout comme les tangentes WB*w*, XA*x* déterminent les limites de la divergence.

§. 50. Voici maintenant l'usage que nous pourrons tirer de ces limites, & particulierement de celles de coïncidence. Supposons que tous ces cones dont nous venons de parler, coïncident avec le cone BCA, prolongé autant qu'on voudra, alors le son se répandroit dans ce cone avec une parfaite uniformité, & dans toute l'enceinte du cone la force du son seroit en raison réciproque du quarré de la distance du point C. Or, quoique ces cones ne coïncident pas tout à fait, cet énoncé ne laissera pas d'avoir lieu dans l'espace qui est entre *tv*, puisque tous ces cones coïncident du moins dans cet espace.

§. 51. Cet espace se resserre de plus en plus, toutes les fois que BA est plus petit que le diametre de la sphere. Mais, comme BA croît à mesure qu'on allonge le cone BCA, il est clair qu'on peut toujours donner au cone une longueur telle, que BA soit du moins égale au diametre de la sphere, & alors les tangentes TB*t*, VA*v*, seront paralleles. Elles représenteront donc un cylindre circonscrit à la sphere MTV, de même qu'au cone BCA. Et quoique le son se répande par tout le cone *w*Z*x*, on voit que l'oreille placée dans ce cylindre enten-

entendra le ſon auſſi fort, comme s'il ne ſe répandoit que par le cone BCA. Voilà donc tout ce qu'on pourra obtenir par des Porte-voix de figure conique. Du reſte, on voit que tout cela reſſemble abſolument au cas où on ſuppoſe une ſphere lumineuſe MTFV, qui répand ſa lumiere par un trou circulaire, dont le diametre eſt BA. On voit auſſi que tout cela eſt applicable aux miroirs concaves de figure conique EBAD.

§. 52. Soit BCA le cone, ED ſon embouchure, TEDV la ſphere ſonore, TBAV le cylindre circonſcrit, CB $=$ CA ſera la longueur que le cone doit avoir. On voit que cette longueur dépend de l'angle BCA. Soit cet angle $= \phi$, & la longueur CB $= x$; nous aurons Planche V. Fig. 8.

$$BF = CT = x \sin \tfrac{1}{2} \phi$$

& la corde

$$ED = 2 x \sin \tfrac{1}{2} \phi^2.$$

Cette corde étant le diametre de l'embouchure, j'ai déjà dit ci-deſſus, qu'on ne ſauroit lui donner moins que 1½ pouce, & qu'il ſeroit inutile de la prendre plus grande. Faiſant donc

$$ED = \tfrac{3}{2} \text{ pouce}$$

il ſera

$$\tfrac{3}{2}'' = 2 x \sin \tfrac{1}{2} \phi^2.$$

Cette formule détermine donc la longueur x par l'angle ϕ, ou réciproquement ϕ par x. Voici les conſéquences du choix que cette formule admet.

§. 53. On ſe ſert des Porte-voix pour concentrer le ſon & pour le diriger en ſorte qu'on puiſſe l'entendre à une grande diſtance. Cela dépend principalement de l'angle ϕ. Soit z la diſtance à laquelle un homme, en parlant avec une certaine force de voix, puiſſe encore être entendu, la diſtance à laquelle il ſera tout auſſi bien entendu, en parlant avec la même force par le Porte-voix, ſera

$$y = \frac{GT}{GE} \cdot z = \frac{z\sqrt{2}}{2 \sin \frac{1}{4}\phi} = \frac{z}{\sin \frac{1}{4}\phi \cdot \sqrt{2}}.$$

Car

Car la voix ſe renforce dans le rapport de la ſurface du ſegment ſphérique ED à la ſurface de l'hémiſphere, & partant dans le rapport du quarré de la corde EG, au quarré de la corde GT. Mais la voix s'affoiblit en raiſon réciproque du quarré de la diſtance: donc il ſera

$$yy : GT^2 = zz : GE^2$$

c'eſt à dire

$$y = \frac{GT}{GE} z = \frac{z}{\text{ſin } \frac{1}{4}\phi \,.\, \sqrt{2}}.$$

§. 54. Si donc la diſtance y eſt donnée, de même que la diſtance z, cette formule donne

$$\text{ſin } \tfrac{1}{4}\phi = \frac{z}{y\sqrt{2}}$$

& par là on trouvera la longueur x, moïennant la formule

$$x = \frac{3}{4\,(\text{ſin } \frac{1}{2}\phi)^2}$$

Cette longueur ſe trouvera en pouces (§. 52.).

§. 55. Comme la diſtance z eſt la portée de la voix d'un homme, elle eſt fort variable. Cela fait que nous pourrons abréger ces formules en prenant les angles $\frac{1}{2}\phi$, $\frac{1}{4}\phi$, au lieu de leurs ſinus. Ainſi nous aurons

$$\tfrac{1}{2}\phi = \frac{z \,.\, \sqrt{2}}{y}$$

& partant

$$x = \frac{3yy}{8zz}.$$

§. 56. Ainſi, en ſuppoſant z, ou la portée de la voix d'un homme $= 400$ pieds, & $y = 10000$ pieds, on trouvera $x = 234\frac{3}{4}$ pouces, $\phi = 6°.29'$, CD $= 13\frac{1}{4}$ pouces, & partant DA, ou la longueur du Porte-voix $= 234\frac{3}{4} - 13\frac{1}{4} = 221\frac{1}{2}$ pouces, ou

18

18 pieds, $5\frac{1}{2}$ pouces. Cette longueur se réduit à 52 pouces ou 4 pieds, 4 pouces, lorsque y n'est que de 5000 pieds.

§. 57. Si la longueur DA est donnée, il s'agit de trouver l'angle ϕ & la distance y. Soit DA $= a''$. Or comme il est

$$\tfrac{3}{2}'' = 2x\,(\sin\tfrac{1}{2}\phi)^2$$

$$x = \frac{3}{4\,(\sin\frac{1}{2}\phi)^2} = \text{CA}$$

$$\text{CD} = \frac{3}{4\,(\sin\frac{1}{2}\phi)}$$

il sera

$$\text{CA} - \text{CD} = a = \tfrac{3}{4}\left(\frac{1}{(\text{s}\,\frac{1}{2}\phi)^2} - \frac{1}{(\text{s}\,\frac{1}{2}\phi)}\right),$$

ou

$$\text{s}\,\tfrac{1}{2}\phi^2 + \frac{3}{4a}\cdot\text{s}\,\tfrac{1}{2}\phi = \frac{3}{4a}$$

& partant

$$\text{s}\,\tfrac{1}{2}\phi = \frac{-3 + \sqrt{(48a - 9)}}{8a}$$

$$y = \frac{z}{(\text{s}\,\frac{1}{4}\phi)\cdot\sqrt{2}}.$$

§. 58. Supposons p. ex. $a = 7$ pieds $= 84$ pouces, on aura

$$\text{s}\,\tfrac{1}{2}\phi = 0{,}08997.$$

$$\tfrac{1}{2}\phi = 5^\circ.9'.40''$$

$$\phi = 10.19.20.$$

$$\tfrac{1}{4}\phi = 2.34.50.$$

$$\text{s}\,\tfrac{1}{4}\phi = 0{,}04502.$$

$$y = 15{,}71\,.\,z.$$

Ainsi

Ainsi ce Porte-voix se fera entendre 15$\frac{7}{10}$ fois plus loin que la voix de celui qui parle. Si donc un homme peut se faire entendre à la distance de 400 pieds, ce Porte-voix se fera entendre à la distance de 6284 pieds.

§. 59. Comme tout ce que je viens d'établir se fonde simplement sur la réflexion du son, on voit que tout est également applicable à la lumiere. On pourra donc faire des *Porte-lumieres*, comme l'on fait des Porte-voix, & la clarté qu'une chandelle, ou un flambeau, ou une flamme répand dans un hémisphere entier, sera resserrée dans l'enceinte d'un cone aussi étroit qu'on voudra. Supposons p. ex. que la flamme d'un flambeau répand à la distance de 100 pieds assez de clarté pour rendre les objets connoissables, les exemples que je viens de rapporter font voir que, moïennant un cone semblable, on portera cette clarté à une distance de 1500 ou 2000 pieds, & si on veut même plus loin. Ces sortes de Porte-lumieres pourront de nuit être d'un grand usage, puisque bien souvent, & surtout en tems de guerre, il importe de voir clair à des distances considérables. On pourra également s'en servir dans les illuminations. Car, en plaçant ces sortes d'instrumens à des distances de 1000 ou 1500 pieds, il n'en faudra pas beaucoup pour éclairer des rues entieres & bien longues. Et comme pour un seul instrument on ne se sert que d'un hémisphere de la flamme, on voit qu'on doublera l'usage en se servant encore de l'autre hémisphere. Peut-être en tireroit-on aussi avantage pour éclairer le théatre. La grande difficulté c'est de faire des miroirs coniques de 6 pieds & plus de longueur. Mais rien n'empêche de changer la figure conique en figure pyramidale, qui fera plus ou moins le même effet. Et il ne sera pas difficile de former ces pyramides, parce qu'on trouvera des glaces de miroir suffisamment longues, pour former les côtés de ces pyramides, qui pourront avoir autant de faces qu'on voudra. Et quand on les feroit moins grandes, on pourra toujours les emploïer à plusieurs amusemens optiques très curieux & très agréables. Mais retournons aux Porte-voix.

§. 60.

§. 60. La théorie que j'en ai donnée jusqu'à présent, se fonde uniquement sur la loi de la réflexion du son. La circonstance, que les raïons phoniques se croisent en une infinité de manieres, ne fait point d'obstacle ici. Car, quoique la propagation du son né soit encore suffisamment connue que tout au plus pour le cas où elle est d'une dimension linéaire, elle nous apprend néanmoins que les différens mouvemens que reçoit une particule d'air ne s'entr'empêchent pas, & qu'à cet égard le son n'est pas différent de la lumiere. J'en infere qu'il n'y a là rien qui détruise ou qui change la théorie des Porte-voix, que je viens de donner.

§. 61. Mais il y a une autre circonstance à laquelle il convient maintenant d'avoir égard, c'est que le Porte-voix peut recevoir par le son un mouvement oscillatoire, & par là il commencera à résonner, & à produire de nouvelles réflexions du son. Or j'ai déjà observé ci-dessus que par là le son se renforce, mais qu'il devient en même tems plus confus, de sorte que les consonnes qu'on prononce s'entendent moins clairement (§. 14. & suiv.). J'ai dit encore que ce mouvement oscillatoire est vicieux dans les porte-voix, & qu'il vaut mieux l'empêcher autant qu'il est possible. Il convient néanmoins d'en examiner l'effet.

§. 62. Cet effet consiste principalement en ce qu'il faut regarder toute la surface du cone comme composée de points sonores, au lieu que jusqu'à présent nous n'avons considéré que les points sonores dans l'embouchure DK. Soient ces points sonores *a*, *b*, *c*, etc. ils n'auront pas le point Q pour centre commun. Tout au contraire, leur action est plus ou moins perpendiculaire à la droite CB, c'est à dire, à la surface du cone. Je dis plus ou moins, car nos microscopes ne nous font pas voir comment les particules d'air sont contigues à la surface du cone, & aux particules dont cette surface est composée. Mais, quoi qu'il en soit, on voit que la sphere ETV n'est d'aucun usage pour ces nouveaux points sonores, mais qu'il faut autant de spheres qu'il y a de points sonores sur la surface du cone. Toutes ces spheres étant concentriques, on voit que celle qui les comprend toutes, passe par les extrémités du cone, B, A. Elle est donc considérablement Fig. 4.

 plus

plus grande, & déjà cette circonſtance contribue à rendre le ſon plus confus. A cette circonſtance il s'en joint une autre, c'eſt que ces points *a*, *b*, *c* etc. ne deviennent ſonores ou réſonnants que peu à peu, & cela entraine toutes les conſéquences que j'ai rapportées ci-deſſus. (§. 14. & ſuiv.) Enfin, le cone *v* W *t* ne déſigne plus les limites du ſon qui ſort du cone BCA, mais ces particules répandent leur ſon par tout l'hémiſphere derriere BA, & même encore par l'hémiſphere qui eſt devant BA, puiſque le mouvement oſcillatoire ſe communique également aux particules qui forment la ſurface extérieure du cone. Ainſi toutes ces raiſons concourent à faire voir qu'un Porte-voix où ce mouvement oſcillatoire n'a point lieu, eſt préférable à un autre qui réſonne (§. 16.).

§. 63. Après m'être ſuffiſamment étendu ſur la théorie des Porte-voix de figure conique, je traiterai plus briévement des autres figures. Si ces figures doivent être des lignes courbes, les Artiſtes ne les fabriquent que difficilement avec exactitude, & à cet égard les Porte-voix de figure conique auront toujours quelque préférence. Du reſte toutes les figures qui en s'élargiſſant tournent leur convexité
Fig. 9. vers l'axe, comme p. ex. AB, doivent être rejettées, parce qu'elles répandent le ſon par tout un hémiſphere, & plus encore que la figure cylindrique ou priſmatique. Ces ſortes de figures ſont bonnes pour les Inſtrumens de muſique, parce que c'eſt là qu'il importe de répandre le ſon auſſi uniformément qu'il eſt poſſible. Mais les Porte-voix ſont deſtinés à diriger le ſon vers l'endroit où on veut ſe faire entendre. Ainſi la courbure qu'on voudra leur donner doit être telle, qu'elle tourne la concavité vers l'axe, ſans cependant devenir parallele à l'axe, ou ſe rétrécir après s'être élargie juſqu'à un certain point. Car, ſi la ſurface devient parallele à l'axe, elle commence à produire l'effet d'un cylindre, & ſi elle converge vers l'axe, elle fait l'effet d'un cone renverſé (§. 23.).

Planche IV. Fig. 10. §. 64. La figure parabolique paroit promettre le plus d'avantage. Je vais donc encore l'examiner. Soit BADM la parabole, A ſon

ſon ſommet, AP ſon axe, C ſon foïer. On ſait depuis longtems, que tous les raïons qui partent du point C ſe réfléchiſſent dans une direction parallele à l'axe. Il en eſt de même à l'égard du ſon. Ainſi, ſi le Porte-voix eſt de figure parabolique, l'embouchure doit être en C, & on retranchera le ſegment DBAD. Mais l'embouchure doit avoir tout au moins $1\frac{1}{2}$ pouce de diametre; ainſi ce n'eſt plus le point C tout ſeul, qui entre en conſidération. Et comme il convient de faire le Porte-voix auſſi petit qu'il eſt poſſible, on fait bien de prendre BD pour l'embouchure, & par là toute la parabole eſt déterminée, puiſque CD ſera de $\frac{3}{4}$ & AC de $\frac{3}{8}$ pouces, ou bien le parametre ſera de $1\frac{1}{2}$ pouce.

§. 65. On conçoit ſans peine que la droite BD repréſente la projection orthographique d'un cercle, & que chaque point de ce cercle peut être conſidéré comme ſonore. Soit donc M un point de la parabole; le triangle DMB ſera la projection d'un cone qui comprend tous les raïons phoniques qui incident droit en M, & qui y ſont réfléchis. Soit TNM la tangente du point M, N le point d'interſection de cette tangente & de BD prolongée. Qu'on faſſe l'angle $TNb = TNB$, &

$$Nd = ND$$
$$Nc = NC$$
$$Nb = NB.$$

De cette maniere, le cercle qui repréſente BD ſera transféré en bd, & le cone DMB en dMb. Or, ce cone dMb étant continué vers $\beta M\delta$, ſera le cone que forment les raïons réfléchis, & la droite $cM\gamma$ marquera la direction du raïon CM réfléchi en M. Donc $M\gamma$ ſera parallele à l'axe AP. On voit ſans peine que ce cone eſt oblique à baſe circulaire. Et en nommant CM, cM, $M\gamma$ ſon *axe*, cet axe ſera parallele à AP, quel que ſoit le point M.

§. 66. Si le point M eſt fort éloigné de C, le cone $\delta M \epsilon$ ſera fort étroit. Ainſi p. ex. en donnant à AB une longueur de 7 pieds ou 84 pouces, BD n'aiant que $1\frac{1}{2}$ pouce, on voit que l'angle du cone ne ſera pas fort grand. Pour trouver cet angle, on regardera CM comme un raïon, & CD comme une tangente. Or il eſt

$$CM = AP + AC = 84,75 \text{ pouces}$$
$$CD = 1,5 \text{ pouces},$$

dont la tangente ſera

$$\frac{1,50}{84,75} = 0,01552,$$

& l'angle répondant $= 1^{\circ}.55'$.

Cet angle eſt celui que forme l'axe $M\gamma$ avec le côté du cone qui s'écarte le plus de l'axe. Donc, en doublant cet angle, on voit que la plus grande divergence des raïons phoniques du cone $\delta M \epsilon$ ne va qu'à $3^{\circ}.50'$, ce qui ſans doute eſt très peu. Mais on voit facilement que cet angle croît à meſure que le point M eſt plus proche de D, & par là les raïons deviennent beaucoup plus divergens. Il en eſt de même de l'angle DMB, qui eſt celui de la moindre divergence des raïons du cone $\delta M \epsilon$. Cet angle s'accroît à meſure que le point M ſe prend plus près de D, & en D il devient $= 45^{\circ}$, ce qui fait une divergence très conſidérable. Il eſt vrai qu'en ce cas il y aura une partie des raïons qui ſont réflêchis plus d'une fois, mais cela n'arrive qu'aux raïons qui partent des points de la droite BD, qui ſont le plus près de D.

§. 67. Si le point M eſt celui où la parabole emploïée pour le Porte-voix ſe termine, alors en tirant CMg, BMh, DMf, on voit que tous les raïons compris dans les eſpaces que ces droites forment avec l'axe AP, ſortent du Porte-voix, ſans être réflêchis. Suppoſons comme auparavant AP = 84 pouces, AC = $\frac{3}{4}$ pouce, on trouvera $MP = \sqrt{126} = 11,225$ pouces, & partant

tang

$$\text{tang } MCP = \frac{11,225}{83,625} = 0,13423$$

$$MCP = 7^{\circ}.\ 43'.$$

Cet angle est plus grand que celui que nous avons trouvé ci-dessus (§. 58.) pour un Porte-voix conique de la même longueur. Or le moindre angle de divergence étant ici de $3^{\circ}.\ 50'$ (§. 65.), & cet angle allant en augmentant jusqu'à 45 degrés, il n'y a gueres d'apparence que l'angle $MCP = 7^{\circ}.\ 43'$ puisse être regardé comme l'angle de divergence moïen. Et si même il l'étoit, il s'ensuivroit qu'un Porte-voix parabolique feroit moins d'effet, qu'un Porte-voix conique de la même longueur.

§. 68. Les raïons qui partent des points qui sont peu éloignés de la surface, sont en grande partie sujets à être réfléchis plus d'une fois; & alors il s'en faut de beaucoup qu'ils sortent du tuyau parabolique dans une direction parallele à l'axe. Il y en a même qui sortent dans la direction de la tangente TM, en supposant que le tuyau se termine en M. On voit par tout cela que, dans les Porte-voix paraboliques, il y a tout au moins autant de divergence que dans les Porte-voix coniques, qui outre cela se fabriquent beaucoup plus facilement.

§. 69. Mais, quand il s'agit d'instrumens pour aider l'ouïe, la figure parabolique est la plus avantageuse. Car le son qui vient de loin y entre dans une direction à très peu près parallele à l'axe, & par la réflexion il se concentre dans le foïer C comme dans un point. Il ne faudra donc qu'un petit trou en E, & l'instrument aura la figure décrite par la rotation du plan CDMPC autour de l'axe CP. On pourra appliquer en C un petit tuyau, pour l'insinuer dans l'oreille. Comme ces sortes d'instrumens n'ont pas besoin d'être fort grands, on pourra en tout cas les faire fondre. Mais, si on veut en avoir pour entendre fort loin, alors ces Instrumens doivent être considérablement aggrandis. En voici les dimensions.

§. 70. Le diametre de l'ouverture en C n'a pas besoin d'avoir plus d'un $\frac{1}{2}$ pouce. Je le supposerai d'un $\frac{1}{3}$ pouce. Soit le demi-diametre $MP = x$ pouces. Or le demi-diametre de l'ouverture

en

en C étant $\frac{1}{6}$ pouce, le ſon qui entre dans l'inſtrument ſe trouvera en C renforcé en raiſon de $\frac{1}{36}$ à xx. Soit la diſtance de l'objet dont on veut entendre le ſon $= z$ pieds, je dis que l'inſtrument fera le même effet que ſi ſans l'inſtrument on entendoit l'objet à la diſtance de $\frac{z}{6x}$ pieds. Car le ſon de l'objet s'affoiblit en raiſon du quarré des diſtances. Si donc l'inſtrument doit rapprocher le ſon, il faut qu'il le renforce en raiſon réciproque du quarré des diſtances. Mais il le renforce en raiſon du quarré de $\frac{1}{6}$ au quarré de x; donc il faut que les diſtances ſoient en raiſon de x à $\frac{1}{6}$, ou de $6x$ à 1. Ainſi p. ex. en ſuppoſant $x = 1$ pied $= 12$ pouces, on aura $6x = 72$. Si donc un homme peut être entendu à la diſtance de 400 pieds, moïennant cet inſtrument on l'entendra à la diſtance de 72 fois 400 ou 28800 pieds. Il eſt clair que l'axe CP doit être dirigé vers cet homme, & qu'il faut que dans toute cette contrée-là il ne ſe faſſe point d'autre bruit, puiſque ſans cela on entendra tout enſemble & confuſément.

§. 71. On peut encore donner à ces Inſtrumens la figure conique, mais alors il faut faire attention à ce que nous avons dit ci-deſſus (§. 23.), c'eſt à dire, il faut éviter que le ſon ne rebrouſſe chemin avant que de parvenir à l'oreille. Soit ACB le cone, CD ſon axe. Qu'on tire AR parallele à l'axe, le raïon RA ſera ſucceſſivement réflêchi en b, c, d, e. Soit l'angle $ACD = \phi$, on aura

Fig. 11.

$$CAb = \phi$$
$$AbB = 3\phi = cbC$$
$$bcA = 5\phi = dcC$$
$$cdB = 7\phi = edC$$
etc.

Ainſi les angles de réflexion croiſſent comme les nombres impairs, & le dernier de ceux qu'on peut admettre, doit encore être au deſſous de 90°. Si nous ſuppoſons que c'eſt l'angle Ced, il faut tronquer le cone en e, parce que c'eſt là que tout le ſon qui entre dans le cone par AB, entre également dans l'oreille. On peut même tronquer le cone en d, c, b,

c, *b*, ou quelqu'autre point entre *e*A. La différence qu'il y aura, c'eſt qu'il y aura plus de raïons qui entreront dans l'oreille ſans être réfléchis. Mais, comme alors l'ouverture devient plus grande, la queſtion eſt ſi elle peut l'être.

§. 72. Soit $(2n + 1)\,\phi < 90°$, on aura (§. 25.)

$$Ce = \frac{CA \,.\, \sin\phi}{\sin(2n + 1)\phi}.$$

Le demi-diametre de l'ouverture

$$\text{en } A = CA \,.\, \sin\phi$$

$$\text{en } e = Ce \,.\, \sin\phi.$$

Ainſi le ſon ſera renforcé dans le rapport de Ce^2 à CA^2, & le cone rapprochera le ſon dans le rapport de CA à C*e*.

§. 73. Or, en faiſant comme ci-deſſus (§. 68.) le demi-diametre de l'ouverture en *e* $= \frac{1}{6}$ pouce, on aura

$$Ce \,.\, \sin\phi = \tfrac{1}{6}''$$

& partant (§. 72.)

$$Ce = \frac{1}{6 \,\mathrm{f}\phi} = \frac{CA \,.\, \mathrm{f}\phi}{\mathrm{f}(2n + 1)\phi},$$

donc

$$CA = \frac{\mathrm{f}(2n + 1)\phi}{6 \,.\, \mathrm{f}\phi^2}.$$

§. 74. Cette formule détermine la longueur AC par l'angle ACD $= \phi$, ou cet angle par la longueur. Enſuite, le ſon ſe rapprochant en raiſon de CA à C*e*, on voit que ce rapport revient à

$$CA : Ce = \mathrm{f}(2n + 1)\phi : \mathrm{f}\phi.$$

Et cela détermine l'angle ϕ, lorſqu'on veut que le cone renforce ou rapproche le ſon dans un rapport donné. Comme l'angle $(2n + 1)\phi$ ne

ne doit pas furpaffer les 90°, on voit qu'il eft bon de le prendre = 90°, & alors il eft fimplement

$$CA : Ce = 1 : f\phi.$$

Suppofons que le fon doive être renforcé 100 fois, il fera rapproché en raifon de

$$CA : Ce = 10 : 1$$

& partant

$$\sin\phi = \tfrac{1}{10} = 0,100000$$

$$\phi = 5^\circ.45'$$

$$2\phi = 11.30 = ACB$$

$$CA = \frac{1}{6.f\phi^2} = \frac{100}{6} = 16\tfrac{2}{3} \text{ pouces.}$$

$$Ce = \frac{1}{6\,f\,\phi} = \frac{10}{6} = 1\tfrac{2}{3} \text{ pouce.}$$

$$Ea = 16\tfrac{2}{3} - 1\tfrac{2}{3} = 15 \text{ pouces.}$$

§. 75. En faifant donc généralement $(2n+1)\phi = 90^\circ$, on a

$$Ce = \frac{CA \,.\, f\phi}{f\,2(2n+1)\phi} = CA \,.\, f\phi,$$

c'eft à dire

$$Ce = AE,$$

ce qui revient à ce que nous avons démontré à l'égard des Porte-voix coniques (§. 51. 52.). Le cone ACB eft infcrit dans un cylindre qui a $Ce = AE$ pour demi-diametre. Toute la différence qu'il y a, c'eft qu'ici l'embouchure & partant toutes les autres dimenfions font $4\frac{1}{2}$ fois plus petites. Car le diametre de l'embouchure n'eft ici que tout au plus de $\frac{1}{3}$ pouces, au lieu que pour les Porte-voix ce diametre ne fauroit gueres être moins grand que $1\frac{1}{2}$ pouce.

§. 76.

§. 76. Je finirai par une remarque sur la maniere dont j'ai évalué ci-dessus le renforcement du son par le Porte-voix. J'ai dit (§. 53.) que le son se renforce comme le quarré de la corde GE, au quarré de la corde GT. Cela suppose qu'en parlant le son se répand également par tout l'hémisphere. Cette supposition peut très bien ne pas être vraie en toute rigueur, & probablement il faudra en rabattre quelque chose. Mais, comme le son avant que de sortir par les levres subit des réflexions dans les cavités de la bouche, qui ne sont gueres susceptibles de ce calcul, je m'en suis simplement tenu au rapport mentionné, comme à un *maximum*. Du reste, dans le cas où le son part d'une surface sonore, comme p. ex. d'un tambour, d'une cloche etc., il y a apparence qu'il en est comme de la lumiere, c'est à dire que l'*angle d'émanation*, qui se trouve expliqué dans ma Photométrie, entre en ligne de compte, & que le son diminue en raison du sinus de cet angle, & cela change le rapport de GE à GT en celui de sin ECG au sin CT, ou bien de EC à AB. **Planche V. Fig. 8.**

§. 77. On peut s'en tenir à ce rapport, si on veut calculer plutôt trop peu que trop. Je vais encore m'en servir pour représenter dans une table les différentes proportions qu'on peut donner aux Porte-voix coniques. Pour cet effet je désignerai le diametre de l'embouchure ED par l'unité, & pour le diametre AB, je le poserai successivement = 2, 3, 4, 5, 6 etc. Et ces nombres indiqueront en même tems le rapport de ED à AB, dont je viens de parler. Or, comme il doit être TV = AB, CG = BF = AF, on aura

$$CG : ED = CF : AB$$

ou bien

$$\tfrac{1}{2}AB : ED = (GF + \tfrac{1}{2}AB) : AB$$

on aura

$$GF = \frac{AB\,(AB - ED)}{2ED}$$

ce qui, en faisant ED = 1, donne

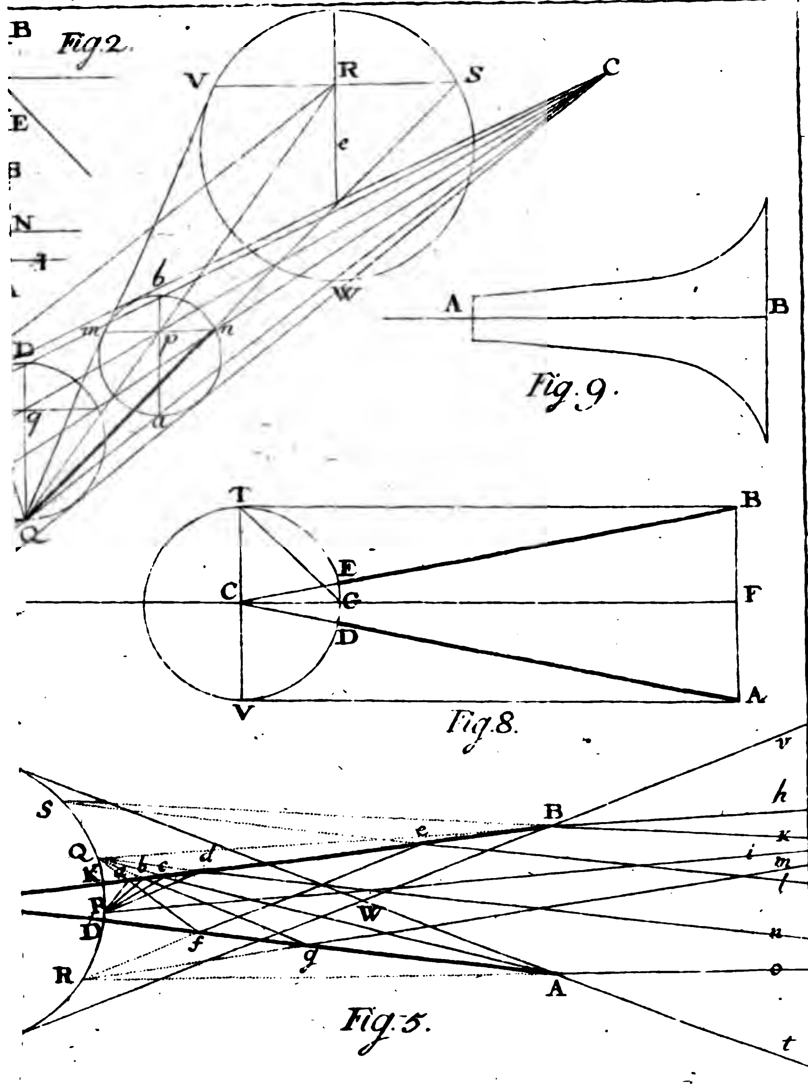
$$GF = \tfrac{1}{2} : AB\,(AB - 1).$$

Ainsi GF est un nombre trigonal répondant au *latus* AB — 1. On aura donc pour ED = 1, en nombres entiers,

AB	GF
2	1
3	3
4	6
5	10
6	15
7	21
8	28
9	36
10	45
11	55
12	66
13	78
14	91
15	105
16	120
etc.	etc.



SUR


Fig. 2.
B
E
N
V
R
S
C
e
W
b
m
p
n
D
q
a
Q
A
B
Fig. 9.
T
B
E
C
G
F
D
V
A
Fig. 8.
v
h
S
B
k
Q
e
d
i
K
a
b
c
m
l
P
W
D
f
n
g
R
A
o
Fig. 5.
t

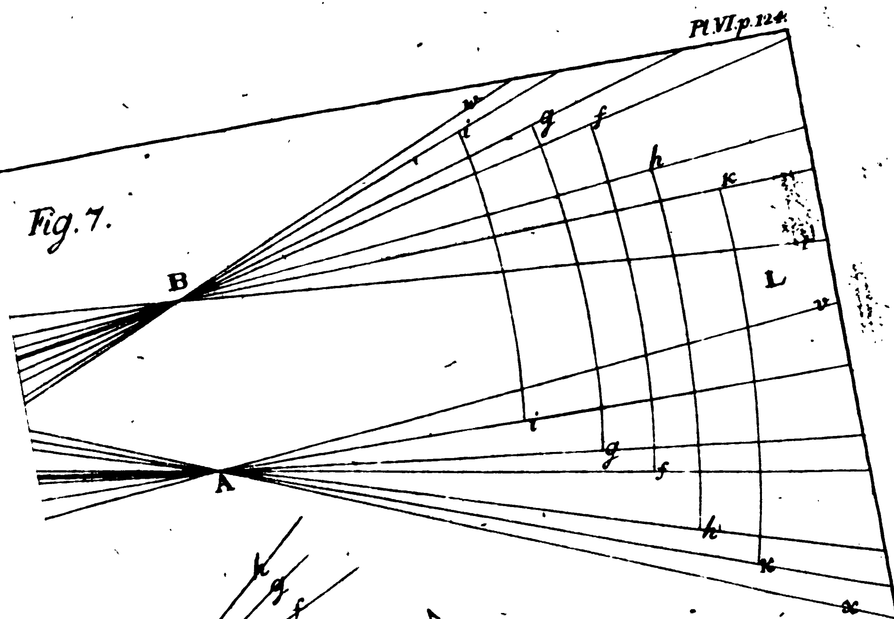
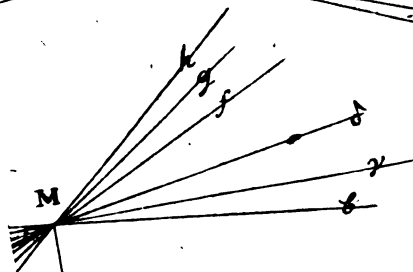


Fig. 7.



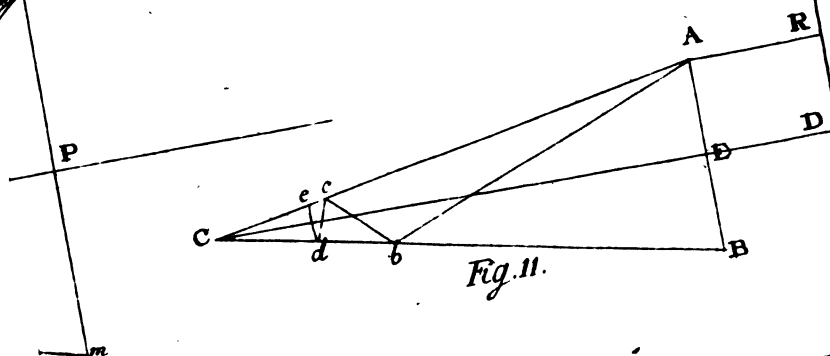


Fig. 11.

SUR
L'AMBRE-GRIS. (*)

PREMIER MÉMOIRE. (**)

SUR
L'ORIGINE DE L'AMBRE-GRIS.

Traduit de l'Allemand.

La diverſité & l'obſcurité des notions qu'on a coûtume de ſe former au ſujet de la génération de l'Ambre-gris, ont occaſionné des erreurs groſſieres dans leſquelles pluſieurs Ecrivains ſont tombés à cet égard. Il y en a qui font conſiſter cette ſubſtance dans le mêlange des ordures de certains Oiſeaux. D'autres la prennent pour un excrément de la baleine; d'autres pour la réſine de certains arbres qui croiſſent le long du rivage, ou même pour une eſpece de Camphre. Enfin, on ſe la repréſente auſſi comme un mêlange d'écume, de cire & de miel, conduit à ſa perfection par l'agitation des eaux de la mer & par

 la

(*) Les deux Mémoires ſur l'Ambre-gris qu'on met ici, ont été envoyés à M. le Directeur *Marggraf* par M. le Docteur *Feldmann*, avec une Lettre datée de Ruppin, le 15 Mai, 1763. Ce n'eſt pas la ſeule obligation que l'Académie ait à ce célebre Phyſicien, dont la capacité diſtinguée eſt ſuffiſamment connue, & qui poſſede une très belle Collection de Curioſités Naturelles. Il a fait préſent dans le même tems à l'Académie des bois tant étrangers que du pays, qu'il a raſſemblés à grands fraix & fait travailler & polir avec un extreme ſoin. C'eſt une des parties les plus intéreſſantes du Cabinet de l'Académie.

(**) Ce premier Mémoire eſt originairement un rapport envoyé à S. E. M. *Jaques Moſſel*, alors Gouverneur-Général des Indes Orientales à Batavia, par M. *Abraham Abeleven*, ancien Gouverneur de *Ternate*, l'une des Iles Moluques. L'Original eſt en Hollandois. M. *Merian* en avoit fait une Traduction Allemande, d'après laquelle eſt celle que je donne ici en François.

la chaleur du Soleil. Mais, comme toutes ces opinions sont frivoles, & ne peuvent être appuyées sur aucun fondement; le simple désir d'étendre ses connoissances a engagé M. *Abeleven*, pendant le peu de séjour qu'il a fait aux Iles Moluques, à faire des recherches là-dessus, & en particulier à s'en informer, tant auprès du dernier Roi défunt de *Tedor*, que de celui qui regne actuellement. Ils ont unanimement témoigné que, lorsque ce district étoit encore soumis à leur domination, ils avoient diverses fois visité les Iles dites *Papœtes*, & nommément celles de *Salawatti* & de *Waygeew*, (ce sont deux des principales Provinces qui avoient été dépendantes & tributaires des susdits Rois de *Tedor*, qui y envoyoient des Gouverneurs, comme dans la Province de *Celebese*.) Pour se mettre mieux au fait, ils avoient rassemblé le long du rivage de la mer quantité de petits morceaux d'ambre, & s'étoient, entr'autres cas, trouvés présens en personne, lorsqu'on avoit tiré de l'estomac d'un poisson, qu'une grande quantité de bâtimens avoient retiré de la bourbe, & qui, suivant leur rapport, devoit avoir 50 *Cobidos* de longueur, avec une gueule & un gosier épouvantablement larges, un morceau d'ambre qui pesoit, y compris la graisse dont il étoit environné, près de 80 livres. Ce morceau, autant que je puis m'en souvenir, fut envoyé en présent à la Compagnie, en 1712, ou 1713.

Voilà, selon les apparences, ce qui en a jetté plusieurs dans l'erreur au sujet de l'origine de cette précieuse matiere, & les a engagés à croire que, sous son nom, devoient être comprises trois especes différentes de cette matiere argilleuse & sulfureuse, formée par une sorte de fermentation, & d'une nature si active. La premiere espece est d'un gris cendré, avec des taches brunes, ou même avec des rayes marbrées: on la regarde comme la meilleure & la plus durable. Elle est pour l'ordinaire pure, claire, & d'une odeur agréable. La seconde est tout à fait brune, pleine d'impuretés, de terre, de sable, etc. Elle est plus pesante, a une odeur désagréable, qui, aussi bien que celle de la troisieme espece, ressemble à l'odeur que rend, quand on la fond,

fond, une graisse jaune, pareille à celle qui entouroit l'ambre tiré du poisson.

D'après ce rapport, quoiqu'assez simple, je crois pouvoir, en me fondant sur des preuves suffisantes, parvenir à une conclusion qui est aussi avouée par M. le Docteur en Médecine *Kriele;* c'est que l'ambre tire sa base originaire d'une huile terrestre fluide, qui jaillit du fond de l'Océan, s'éleve jusqu'à sa surface, & y demeure agitée par les flots, jusqu'à ce que le sel de la mer & la chaleur du Soleil l'ayant figée, elle se durcit, & prend enfin la véritable forme d'ambre. Quand ensuite cet ambre vient à être avalé par des poissons tant grands que petits, ou même par des oiseaux, la chaleur de leur estomac & de leurs intestins le fait fondre; ce qui excite dans ces animaux un travail & une oppression extraordinaire, d'où s'ensuit leur desséchement & leur mort naturelle; ou bien, se trouvant fort affoiblis par là, ils se laissent prendre sans peine.

Cette origine de l'ambre se manifeste encore mieux par les matieres étrangeres qui s'y trouvent mêlées, comme de petites pierres, des coquillages, des insectes & d'autres choses semblables. *Rumpf*, dans son Cabinet des Raretés d'Amboine, p. 265, témoigne avoir reçu d'un pêcheur de l'ambre encore mou. Aussi les parties constitutives de l'ambre se laissent-elles aisément dissoudre par les opérations de la Chimie. En procédant avec circonspection à ce travail, on tire de l'ambre une eau insipide, qui est suivie d'un esprit acide, après quoi vient une huile jaune de bonne odeur, & finalement un sel volatil & acide comme celui que donne le succin; & au fond il reste une matiere résineuse, noire & brillante.

Que si après cela on cherche encore à s'assurer si c'est de véritable ambre, ou non, qu'on en mette un petit morceau sur une feuille d'or rougie au feu: il s'en élevera une forte vapeur, qui laissera après soi très peu de cendre bien nette: & c'est à ces caracteres que les Connoisseurs jugeront de sa bonté. Quelques uns se servent d'un vase

de

de porcelaine net, couvert & rempli d'eau bouillante; le bon ambre, quand on en rape, & qu'on le fait infuser comme le Thé, doit surnager en forme fluide. Cette épreuve est la plus sûre, & en même tems la plus courte.

Les propriétés & les effets de l'ambre sur le corps humain consistent, au jugement des Médecins, à fortifier les nerfs. On peut l'employer avec l'effet désiré, tant crû que préparé, sur les corps affoiblis, desséchés & appauvris d'esprits vitaux, pour fortifier la mémoire, le cerveau, le cœur, & particulierement les organes de la génération. Plusieurs vantent excessivement l'utilité de ce remede pour la prolongation de la vie. Elle a été confirmée par un Médecin célebre dans son tems, nommé *Verulamius*, qui en parle d'après sa propre expérience. En prenant tous les jours dix grains d'ambre crud pulverisé, avec dix grains de nitre bien épuré, ou de salpetre, il atteignit un âge fort avancé. Cependant les plus habiles Médecins condamnent le trop grand usage de l'ambre, tant par rapport aux femmes qui sont travaillées de vapeurs, que pour tous les tempéramens sujets à l'hypocondrie & à d'autres accidens fâcheux. Mais je m'en tiens à cette courte Rélation.

Batavia, le 19 Mars 1761.



SE-

SECOND MÉMOIRE.

ANALYSE CHYMIQUE DE L'AMBRE-GRIS DES MOLUQUES.

Traduit du Latin. (*)

En 1761, le 14 de Mars, M. *Abraham Abeleven*, ancien Gouverneur de celle des Iles Moluques qui eſt fort connue ſous le nom de *Ternate*, me donna deux morceaux de bon ambre gris, dont l'un peſoit ℥ij moins ℈j, & l'autre ℥ij, ʒv & ℈ij, dans le deſſein que j'en fiſſe l'analyſe chymique rélativement à la Médecine, cette ſubſtance ne paroiſſant pas encore être ſuffiſamment connue, tant par rapport à ſon origine qu'à l'égard de ſes parties conſtitutives. Quant à l'origine de l'ambre gris le meilleur & le plus pur, M. *Abeleven* a eu la bonté de me fournir là deſſus des détails circonſtanciés & authentiques, où l'on voit de quelle maniere on parvient à l'acquiſition de l'ambre dans les Iles Moluques. C'eſt ce qu'on vient de lire dans le Mémoire précédent.

Cha-

(*) D'après l'Original envoyé à M. le Docteur *Feldmann*, par M. *Samuel Kriele*, Docteur en Médecine, natif de Francfort ſur l'Oder, & Médecin à Batavia & au grand Java dans les Indes Orientales, avec une Lettre datée de Batavia le 3 Novembre 1761, qui eſt arrivée à Ruppin le 20 Décembre 1762.

Chacun des deux morceaux d'ambre susdit étoit à peu près de la grosseur du poing, d'une couleur grise, en petites lames posées l'une sur l'autre, dont chacune avoit une raye plus foncée & noirâtre, ce qui lui donnoit un air marbré; l'odeur en étoit fort agréable, & ressembloit à celle de l'ambre naturel. Le plus petit des deux morceaux, qui pesoit ℥ij, moins ℈j, fut le premier dont j'entrepris l'examen chymique, en y suppléant la ℈j qui manquoit, & que je détachai du plus grand morceau. Mais, comme j'étois occupé à réduire le tout en plus petites pieces, j'observai quelque chose d'extrèmement noir, & continuant avec toute la circonspection nécessaire pour ne pas le briser, je tirai de la masse un bec recourbé d'oiseau d'une très petite espece. Cela me fit naître l'envie de chercher s'il ne s'y en trouveroit pas d'autres, & je ne perdis pas mes peines: car, outre plusieurs becs semblables, je rencontrai des ongles des mêmes oiseaux, & même une petite tête toute entiere avec son bec. Ayant rassemblé le tout soigneusement, je l'envoyai à M. *Abeleven*, qui conserve ces curiosités dans une boëte. Mais de semblables corps étrangers ne se rencontrent pas dans tous les morceaux d'ambre-gris; ce dont je pus me convaincre en brisant avec les mêmes attentions l'autre piece qui étoit plus grosse & plus pesante, sans qu'il s'y présentât la moindre parcelle étrangere.

I. Ayant donc pris deux onces d'ambre-gris legerement & imparfaitement pilées, mais dégagées de toutes particules d'oiseaux, je les renfermai dans une cucurbite de verre net; j'y appliquai un alembic de verre que je lutai bien, avec un récipient convenable, aussi de verre; & je mis tout cet attirail dans le sable, en le penchant fort, afin que les fluides que je me proposois d'en tirer, pûssent monter plus aisément: & même, pour cet effet je couvris de sable toute la cucurbite jusqu'à l'alembic. Après tous ces préparatifs, je commençai la distillation, en faisant monter à une chaleur qui répondoit au 180 degré du Thermometre de *Fahrenheit* & de *Prinz*: à l'aide de cette chaleur il s'éleva

leva

leva un liquide clair & un peu acide, du poids de ℈iv. Ayant augmenté le degré du feu jusqu'à 220, il s'ensuivit une huile claire aussi, mais jaunâtre, pesant ʒiiiß gr. xvi. Cette chaleur n'ayant pu rien pousser au delà, je changeai le récipient, & j'augmentai par degrés le feu jusqu'à 500 d. & au delà: ce qui donna une huile épaisse, plus foncée & plus pesante, du poids de ʒvi. de façon que toute la distillation me rendit ℥i ʒii gr. xxvi. Au fond de la cucurbite il resta ʒi d'une matiere dure, très noire & brillante. J'avois donc perdu de ℥ii d'ambre le poids de ʒiv gr. xxxiv. qui avoit passé par les fentes du lut. En effet, après avoir achevé cette distillation, je pouvois observer de la maniere la plus manifeste, que l'huile avoit pénétré le lut en grande quantité. Cependant, toute l'huile que j'avois retirée de cette distillation, tant la premiere qui étoit plus claire, que la derniere qui avoit plus d'épaisseur, exhaloit une odeur empyreumatique, mêlée pourtant encore en quelque sorte à la douce odeur de l'ambre: ce qui fit que je la conservai avec les autres qui suivirent, pour les soumettre à une purification & rectification ultérieure. Mais, ce qui m'étonnoit fort dans ce travail, c'étoit de n'avoir encore obtenu aucun sel volatil acide, surtout après ce que M. *Geoffroy* dit de l'ambre-gris, dans son Traité *de la matiere médicale*, Tom. I. p. 287. de l'Edition de Paris, 1743. *in* 12. „Dans la distillation l'ambre donne d'abord un flegme „insipide, ensuite une liqueur, ou un esprit acide, & une huile jaunâ„tre odorante, avec quelque portion de sel salé acide, volatil, tel que „celui qu'on retire du succin. Enfin il reste au fond de la cornue une „matiere moins brillante & bitumineuse.“ Quoique ce célebre Chymiste n'indique le poids d'aucun de ces différens produits de l'ambre; comme je n'avois point du tout trouvé de ce sel volatil, je lavai soigneusement avec de l'eau chaude nette la cucurbite, l'alembic & le récipient, je filtrai cette eau par un papier brouillard, & la fis enfin évaporer à la chaleur du Solèil; mais tout ce travail ne produisit aucun sel volatil. Seulement, d'après les opérations précédentes, je conçus le soupçon qu'il pouvoit se rencontrer quelque chose de gommeux & de

ſalin dans la compoſition de l'ambre, ou même une huile tout à fait ſubtile, qu'une chaleur de 180 degrés avoit fait monter dans la diſtillation précédente, chaleur par conſéquent de 34 degrés au deſſous de celle de l'eau bouillante; en ſorte que peut-être, avec l'eau bouillante, elle monteroit à la façon des huiles des végétaux diſtillés, pure & ſans avoir rien d'empyreumatique, ou bien elle reſteroit dans la décoction, ſéparée & ſurnageante.

II. Je renfermai donc de nouveau ℥ß d'ambre-gris avec ℥xv d'eau de pluye nette, dans une cucurbite de verre, & ayant adapté l'alembic & le récipient, je fis la diſtillation au feu de ſable, comme ci-deſſus, excepté que je donnai une ſituation horizontale à la cucurbite, & que je ne couvris de ſable que la matiere qui y étoit renfermée. Je pouſſai enſuite le feu par degrés, juſqu'à ce que l'eau vînt à bouillir avec la plus grande force, & que la diſtillation fût à peu près égale à la moitié de toute l'eau qui avoit été employée. Tout étant refroidi, j'ôtai l'appareil, & je trouvai dans le récipient une eau doucement laiteuſe, & qui ſentoit parfaitement l'ambre, ſans qu'il y eût cependant aucune huile; ce qui me cauſoit beaucoup de ſurpriſe. La cucurbite contenoit une décoction legerement teinte de couleur brune & trouble, à la ſurface de laquelle ſurnageoit une huile d'un brun foncé, tenace, adhérente au verre; ce qui n'étoit autre choſe que l'ambre même preſque changé par la ſeule cuiſſon avec l'eau, & conſervant pourtant ſon odeur naturelle. Il n'y avoit rien au fond au delà de cette décoction. J'en fis aiſément la décantation, que je conſervai dans un vaſe bien fermé; elle n'avoit preſque point d'odeur, & ſa ſaveur tiroit à l'amer. Je verſai ſur l'ambre reſté dans la cucurbite, où il étoit devenu en quelque ſorte liquide, autant d'eau nette de pluye, qu'en avoient emporté la diſtillation & la décoction, en réitérant le travail précédent: & comme, à la ſeconde fois, la décoction aqueuſe étoit auſſi colorée qu'à la premiere, j'ai réitéré ce travail pour la troiſieme, après quoi la décoction n'a été que peu ou point teinte, & en conſéquen-

quence j'ai cessé de travailler ultérieurement. Ayant donc conservé l'eau distillée qui avoit une odeur douce & agréable, & séparément la décoction tirée des trois distillations, j'ai filtré celle-ci par un papier brouillard, je l'ai épaissie à la chaleur du Soleil, & j'ai observé qu'en épaississant elle avoit recouvré à un certain point l'odeur d'ambre, & qu'elle avoit acquis une saveur foiblement acide. Enfin, la décoction pleinement desséchée a donné fort peu d'extrait, ou d'une masse gommeuse tirant à l'amertume, sans aucune parcelle de sel volatil. J'ai ajouté à l'ambre demeuré dans la cucurbite, & qui étoit devenu comme liquide en bouillant avec l'eau, ℥ι de pipes à tabac pilées; j'ai adapté l'alembic & le récipient; j'ai fait la distillation au feu de sable, en procédant parfaitement comme dans l'opération I, & en poussant par degrés, cela m'a donné, comme auparavant, outre un peu de phlegme, ʒιß d'une huile également empyreumatique.

III. Mais, pour savoir précisément combien d'huile distillée fourniroit une certaine quantité d'ambre-gris, j'en renfermai ℥ι mis en pieces, dans une très petite retorte, j'adaptai le récipient de façon que presque le tiers de la retorte entroit dans son bec, & ayant bien luté toutes les fentes, j'ensévelis exactement la retorte dans le sable, & je fis la distillation par degrés. J'eus d'abord un peu de phlegme, ensuite une huile claire jaunâtre, & enfin, ayant donné au feu toute la force possible, il sortit une huile de couleur foncée & plus épaisse. Tous les vaisseaux étant refroidis, je séparai le recipient, & je trouvai que tout ce qui s'y étoit distillé, pesoit ʒvııß, moins gr. ıv, de sorte qu'il falloit au moins gr. xxxıv pour suppléer à la quantité totale de l'ambre qui avoit été employé. La partie intérieure du haut de la retorte étoit toute teinte en rouge, & la poix qui entre dans la composition de l'ambre, rendoit une odeur empyreumatique. Au fond de la retorte il y avoit une terre legere, fragile, noire & brillante, qui pesoit gr. xxx ou ʒß.

IV. Je versai sur une ℥ß d'ambre pulvérisé ℥iv d'alcohol de vin, dans une petite cucurbite de verre à long col, bien bouchée & fermée; je l'exposai ainsi à la chaleur du Soleil en secouant souvent le vase, afin que l'ambre vînt à se dissoudre autant qu'il étoit possible. Je fis la décantation & je versai de nouveau sur la solution une plus petite quantité d'alcohol, réitérant ce travail jusqu'à ce que l'ambre fût entierement dissous. Je mis toute la solution claire & nette dans une cucurbite de verre avec un alembic de verre & un récipient, & le tout étant luté, je séparai par une distillation très douce la moitié de l'alcohol, qui se consuma. L'essence de l'ambre étoit claire, d'un jaune brun, d'une odeur forte & agréable, d'une saveur tirant à l'amer; & dans l'eau ou le vin, elle devenoit fort laiteuse. Après la solution de l'ambre avec l'alcohol, il restoit au fond de la cucurbite un peu de poudre noirâtre, legere, qui, desséchée à une chaleur douce du Soleil, pesoit à peine gr. V.

De toute cette analyse chymique il semble résulter; que l'ambre-gris n'appartient en aucune maniere au regne animal, ni au regne végétal, mais qu'on peut & doit effectivement le ranger dans le regne minéral. Car, s'il étoit d'une nature végétale, il est incontestable que dans l'opération II. l'huile distillée auroit passé avec l'eau, comme ceux qui sont versés dans la Chymie savent que cela arrive par rapport à tous les végétaux odoriférans. Il paroit bien à la vérité par la même opération, que l'eau distillée a été en quelque sorte laiteuse & a exhalé de l'odeur; mais, après que cette eau eut reposé environ un mois, la pellicule blanche qui la couvroit, gagna le fond, & l'eau demeura claire & presque sans odeur; ce qui prouve suffisamment que ce changement causé par la force de l'eau bouillante n'avoit rien de constant. Qu'il y ait néanmoins quelque chose de gommeux, salin & acide, dans la composition de l'ambre, c'est ce que semble démontrer la décoction aqueuse brune que fournit la même opération; mais le desséchement de cette décoction, fait d'une maniere circon-

conſpecte, montre en même tems à combien peu cette ſubſtance montoit, puiſqu'elle ne paſſoit pas le poids d'un grain. L'analyſe prouve également que l'ambre-gris eſt étranger au regne animal, puiſque, dans les procédés I & III. il n'y a eu ni phlegme, ni eſprit, ni huile, tant volatils qu'alcalins ou urineux: ce qui eſt cependant propre aux ſeuls animaux & à leurs parties quelconques, à l'exception de quelques végétaux en petit nombre. Quelques uns des produits chymiques de l'ambre-gris ont à la vérité rendu une odeur empyreumatique; mais, ſuivant moi, on doit plutôt l'attribuer au ſel marin impur, & en particulier à ſon principe ammoniacal, dont l'ambre paroit avoir été ſouillé en flottant longtems dans la ſalure de l'Océan. En effet, la purification du ſel marin témoigne aſſez manifeſtement que le ſel marin renferme quelque choſe de ſemblable au ſel animal; & il ne faut pas s'en étonner, vu la prodigieuſe quantité d'animaux que la mer renferme dans ſon ſein, au point qu'on pourroit mettre en queſtion s'il s'en trouve plus ſur la ſurface de la terre qu'au fond des eaux.

Puiſque l'ambre-gris ne tire donc ſon origine, ni du regne végétal, ni du regne animal, il ne lui reſte plus d'autre berceau que le regne minéral; à quoi s'accordent tous les produits chymiques qui ont été rapportés ci-deſſus, auſſi bien que l'Hiſtoire naturelle qui a fait le ſujet du premier Mémoire. En effet, le phlegme & l'eſprit, doués l'un & l'autre de quelque acidité, qui montent d'abord dans les opérations I & III. & même la propre huile d'ambre, conviennent en pluſieurs choſes avec les diſtillations du ſouffre, du bitume, de la naphte, du pétrole, des charbons de terre, & principalement du ſuccin; de façon qu'à l'égard de ce dernier la différence des produits chymiques ſe réduit à fort peu de choſe, ſi l'on excepte le ſel volatil acide, qui ne ſe trouve pas dans l'ambre-gris, ou qui n'y eſt du moins qu'en très petite quantité. Néanmoins on a lieu de ſoupçonner qu'il y eſt caché, & qu'il ſe manifeſteroit ſi l'on pouvoit ſoumettre à la fois à l'examen chymique une quan-

quantité considérable, quelques livres, par exemple, de cette précieuse substance. Ce qui conduit à ce soupçon, c'est la masse (*magma*) demeurée de la décoction, dans le procédé III. après une douce évaporation; masse dont la saveur étoit parfaitement acide. Dans la solution avec l'alcohol, l'ambre-gris s'accorde aussi tout à fait avec le succin, comme on l'a vû dans le procédé IV. où, au moyen de la chaleur du Soleil, toute la substance de l'ambre s'est montrée en solution, n'étant resté que gr. v. des débris d'une ℥ß. L'ambre-gris est même plus promtement dissous par l'alcohol que le succin, qui n'y parvient gueres à une entiere solution, à moins qu'on ne le fasse bouillir.

Tout cela engage, ce me semble, à conclure que l'ambre-gris véritable est du genre fossile, terrestre, ou minéral; qu'il se trouve d'abord en forme presque liquide dans la Mer ou dans l'Océan des Indes, flottant & nageant à sa surface; que lorsqu'il approche des rivages, les insectes, les oiseaux & les poissons le dévorent avec avidité; & si ces animaux sont petits, la consistance encore glutineuse & molle de l'ambre, semblable à de la poix, leur embarrasse les intestins, les fait mourir, ou les rend faciles à prendre; d'où il arrive que, dans la substance même de l'ambre, après qu'elle est durcie, on trouve quelquefois des insectes, des coquillages, du gravier, & même des membres de petits oiseaux; comme j'ai dit ci-dessus que j'avois tiré d'une piece d'ambre des becs, des ongles, & même la tête entiere d'un de ces petits oiseaux. Mais, si quelque poisson d'une de ces especes énormes qui se rencontrent fréquemment dans l'Océan des Indes, & dont la gueule & le gosier sont d'une largeur prodigieuse, (les Indiens les nomment *Casilots*,) en avale trop, il devient aussi languissant, malade, & ne peut pas vivre longtems, de sorte qu'il meurt, ou se laisse aisément prendre. Dans l'un & dans l'autre de ces cas, les habitans des Iles Moluques accourent en affluence dans des barques, ils tuent le Casilot s'il est vivant,

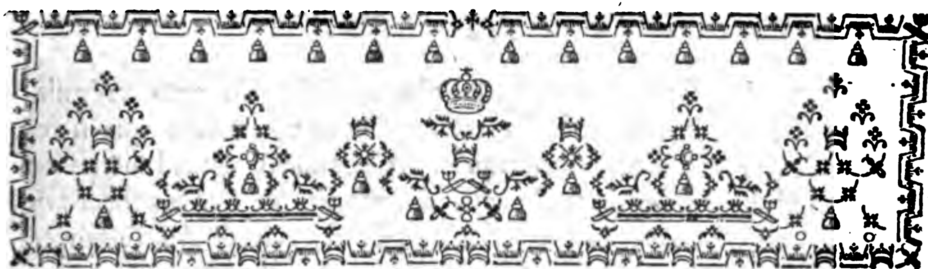
vivant, & le traînent mort fur le rivage, où ils lui fendent l'eftomac & en tirent des morceaux prodigieux d'Ambre-gris, revêtus d'une peau glutineufe, rance & de mauvaife odeur; ils les nettoyent & les partagent en pieces fuivant le nombre des affociés à ce travail, qui, vû l'énorme grandeur du poiffon, eft ordinairement fort confidérable. Chacun d'eux vend enfuite fon morceau, quand il en trouve l'occafion, à des Européens, ou il l'échange contre des chofes dont il a befoin. Mais, quand le Roi de la contrée vient à en être informé, il ordonne quelquefois que le morceau foit confervé en fon entier, & l'on en fait préfent à la Compagnie ou on le lui vend. Quand auffi l'Ambre-gris, auparavant mou, ductile & prefque fluide, flotte longtems abandonné à lui-même fur l'Océan, il acquiert une confiftance folide, peut-être au moyen du fel marin & de la chaleur du Soleil, il durcit, & par la fucceffion du tems l'action véhémente des flots en pouffe des morceaux plus ou moins gros fur le rivage, où les habitans le recueillent & le vendent de la même maniere. Cette derniere efpece d'ambre eft beaucoup plus pure que la précédente, n'étant point gâtée par des infectes ou des parties de petits oifeaux, ou, ce qui eft beaucoup pire encore, par la liqueur gaftrique & glutineufe, foetide & putride, des gros poiffons qu'on nomme Cafilots.

On peut mettre en queftion: D'où vient cette liqueur ambrée, pour m'exprimer ainfi? Eft-ce de l'eau falée de la mer? Eft-ce du fond pierreux, fablonneux, ou terreftre de l'Océan? Eft-ce enfin du rivage de la mer, d'où il jailliroit à la façon du pétrole, feroit emporté par les flots, furnageroit à la furface de l'Océan fuivant les loix de la gravité fpécifique, durciroit & mûriroit? La premiere de ces opinions ne fauroit être reçue, parce que les produits chymiques ne donnent rien de falin; & pour les deux autres, elles ont beaucoup de probabilité; & l'on doit à mon avis s'y tenir jufqu'à ce que le hazard ou l'induftrie découvrent l'origine de l'Ambre-gris, & le montrent fortant des entrailles de la terre; comme cela vient d'arriver par rapport à l'Ambre de Pruffe ou au fuccin, dont de louables efforts ont procuré une connoiffance exacte.



MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

CLASSE
DE MATHÉMATIQUE.



NOUVELLE MÉTHODE DE DÉTERMINER LES DÉRANGEMENS DANS LE MOUVEMENT DES CORPS CÉLESTES, CAUSÉS PAR LEUR ACTION MUTUELLE. (*)

PAR MR. L. EULER.

Toute la Théorie de l'Astronomie se réduit aujourd'hui à la détermination du mouvement d'un corps, qui est poussé par des forces quelconques, qu'on peut regarder comme connues. En effet, toutes les recherches qu'on a faites jusqu'ici dans l'Astronomie, prouvent incontestablement que tous les corps célestes s'attirent mutuellement en raison de leurs masses & du quarré renversé de leurs distances, quoiqu'il y ait des cas où cette derniere proportion souffre quelque changement, lorsque le corps attirant n'est pas sphérique, & la distance en même tems peu considérable, comme il arrive à l'égard des Satellites de Jupiter, sur lesquels la force de cette planete s'écarte assez sensiblement de ladite proportion, à cause de son applatissement.

S 3 Mais

(*) Lû le 8 Juillet 1762.

Mais, dès que la distance des corps est plus considérable, cette irrégularité évanouit entierement, & l'attraction devient la même que si les corps étoient parfaitement sphériques. Cependant, quand même on seroit obligé de tenir compte de cette aberration, & que les forces ne suivroient pas exactement la raison renversée du quarré des distances, la méthode demeure la même, pourvû que cette aberration soit connue, & on aura toujours à résoudre le probleme suivant :

Toutes les forces dont un corps céleste est poussé, étant connues, déterminer son mouvement en sorte qu'on soit en état d'assigner pour tout tems la vraie place qu'il occupe dans le Ciel.

C'est sur ce probleme fondamental de toute l'Astronomie, que je vai faire les réflexions suivantes.

I. Le mouvement d'un corps céleste est censé régulier, lorsqu'il n'est attiré que vers un seul corps en repos, dont la force suit exactement la raison inverse du quarré des distances; ou bien, en cas que le corps attirant ait lui-même quelque mouvement, étant poussé par des forces quelconques, lorsque le corps attiré est outre cela poussé par les mêmes forces. C'est dans ces cas que le corps attiré décrit, autour de celui qui l'attire, une section conique conformément aux regles découvertes par Kepler: lequel mouvement étant fort aisé à déterminer, on peut bien le regarder comme parfaitement connu, & les autres mouvemens ne sont estimés irréguliers, qu'entant qu'ils s'écartent des regles Képlériennes. Ainsi le mouvement des planetes principales seroit régulier, si elles n'étoient poussées par d'autres forces, que celles qui les tire vers le centre du Soleil: & le mouvement de la Lune autour de la Terre seroit aussi régulier, si, outre la force attractive de la Terre, elle éprouvoit précisément les mêmes forces accélératrices qui agissent sur la Terre, quelqu'irrégulier que fût d'ailleurs le mouvement de celle-ci.

II. Mais il n'est que trop certain qu'un tel mouvement régulier ne se trouve pas dans tout le Ciel. Car, quelqu'exactement que la Terre

Terre & les autres planetes principales, à l'exception de Saturne & de Jupiter, ſemblent obſerver les regles de Kepler, le ſeul mouvement progreſſif de leurs abſides, dont aucun Aſtronome ne diſconvient plus, renferme une aberration très réelle de ces regles, quand même on voudroit encore douter de pluſieurs petites inégalités qu'on vient de découvrir dans leur mouvement même. Et puiſque les lignes des nœuds, dont les orbites des planetes ſe coupent mutuellement, ne ſe trouvent pas non plus en repos, c'eſt une preuve certaine que toutes les planetes ſont aſſujetties encore à d'autres forces que celle qui les pouſſe vers le Soleil. Tout cela prouve inconteſtablement l'action mutuelle que tous les corps céleſtes exercent les uns ſur les autres.

III. Il arrive bien, heureuſement, que ces dérangemens qu'on obſerve dans le mouvement des corps céleſtes, ſont pour la plûpart fort petits, ce qui nous met en état de les déterminer aſſez exactement par voie d'approximation, mais il s'en faut beaucoup que nous puiſſions nous vanter d'une connoiſſance parfaite de leurs mouvemens, étant obligés de négliger même une infinité de petites inégalités, leſquelles, quand même elles ſeroient pour la plûpart inſenſibles, prouvent ſuffiſamment combien peu nous ſommes encore avancés dans ces recherches. Après les ſoins de feu Mr. *Tobie Meyer*, dont la mort prématurée nous prive des plus importantes découvertes, on peut regarder le mouvement de la Lune comme preſqu'auſſi bien connu que celui de la Terre, l'erreur de ſes Tables ne montant jamais à une minute. Mais, ſi l'on exigeoit un plus haut degré de préciſion, & qu'on prétendît ſavoir le lieu de la Lune à une ſeconde près, il faudroit avouer que la méthode dont on s'eſt ſervi eſt inſuffiſante, & qu'elle ne ſauroit être portée à ce degré de préciſion.

IV. Il en eſt de même des dérangemens que les planetes ſe cauſent mutuellement par leurs forces attractives; à moins que l'effet ne ſoit très petit, la méthode qu'on emploie pour le déterminer, eſt aſſujettie à de très grands inconvéniens. Une des principales raiſons en eſt qu'on eſt obligé d'exprimer les dérangemens par des ſéries,

dont

les termes ne renferment que les ſinus ou coſinus de certains angles, de la même maniere qu'on repréſente les irrégularités dans le mouvement de la Lune: or, quand il s'agit de celles dont Jupiter & Saturne ſe troublent l'un l'autre, leur diſtance eſt trop différente dans leur conjonction & oppoſition, pour qu'on puiſſe exprimer l'effet de leurs forces par une telle ſérie convergente. De quelque maniere qu'on s'y prenne, on ne ſauroit jamais être ſûr que les termes qu'on eſt forcé de négliger, ne donnent un réſultat encore aſſez conſidérable. La grande inégalité que Mr. *de la Lande* vient de découvrir dans le mouvement de Saturne, & qui monte juſques à 14 minutes, provient ſans doute de ces termes qu'on a négligés dans le calcul, dont le nombre étant infini, on doit être d'autant moins ſurpris que la ſérie ellemême ſoit très peu convergente.

V. Dans ces recherches ſur la Lune & les planetes, on a tâché de déterminer les inégalités par des intégrations actuelles, en exprimant par des ſéries infinies les intégrales des équations différentio-différentielles, qui renferment toutes les déterminations du mouvement; ce qui ne peut ſe pratiquer que par des approximations très ennuyeuſes, & qui ne laiſſent que trop de doutes ſur la certitude. Mais, lorſqu'il s'agit des dérangemens que cauſe la force attractive d'une comete dans le mouvement d'une planete, ou réciproquement la force de celle-ci dans le mouvement d'une comete, tous ces ſecours deviennent entierement inutiles, & les ſéries auxquelles on ſeroit réduit en ſuivant la même méthode, perdroient leur convergence à un tel point qu'on n'en ſauroit plus rien conclure. Par cette raiſon, quand Mr. *Clairaut* entreprit de déterminer la retardation de la fameuſe Comete de 1682, qui ne fut de retour que l'an 1759, il a été obligé de ſuivre une route tout à fait différente, & de s'en tenir immédiatement aux équations différentio-différentielles, d'où ayant déduit par un travail incroyable tous les changemens quaſi momentanés, il en a conclu enfin l'effet tout entier que la force de Jupiter a du produire ſur cette comete. Il en ſeroit de même, ſi l'on vouloit déterminer l'effet qu'une

ne comete produit sur le mouvement de la Terre ou de quelqu'autre planete, dont elle s'approcheroit assez pour y causer un changement sensible.

VI. Après tant de recherches de cette nature, on peut presque prononcer, que tous les soins qu'on se donneroit pour découvrir les intégrales des équations primitives, qui sont toujours différenrentielles du second degré, seront perdus, & qu'on n'en sauroit attendre aucun secours. Pour ces raisons, je me propose ici d'examiner quel parti on peut tirer immédiatement des équations différentio-différentielles que les principes de la Mécanique nous fournissent; & de quelle maniere on peut par-là parvenir à une connoissance plus ou moins complette du mouvement que nous cherchons, sans nous engager dans les intégrations qui semblent surpasser notre portée. Dans cette vue, je vai commencer par les formules différentio-différentielles auxquelles les principes du mouvement nous conduisent immédiatement, & ensuite j'examinerai comment on les peut transformer, pour les rendre plus propres à l'usage astronomique. En voici le probleme.

PROBLEME I.

Les forces dont un corps céleste est poussé, étant données, trouver les formules différentio-différentielles qui renferment les changemens causés dans son mouvement.

SOLUTION.

Qu'on rapporte le lieu présent du corps, aussi bien que son mouvement, à un plan fixe pris à volonté, & qui soit le même que celui de la Planche. Sur ce plan on établit aussi une direction fixe OI tirée d'un point aussi fixe O. Que le corps en question se trouve maintenant dans un lieu quelconque Z, d'où l'on tire sur le plan la perpendiculaire ZY, & du point Y sur la direction fixe OI la perpendiculai- YX: de sorte que le lieu du corps soit déterminé par les trois coordonnées que je nomme: **Planche VII. Fig. 1.**

$$OX = x; \quad XY = y \quad \& \quad XZ = z.$$

Maintenant, de quelques forces que le corps ſoit pouſſé, on les peut toujours décompoſer en ſorte qu'il en réſulte trois forces qui agiſſent ſelon les mêmes directions ZP, ZQ & ZR. Soient donc ces trois forces

ſelon ZP $=$ P; ſelon ZQ $=$ Q & ſelon ZR $=$ R.

Cela poſé, prenant l'élément du tems dt conſtant, les principes du mouvement nous fourniſſent ces trois égalités:

$$\alpha ddx = Pdt^2;\quad \alpha ddy = Qdt^2;\quad \alpha ddz = Rdt^2$$

où α eſt une quantité conſtante qu'il faut déterminer par la maniere dont on exprime les forces rélativement au tems. Ainſi, exprimant la force de chaque corps céleſte par ſa maſſe diviſée par le quarré de ſa diſtance, & au lieu du tems introduiſant le mouvement moyen du Soleil, dont l'élément ſoit $= d\tau$; ſi nous poſons la maſſe du Soleil $= S$ & ſa diſtance moyenne à la Terre $= e$, on aura $\alpha = \frac{S}{e^3}$ en écrivant $d\tau$ au lieu de dt: en ſorte que τ exprime l'angle décrit par le Soleil autour de la Terre dans le tems t, ſelon le mouvement moyen.

Remarque I. Je ſuppoſe ici le point O avec le plan OXY en repos; mais ordinairement on prend le point O dans le centre d'un corps céleſte, auquel on rapporte le mouvement du corps en queſtion Z. Dans ce cas, à moins que ce corps en O ne ſoit effectivement en repos, comme ſi l'on y mettoit le Soleil, il faut auſſi tenir compte du mouvement de ce corps, ou plutôt des forces qui le produiſent. Alors il ne s'agit que de faire un léger changement dans nos formules: on n'a qu'à décompoſer les forces qui agiſſent ſur le corps O ſelon les mêmes trois directions, & les appliquer en ſens contraire encore au corps Z, outre celles qui y agiſſent actuellement. Après ce changement, nos formules exprimeront le mouvement reſpectif du corps Z, par rapport au corps O, ou tel qu'il paroit à un Spectateur placé dans le centre du corps O. Or alors, le point O n'étant plus en repos, il faut toujours tirer les trois coordonnées en ſorte qu'elles demeurent paral-

paralleles à trois directions fixes, ou dirigées toujours vers les mêmes points du Ciel. Ainſi nos formules s'appliquent également, tant au mouvement abſolu du corps Z, qu'à ſon mouvement reſpectif à l'égard d'un autre corps quelconque, pourvu qu'on comprenne auſſi dans les lettres P, Q & R les forces accélératrices qui agiſſent ſur le corps O, mais dans un ſens contraire.

Remarque II. Soit qu'on ſe ſerve immédiatement de ces formules, ſoit qu'on les transforme en d'autres formes quelconques, on n'en ſauroit tirer aucun fruit à moins que pour un certain tems donné on ne connoiſſe, tant le lieu du corps Z, que le mouvement qu'il a dans cet inſtant. Dans ce moment donc, les trois coordonnées x, y & z ſeront connues, qui déterminent le lieu du corps Z: or, à cauſe du mouvement qui eſt auſſi connu, on tirera les viteſſes ſelon les trois directions fixes, ou, ce qui revient au même, les trois valeurs $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ ſeront connues. Maintenant, ces élémens étant donnés, on demande une ſolution par laquelle l'on puiſſe déterminer pour tout autre tems, tant le lieu que le mouvement du même corps. L'intégration de nos formules nous procureroit ſans doute cet avantage; mais, comme nous ſommes obligés d'y renoncer en général, nous devons borner nos recherches à un tems peu conſidérable, écoulé depuis l'époque marquée, où le lieu avec le mouvement du corps eſt connu: & partant je m'appliquerai à la ſolution du probleme ſuivant.

PROBLEME II.

Le lieu & le mouvement du corps étant connus pour une époque donnée, avec les forces qui agiſſent ſur le corps, déterminer pour un tems peu conſidérable écoulé depuis cette époque, tant le lieu que le mouvement du corps.

SOLUTION.

Que le tems t réponde à l'époque proposée, où les trois coordonnées x, y & z déterminent le lieu du corps, & sont par conséquent données; à cause de son mouvement pareillement donné, les quantités suivantes seront aussi connues

$$\frac{dx}{dt} = p, \quad \frac{dy}{dt} = q \quad \& \ \frac{dz}{dt} = r.$$

Ces valeurs étant introduites dans nos formules à cause de $ddx = dpdt$, $ddy = dqdt$ & $ddz = drdt$, nous fournissent

$$\alpha dp = Pdt, \quad \alpha dq = Qdt \quad \& \ \alpha dr = Rdt.$$

Maintenant, si l'on demandoit l'état du corps après un tems infiniment petit dt, depuis l'époque établie, nous aurions pour son lieu les coordonnées

$$x + dx = x + pdt, \ y + dy = y + qdt, \ z + dz = z + rdt,$$

& pour son mouvement les quantités

$$p + dp = p + \frac{1}{\alpha}Pdt, \ q + dq = q + \frac{1}{\alpha}Qdt, \ r + dr = r + \frac{1}{\alpha}Rdt,$$

& ces formules pourront avoir lieu quand on prend pour dt un tems fini, mais extrèmement petit, en sorte que, plus on le supposera petit, & moins on s'écartera de la vérité. Mais marquons le tems écoulé après l'époque par τ, & soient alors les trois coordonnées x', y'. z', & les trois quantités pour la détermination du mouvement p', q', r', dont il s'agit de définir les valeurs. Or ces quantités pouvant être regardées comme des fonctions du tems $t + \tau$, pendant que les primitives sont de semblables fonctions du tems t, nous aurons par les principes de l'analyse:

$$x' = x + \frac{\tau dx}{dt} + \frac{\tau^2 ddx}{2dt^2} + \frac{\tau^3 d^3x}{6dt^3} + \frac{\tau^4 d^4x}{24dt^4} + \text{etc.}$$

& ainsi des autres. Or, puisque $\frac{dx}{dt} = p$ & $\frac{dp}{dt} = \frac{1}{\alpha} P = \frac{ddx}{dt^2}$

d'où

d'où nous tirons outre cela:

$$\frac{d^3x}{dt^3} = \frac{dP}{\alpha dt}; \quad \frac{d^4x}{dt^4} = \frac{ddP}{\alpha dt^2} \quad \text{etc.}$$

& partant les trois coordonnées cherchées seront:

$$x' = x + \tau p + \frac{\tau\tau P}{2\alpha} + \frac{\tau^3 dP}{6\alpha dt} + \frac{\tau^4 ddP}{24\alpha dt^2} + \frac{\tau^5 d^3P}{120\alpha dt^3} + \text{etc.}$$

$$y' = y + \tau q + \frac{\tau\tau Q}{2\alpha} + \frac{\tau^3 dQ}{6\alpha dt} + \frac{\tau^4 ddQ}{24\alpha dt^2} + \frac{\tau^5 d^3Q}{120\alpha dt^3} + \text{etc.}$$

$$z' = z + \tau r + \frac{\tau\tau R}{2\alpha} + \frac{\tau^3 dR}{6\alpha dt} + \frac{\tau^4 ddR}{24\alpha dt^2} + \frac{\tau^5 d^3R}{120\alpha dt^3} + \text{etc.}$$

& par le même fondement nous aurons pour le mouvement du corps

$$p' = p + \frac{\tau P}{\alpha} + \frac{\tau^2 dP}{2\alpha dt} + \frac{\tau^3 ddP}{6\alpha dt^2} + \frac{\tau^4 d^3P}{24\alpha dt^3} + \text{etc.}$$

$$q' = q + \frac{\tau Q}{\alpha} + \frac{\tau^2 dQ}{2\alpha dt} + \frac{\tau^3 ddQ}{6\alpha dt^2} + \frac{\tau^4 d^3Q}{24\alpha dt^2} + \text{etc.}$$

$$r' = r + \frac{\tau R}{\alpha} + \frac{\tau^2 dR}{2\alpha dt} + \frac{\tau^3 ddR}{6\alpha dt^2} + \frac{\tau^4 d^3R}{24\alpha dt^3} + \text{etc.}$$

où je n'ai qu'à remarquer que les forces P, Q, R étant données, puisqu'elles dépendent en partie des coordonnées x, y, z, & en partie du lieu & du mouvement des corps dont elles résultent, leurs valeurs différentielles $\frac{dP}{dt}$, $\frac{ddP}{dt^2}$ etc. seront aussi exprimées par des quantités finies & connues; de sorte que ces séries infinies expriment exactement les quantités que nous cherchons.

Remarque I. Si l'intervalle de tems τ est infiniment petit, ces formules nous fournissent les mêmes valeurs que la différentiation; mais, pour peu que cet intervalle τ soit considérable, on sentira aisément combien les déterminations différentielles s'écartent de la vérité.

Remarque II. Plus cet intervalle de tems τ eſt pris grand, & moins les ſéries trouvées ſeront convergentes ; on ſera donc obligé d'en prendre d'autant plus de termes depuis le commencement, pour arriver au même point de préciſion. Cependant, quelque nombre de termes qu'on en veuille prendre, il ne ſera jamais convenable de donner à τ une trop grande valeur, de peur que les termes négligés ne deviennent trop conſidérables. Car, quoique les termes ſuivans ſoient diviſés par de plus grands nombres, il arrive ordinairement que les valeurs fournies par la différentiation réitérée $\frac{dP}{dt}$, $\frac{ddP}{dt^2}$, $\frac{d^3P}{dt^3}$ etc. vont auſſi en augmentant, de ſorte que pour la plûpart la convergence dépend plutôt de la petiteſſe de l'intervalle τ, que de la grandeur des dénominateurs.

Remarque III. Or, ayant trouvé par cette méthode l'état du corps pour le tems $t + \tau$, ou bien les quantités x', y', z', p', q', r', en les ſubſtituant au lieu des primitives x, y, z, p, q, r, on paſſera de la même maniere encore plus loin, & on déterminera l'état du corps pour le tems $t + 2\tau$. Mais alors il faut que les forces P, Q, R, ſoient auſſi connues pour le tems $t + \tau$, ce qu'on peut bien ſuppoſer, quand le mouvement des autres corps qui agiſſent ſur le corps Z eſt connu. Mais, en cas que leur mouvement fût auſſi troublé, on ſeroit obligé de chercher par la même méthode l'état de chacun pour le tems $t + \tau$, avant que de paſſer à un nouvel intervalle de tems τ. Par ce moyen, en réitérant pluſieurs fois les mêmes opérations, on parviendra enfin à la connoiſſance du mouvement pour un tems auſſi éloigné de la premiere époque qu'on voudra, & cela ſans le ſecours d'aucune intégration.

Remarque IV. Plus on prendra les intervalles de tems τ petits pour parvenir à ce but, & plus de fois on ſera obligé de répéter les mêmes opérations. Ainſi, pour le tems $t + T$, en prenant $\tau = \frac{T}{n}$, il faudra répéter ces opérations n fois. De là naît cette queſtion

aſſez

assez importante : puisque dans chaque opération on admet une petite erreur, qui étant réitérée devient enfin considérable, s'il vaut mieux donner à τ des valeurs plus petites ou plus grandes, attendu que dans le premier cas les erreurs, quoique plus petites, sont multipliées par un plus grand nombre que dans l'autre ? Pour décider cette question, supposons qu'on prenne de nos séries les trois premiers termes, de sorte que l'erreur commise puisse être estimée par le quatrieme terme, & partant $= \lambda\tau^3$. Soit maintenant le tems entier $T = n\tau$, de sorte que les opérations doivent être répétées n fois, & l'erreur totale sera $= n\lambda\tau^3 = \lambda\tau\tau T$; d'où l'on voit que, plus on prend l'intervalle τ petit, & plus sera aussi petite l'erreur totale qui en résulte, nonobstant la plus grande replication : dans la supposition qu'on n'emploie dans le calcul que les trois premiers termes, l'erreur totale sera diminuée en raison du quarré de l'intervalle τ : & si l'on vouloit se servir de 4 termes, cette diminution suivroit la raison du cube de l'intervalle τ.

Remarque V. Il est donc toujours fort important de prendre les intervalles de tems τ aussi petits que les circonstances le permettent, quoiqu'en prenant plusieurs termes des séries on puisse en admettre d'assez considérables. Cependant il est aisé de se décider là-dessus : car, supposant l'erreur d'une opération $= \lambda\tau^3$, en employant trois termes, si l'on veut passer au tems T écoulé de la premiere époque, on n'a qu'à égaler $\lambda\tau\tau T$ à l'erreur qu'on veut éviter dans le résultat final, & de là on tirera la valeur du tems τ. Alors il seroit bien superflu de prendre cet intervalle encore plus petit. C'est ainsi qu'on pourra atteindre à un degré de précision aussi haut qu'on souhaite, & étendre cette détermination du mouvement à des tems très éloignés, sans qu'on ait à craindre des erreurs sensibles.

OBSERVATION.

En considérant bien cette méthode, elle me paroit si aisée & si propre à la pratique, au moyen des précautions que je viens d'indiquer,

quer, que nous pouvons aiſément renoncer à la ſolution complette, qui ſe fait par l'intégration. Car, quand même on réuſſiroit un jour à réſoudre le fameux probleme des trois corps, de ſorte qu'on pût déterminer en général par des expreſſions finies le mouvement de trois corps quelconques, qui s'attirent mutuellement, ces expreſſions ſeroient certainement ſi compliquées & enveloppées de toutes les quantités inconnues qui entrent dans le calcul, qu'il ſeroit peut-être impoſſible de les débrouiller & d'en faire l'application au calcul aſtronomique. Il faudroit ſans doute recourir à des approximations extrèmement embaraſſantes, & on riſqueroit toujours de ſe tromper beaucoup plus que ſuivant la méthode que je viens d'indiquer. Il eſt bien vrai qu'une telle ſolution nous montreroit également l'état du mouvement des trois corps pour tous les tems, quelque éloignés qu'ils fuſſent d'une certaine époque pour laquelle le mouvement ſeroit connu, & on ne ſe tromperoit gueres plus après pluſieurs ſiécles qu'après quelques heures, ſuppoſé que le mouvement eût été une fois parfaitement bien connu. Mais la moindre incertitude à cet égard, qu'on ne ſauroit jamais éviter, ôtera auſſi cette préférence à une ſolution parfaite. Pour peu qu'on ſe trompât dans la détermination du mouvement pour une époque fixe, les erreurs qui en réſulteroient dans la ſuite, iroient toujours en augmentant; & après un tems très conſidérable, elles rendroient les concluſions auſſi incertaines que la méthode propoſée. Je n'héſite donc pas à préférer cette méthode à la ſolution parfaite du probleme de trois corps, qu'on recherche avec tant d'empreſſement, vu que le calcul ſeroit non ſeulement incomparablement plus difficile, mais que nous n'en ſerions pas moins incertains pour des tems fort éloignés.

Mais il y a plus: cette nouvelle méthode l'emporte auſſi à d'autres égards ſur la ſolution parfaite du probleme des trois corps, quand même on ſeroit aſſez heureux pour y réuſſir, & que l'application au calcul n'auroit aucune difficulté; puiſque, dès qu'un quatrieme corps y concourroit par ſon action, tout le ſuccès en ſeroit anéanti, à moins qu'on ne pût

pût étendre la solution à quatre corps & plus, ce qu'on ne sauroit jamais espérer, sans parler des difficultés insurmontables qui en réjailliroient sur le calcul. Mais la méthode que je propose, s'exécute avec la même facilité, quelque grand que soit le nombre des corps qui agissent sur celui dont on cherche le mouvement: on n'a qu'à en comprendre les forces dans les lettres P, Q, R, ce qui se fait sans la moindre difficulté; & quand même quelque comete surviendroit, on en tiendroit compte aussi aisément sans que le calcul en fût dérangé, ce qui ne sauroit jamais se pratiquer dans l'autre méthode, qu'on regarde comme parfaite.

Cependant je ne saurois disconvenir d'un assez grand inconvénient de ma méthode, qui est que, pour déterminer le lieu & le mouvement du corps pour quelque tems éloigné de l'époque établie dans le calcul, on est obligé de passer par tous les tems intermédiaires; & qu'on ne sauroit, par exemple, assigner la place de la Lune après un an sans calculer en même tems ses places pour tous les jours. C'est sans doute un très grand avantage des Tables Astronomiques, qu'elles nous découvrent d'abord pour tous les tems les lieux des corps célestes, sans que nous ayons besoin de suivre presque pas à pas leurs mouvemens. Si cet avantage pouvoit subsister avec tous les dérangemens auxquels les corps célestes sont assujettis, ce seroit sans doute tout ce qu'on pourroit souhaiter. Mais, comme cet avantage n'est attaché qu'aux mouvemens réguliers, & à ceux tout au plus qui ne s'en écartent pas sensiblement, nous devrions bien y renoncer quand il s'agit de connoitre plus exactement toutes les inégalités qui y sont causées par leur action mutuelle. D'ailleurs, il n'est rien moins que superflu de chercher pour tous les jours, & pour des intervalles plus petits encore, les lieux des corps célestes: & ceux qui s'occupent à calculer les éphémérides, suivent précisément la même route. C'est sans doute un grand travail que de calculer le lieu de la Lune par les Tables de feu M. *Meyer*, tant pour le midi que pour le minuit de chaque jour, dont M. *de la Lande* veut bien se charger dans la Connoissance des tems: & j'ose presque assûrer que, si l'on

 vou-

vouloit calculer les lieux de la Lune pour les mêmes tems ſuivant cette nouvelle méthode, cela ſe pourroit faire avec moins de peine. Quand même cela couteroit un peu davantage, n'en ſeroit-on pas amplement récompenſé par le plus haut degré de préciſion, qu'on atteindroit par ce moyen, en rendant tout à fait inſenſibles les erreurs qui dans les tables peuvent bien monter jusqu'à une minute. Mais ce n'eſt pas encore tout: on pourroit même, ſans rendre le calcul plus pénible, tenir compte des forces que les planetes exercent ſur la Lune: & il eſt aſſez vraiſemblable que l'effet de Vénus & de Mars, & peut-être auſſi de Jupiter, eſt aſſez ſenſible, lorſque ces planetes ſe trouvent dans leurs périgées. Comme ceux qui calculent les éphémérides, déterminent pour tous les jours les lieux de ces planetes, la conſidération de leurs forces ſur la Lune n'augmenteroit preſque point les travaux du calcul, & ſi l'on étoit curieux d'apprendre ſi la derniere comete n'a rien changé dans le mouvement de la Lune, ce ſeroit ſans contredit le ſeul moyen de s'en aſſurer. Or, calculant pour tous les tems de ſuite les valeurs des trois coordonnées x, y, z, il eſt aiſé d'en déduire les déterminations dont on ſe ſert dans l'Aſtronomie: comme, ſi le plan OXY eſt celui de l'écliptique, & que la droite OI ſoit dirigée vers ſon commencement, l'angle XOY donnera la longitude, & l'angle YOZ la latitude; & je ne crois pas qu'il en valût la peine, de transformer nos formules primitives, pour en tirer immédiatement ces angles avec la diſtance OZ. Surtout, quand les dérangemens ſont très conſidérables, on fera mieux de s'en tenir aux formules les plus ſimples. Mais, pour ſatisfaire à ceux qui, ſelon la maniere reçue parmi les Aſtronomes, voudroient être éclaircis ſur les abſides, excentricités, lignes des nœuds & inclinaiſons des orbites, & les changemens cauſés dans ces élémens, je vais ajuſter les formules primitives à ce deſſein.

Sur la ligne des nœuds & l'inclinaiſon de l'orbite.

La direction du mouvement du corps Z avec le point fixe O détermine un plan, qu'on nomme le plan où le corps ſe meut à préſent, ou le plan de ſon orbite, & qui coupera le plan fixe OXY, auquel

quel on rapporte le mouvement, selon une ligne droite ON, qu'on nomme la ligne des nœuds. Ici il y a deux choses qu'il faut introduire dans le calcul, premierement la position de cette ligne des nœuds ON, ou l'angle ION, qu'on nomme la longitude du nœud, & ensuite l'inclinaison de l'orbite au plan fixe OXY, ou bien l'angle que fait avec ce plan celui qui passe par le point Z & la ligne ON. Posons donc

la longitude du nœud, ou l'angle ION $= \psi$
& l'inclinaison de l'orbite au plan fixe $= \omega$.

Outre cela, pour rapporter le lieu du corps Z à ces élémens, soit l'angle que fait la ligne OZ avec la ligne des nœuds ON qu'on nomme l'argument de latitude, ou l'angle ZON, $= \sigma$. Lorsque le mouvement du corps se fait dans le même plan, les deux angles ψ & ω demeurent invariables, ce qui arrive dans le mouvement régulier. Mais, dans le mouvement irrégulier, que j'ai ici principalement en vue, il faut considérer ces élémens comme variables, & alors leur variabilité se trouve dans un certain rapport avec l'angle σ, qu'on détermine le plus commodément par la Trigonométrie sphérique.

I. En plaçant le point fixe O dans le centre de la sphere, le plan fixe représentera sur la surface le grand cercle INP, sur lequel la ligne des nœuds marque le point N, & la direction fixe OI le point I; or Z soit le lieu apparent du corps sur la surface de la sphere. Qu'on tire l'arc d'un grand cercle ZN, qui représente le plan de l'orbite, & cet arc sera mesuré par l'argument de latitude $\sigma = NOZ$: enfin l'angle PNZ sera le même que celui de l'inclinaison ω, de sorte que nous ayons sur la sphere Fig. 2.

l'arc IN $= \psi$; l'arc NZ $= \sigma$ & l'angle PNZ $= \omega$.

II. Maintenant, si la ligne des nœuds avec l'inclinaison est variable, ou bien que le plan de l'orbite change, il faut bien que ce plan changé passe encore par le même point Z, puisque le lieu du corps peut être regardé comme commun à l'un & l'autre état. Supposons

donc que dans un instant la ligne des nœuds passe en n, & que le plan de l'orbite soit alors l'arc nZ: nous obtiendrons par-là $Nn = d\psi$ & l'inclinaison changée $PnZ = \omega + d\omega$. Qu'on tire nm perpendiculaire sur NZ; & on aura $Nm = d\psi \cos\omega$, donc $Zn = \sigma - d\psi\cos\omega$, de sorte que $- d\psi\cos\omega$ puisse être considéré comme le différentiel de σ.

III. Donc, tirant de Z sur le cercle IP l'arc ZP perpendiculairement, puisque le triangle ZNP donne $\sin ZP = \sin\sigma \sin\omega$, & le triangle ZnP donne $\sin ZP = \sin(\sigma - d\psi\cos\omega) \sin(\omega + d\omega)$, il est clair que le différentiel de la formule $\sin\sigma \sin\omega$ évanouit en posant $d\sigma = - d\psi \cos\omega$. De là nous tirons:

$$- d\psi\cos\omega . \cos\sigma \sin\omega + d\omega \sin\sigma \cos\omega = 0, \text{ donc } d\psi = \frac{d\omega \sin\sigma}{\cos\sigma \sin\omega}$$

& partant les changemens de la ligne des nœuds & de l'inclinaison dépendent de telle sorte l'un de l'autre, que connoissant l'un on détermine aisément l'autre, ce qui nous sera d'un très grand secours dans les recherches suivantes.

IV. Cette représentation sur la sphere nous fournit encore d'autres déterminations, qui demanderoient sans ce moyen des calculs assez pénibles. D'abord, supposant que le corps parvienne de Z en z pendant que la ligne des nœuds avance de N en n, l'argument de latitude sera à présent l'arc nZz, & partant $= \sigma + d\sigma$: mais nous venons de trouver $nZ = \sigma - d\psi \cos\omega$, par conséquent nous aurons $Zz = d\sigma + d\psi \cos\omega$. Or Zz marque l'angle élémentaire que le corps Z décrit un instant autour du point fixe O; donc, si nous posons cet angle $= d\Phi$, nous aurons

$$d\Phi = d\sigma + d\psi\cos\omega, \quad \text{ou bien } d\sigma = d\Phi - d\psi \cos\omega$$

V. De là nous définirons aussi aisément le changement même qui se fait dans le plan de l'orbite, ou combien après un instant le plan de l'orbite est incliné à son plan précédent. Il est évident que l'angle NZn exprime ce changement élémentaire. Or cet angle se trouve

ve NZn $=$ mn : ſin NZ, qui à cauſe de $mn = \mathrm{d}\psi \sin\omega$ ſe réduit à

$$NZn = \frac{\mathrm{d}\psi \sin\omega}{\mathrm{f}\sigma} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\cos\sigma}$$

de ſorte que cet angle eſt toujours plus grand que le changement de l'inclinaiſon.

Introduction de ces nouveaux élémens dans le calcul.

I. Poſant donc l'angle ION $= \psi$, qu'on tire du point Y ſur la ligne des nœuds ON, la perpendiculaire YN, & la droite ZN y étant auſſi perpendiculaire, l'angle YNZ meſurera l'inclinaiſon de l'orbite, de ſorte que YNZ $= \omega$. Enſuite, tirant la droite OZ, nous aurons l'angle NOZ $= \sigma$. Soit maintenant la diſtance du corps Z au point fixe O, ou OZ, $= v$, & de là nous aurons: Fig. 3.

$$ON = v \cos\sigma \quad \& \quad ZN = v \sin\sigma$$

d'où le triangle NZY fournit

$$ZY = v \sin\sigma \sin\omega \quad \& \quad NY = v \sin\sigma \cos\omega.$$

De là nous déterminerons nos trois coordonnées de la maniere ſuivante

$$OX = x = ON\cos\psi - NY\sin\psi = v\cos\sigma\cos\psi - v\sin\sigma\cos\omega\sin\psi$$

$$XY = y = ON\sin\psi + NY\cos\psi = v\cos\sigma\sin\psi + v\sin\sigma\cos\omega\cos\psi$$

$$\& \quad YZ = z = v\sin\sigma\sin\omega.$$

II. Que dans le tems dt le corps avance de Z en z, pour avoir O$z = v + \mathrm{d}v$, & puiſque l'angle élémentaire ZO$z = \mathrm{d}\phi = \mathrm{d}\sigma + \mathrm{d}\psi\cos\omega$, comme nous venons de trouver, nous aurons l'élément Z$z = \sqrt{(\mathrm{d}v^2 + vv\,\mathrm{d}\phi^2)}$. Mais, par les coordonnées, ce même élément eſt Z$z = \sqrt{(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)}$, de ſorte que

$$\mathrm{d}v^2 + vv\,\mathrm{d}\phi^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$$

& partant prenant les différentiels, en écrivant pour ddx, ddy, ddz leurs valeurs des formules primitives:

$$d.(dv^2 + vvd\phi^2) = \frac{2dt^2}{\alpha}(Pdx + Qdy + Rdz)$$

ou en indiquant seulement les intégrales:

$$dv^2 + vvd\phi^2 = \frac{2dt^2}{\alpha} \int (Pdx + Qdy + Rdz).$$

III. Mais, pour éliminer aussi les différentiels dx, dy & dz, je remarque que les différentiels qui se rapportent au changement du point Z, doivent provenir les mêmes, soit qu'on prenne les angles ψ & ω variables, soit qu'on les suppose constans, en mettant alors $d\sigma = d\phi$, puisque le point z appartient également au plan primitif de l'orbite qu'au changé: cette remarque abrégera très considérablement les différentiations que nous avons à faire; cependant si l'on veut se donner la peine de différentier en général, on arrivera aux mêmes résultats, pourvu qu'on tienne compte de $d\psi = \frac{d\omega \sin\sigma}{\cos\sigma \sin\omega}$, & qu'on mette $d\phi$ à la place de $d\sigma + d\psi \cos\omega$.

IV. Ayant donc par les formules trouvées

$$\frac{x}{z} = \frac{\cos\sigma \cos\psi}{\sin\sigma \sin\omega} - \frac{\cos\omega \sin\psi}{\sin\omega} \quad \& \quad \frac{y}{z} = \frac{\cos\sigma \sin\psi}{\sin\sigma \sin\omega} + \frac{\cos\omega \cos\psi}{\sin\omega}$$

nous en tirerons par la différentiation

$$\frac{zdx - xdz}{zz} = \frac{-d\phi \cos\psi}{\sin\sigma^2 \sin\omega} \quad \& \quad \frac{zdy - ydz}{zz} = \frac{-d\phi \sin\psi}{\sin\sigma^2 \sin\omega}.$$

Multiplions, par $zz = vv \sin\sigma^2 \sin\omega^2$, & nous aurons

$$xdz - zdx = vvd\phi \sin\omega \cos\psi \quad \& \quad ydz - zdy = vvd\phi \sin\omega \sin\psi,$$

& en combinant ces deux équations:

$$z(xdy - ydx) = vvd\phi \sin\omega(y\cos\psi - x\sin\psi) = v^3 d\phi \sin\sigma \sin\omega \cos\omega$$

d'où s'ensuit $xdy - ydx = vvd\phi \cos\omega$.

V. Ces

V. Ces formules sont très propres à l'application de nos équations primitives, qui nous fournissent

$$x\,ddz - z\,ddx = d.\,vv\,d\phi\,\text{ſ}\omega\cos\psi = \frac{dt^2}{\alpha}(Rx - Pz)$$

$$y\,ddz - z\,ddy = d.\,vv\,d\phi\,\text{ſ}\omega\sin\psi = \frac{dt^2}{\alpha}(Ry - Qz)$$

$$x\,ddy - y\,ddx = d.\,vv\,d\phi\cos\omega = \frac{dt^2}{\alpha}(Qx - Py)$$

dont les deux premieres donnent par le développement:

$$\cos\psi\,d.vv\,d\phi\,\text{ſ}\omega - vv\,d\phi\,d\psi\,\text{ſ}\omega\sin\psi = \frac{dt^2}{\alpha}(Rx - Pz)$$

$$\sin\psi.\,dvv\,d\phi\,\text{ſ}\omega + vv\,d\phi\,d\psi\,\text{ſ}\omega\cos\psi = \frac{dt^2}{\alpha}(Ry - Qz).$$

d'où éliminant le membre $d.\,vv\,d\phi\,\text{ſ}\omega$

$$vv\,d\phi\,d\psi\,\text{ſ}\omega = \frac{dt^2}{\alpha}(R(y\cos\psi - x\,\text{ſ}\psi) + z(P\,\text{ſ}\psi - Q\cos\psi))$$

ou $$vv\,d\phi\,d\psi\,\text{ſ}\omega = \frac{dt^2}{\alpha}(Rv\,\text{ſ}\sigma\cos\omega + v\,\text{ſ}\sigma\,\text{ſ}\omega(P\,\text{ſ}\psi - Q\cos\psi))$$

donc $$d\psi = \frac{dt^2\sin\sigma}{\alpha v\,d\phi}(R\cot\omega + P\sin\psi - Q\cos\psi)$$

& $$\frac{d\omega}{\sin\omega} = \frac{dt^2\cos\sigma}{\alpha v\,d\phi}(R\cot\omega + P\sin\psi - Q\cos\psi).$$

Ces deux équations renferment les variations que la ligne des nœuds & l'inclination de l'orbite subissent.

VI. Mais, en éliminant des deux équations précédentes l'élément $d\psi$, nous obtiendrons:

$$d.vv\,d\phi\sin\omega = \frac{dt^2}{\alpha}(R(x\cos\psi + y\,\text{ſ}\psi) - z(P\cos\psi + Q\,\text{ſ}\psi))$$

qu'on

qu'on combinera avec succès avec la troisieme de l'art. préc.

$$d.vv\,d\phi\,\cos\omega = \frac{dt^2}{a}(Qx - Py).$$

Or, en développant ces deux différentiels, & en éliminant tantôt le différ. de $vv\,d\phi$, tantôt $d\omega$, nous trouverons enfin en substituant à x, y, z, les valeurs trouvées ci-dessus:

$$vv\,d\phi\,d\omega = \frac{v\,dt^2\cos\sigma}{a}(R\cos\omega + P\,s\omega\,s\psi - Q\,s\omega\cos\psi) \;\&$$

$$d.vv\,d\phi = \frac{v\,dt^2}{a}(R\cos\sigma\,s\omega - P(s\sigma\cos\psi + \cos\sigma\,s\psi\cos\omega) - Q(s\sigma\,s\psi - \cos\sigma\cos\psi\cos\omega))$$

dont celle-là convient avec la derniere que j'ai trouvée tantôt. Or celle-ci étant multipliée par $2vv\,d\phi$ & intégrée, donne:

$$v^4 d\phi^2 = \frac{2dt^2}{a}\int v^3 d\phi\,(R\cos\sigma\,s\omega - P(s\sigma\cos\psi + \cos\omega) - Q(s\sigma\,s\psi - \cos\sigma\cos\psi\cos\omega))$$

d'où l'on obtient la valeur de $vv\,d\phi^2$ pour la premiere équation trouvée N°. II.

VII. Il ne reste donc qu'à définir les valeurs des différentiels dx, dy & dz, pour les substituer dans la premiere équation. Or, pour dz ayant $lz = lv + ls\sigma + ls\omega$, on trouve

$$\frac{dz}{z} = \frac{dv}{v} + \frac{d\sigma\cos\sigma}{s\sigma} + \frac{d\omega\cos\omega}{s\omega}$$

qui, à cause de $d\omega = \frac{d\psi\cos\sigma\,s\omega}{s\sigma}$ & $d\sigma = d\phi - d\psi\cos\omega$, ou simplement de $d\sigma = d\phi - \frac{d\omega\,s\sigma\cos\omega}{\cos\sigma\,s\omega}$, se réduit à

$$\frac{dz}{z} = \frac{dv}{v} + \frac{d\phi\cos\sigma}{s\sigma} \text{ ou } dz = dv\,s\sigma\,s\omega + v\,d\phi\cos\sigma\,s\omega.$$

En-

Enſuite nous tirons des autres formules de N°. IV.

$$dx = \frac{x\,dz}{z} + \frac{v\,d\phi \cos\psi}{\sin\sigma} \;\&\; dy = \frac{y\,dz}{z} - \frac{v\,d\phi \sin\psi}{\sin\sigma}$$

qui ſe réduiſent à ces formes :

$$dx = \frac{x\,dv}{v} - v\,d\phi(\sin\sigma \cos\psi + \cos\sigma \cos\omega \sin\psi)$$

$$dy = \frac{y\,dv}{v} - v\,d\phi(\sin\sigma \sin\psi - \cos\sigma \cos\omega \cos\psi)$$

dont on peut ſubſtituer les valeurs dans l'équation

$$d.(dv^2 + vv\,d\phi^2) = \frac{2\,dt^2}{a}(P\,dx + Q\,dy + R\,dz).$$

VIII. Les formules compoſées d'angles, qui entrent dans ces équations, peuvent très commodément ſe repréſenter par la Trigonométrie ſphérique. Soit pour cet effet comme ci-deſſus :

l'arc $IN = \psi$; l'arc $NZ = \sigma$ & l'angle $KNZ = \omega$; Fig. 4.

qu'on prolonge l'arc IN jusqu'en K, & l'arc ZN juſqu'en V de ſorte que IK & ZV ſoient des quarts de cercle, & qu'on tire les arcs de grands cercles IZ, KZ, IV & KV, de même que les perpendiculaires ZP & VQ ſur IK. Cela poſé, on aura

$$\sin ZP = \sin\sigma \sin\omega \;:\; \sin VQ = \cos\sigma \sin\omega$$

$$\cos IZ = \cos\sigma\cos\psi - \sin\sigma\sin\psi\cos\omega : \cos KZ = \cos\sigma\sin\psi + \sin\sigma\cos\psi\, c.\omega$$

$$\cos IV = \sin\sigma\cos\psi + \cos\sigma\sin\psi\cos\omega : \cos KV = \sin\sigma\sin\psi - \cos\sigma\, c.\psi\, c.\omega$$

d'où nous tirons :

$$x = v \cos IZ;\quad y = v \cos KZ;\quad z = v \sin ZP$$

$$dx = dv\cos IZ - v\,d\phi\cos IV;\quad dy = dv\cos KZ - v\,d\phi\cos KV;$$

$$dz = dv \sin ZP + v\,d\phi \sin VQ.$$

IX. Mais, sans entrer dans un plus grand détail de ces formules, qui dépendent des forces dont le corps est sollicité, je me bornerai à montrer comment on doit s'y prendre pour les résoudre par la méthode générale que je viens de proposer. Or les deux dernieres équations étant développées donnent

$$2v\,dv\,d\phi + vv\,dd\phi = \frac{v\,dt^2}{\alpha}(R\,\text{sin}\,VQ - P\,\text{cos}\,IV - Q\,\text{cos}\,KV)$$

$$dv\,ddv + v\,dv\,d\phi^2 + vv\,d\phi\,dd\phi = \frac{dt^2}{\alpha}(P\,dv\,\text{cos}\,IZ + Q\,dv\,\text{cos}\,KZ + R\,dv\,\text{sin}\,ZP - \frac{v\,dt^2\,d\phi}{\alpha}(P\,\text{cos}\,IV + Q\,\text{cos}\,KV - R\,\text{si}\,VQ)$$

Otons de celle-ci celle-là multipliée par $d\phi$, & divisant par dv nous aurons:

$$ddv - v\,d\phi^2 = \frac{dt^2}{\alpha}(P\,\text{cos}\,IZ + Q\,\text{cos}\,KZ + R\,\text{sin}\,ZP)$$

& divisant la premiere par v:

$$2\,dv\,d\phi + v\,dd\phi = \frac{dt^2}{\alpha}(R\,\text{sin}\,VQ - P\,\text{cos}\,IV - Q\,\text{cos}\,KV).$$

X. Soit maintenant $dv = p\,dt$; $d\phi = q\,dt$, $d\psi = r\,dt$, & partant

$$d\omega = \frac{r\,dt\,\text{cos}\,\sigma\,\text{sin}\,\omega}{\text{sin}\,\sigma} \quad \& \quad d\sigma = dt\,(q - r\,\text{cos}\,\omega) \text{ de sorte que}$$

$$dp = vqq\,dt + \frac{dt}{\alpha}(P\,\text{cos}\,IZ + Q\,\text{cos}\,KZ + R\,\text{sin}\,ZP)$$

$$dq = \frac{-2pq\,dt}{v} + \frac{dt}{\alpha v}(R\,\text{sin}\,VQ - P\,\text{cos}\,IV - Q\,\text{cos}\,KV)$$

$$\& \quad r = \frac{dt\,\text{sin}\,\sigma}{\alpha v q}(R\,\text{cot}\,\omega + P\,\text{sin}\,\psi - Q\,\text{cos}\,\psi).$$

Donc

Donc, si pour une époque donnée, qui répond au tems t, on connoît les quantités v, ϕ, p, q, ψ, ω & σ, on en trouvera pour tout autre tems $t+\tau$ ces mêmes élémens v', ϕ', p', q', ψ', ω', σ', par la formule générale $z' = z + \frac{\tau dz}{dt} + \frac{\tau^2 ddz}{2dt^2} + \frac{\tau^3 d^3z}{6dt^3} +$ etc. en sorte que

$$v' = v + \tau p + \frac{\tau\tau dp}{2dt} + \frac{\tau^3 ddp}{6dt^2}$$

$$\phi' = \phi + \tau q + \frac{\tau\tau dq}{2dt} + \frac{\tau^3 ddq}{6dt^2} + \text{etc.}$$

$$p' = p + \frac{\tau dp}{dt} + \frac{\tau\tau ddp}{2dt^2} + \frac{\tau^3 d^3p}{6dt^3} + \text{etc.}$$

$$q' = q + \frac{\tau dq}{dt} + \frac{\tau\tau ddq}{2dt^2} + \frac{\tau^3 d^3q}{6dt^3} + \text{etc.}$$

$$\psi' = \psi + \tau r + \frac{\tau\tau dr}{2dt} + \frac{\tau^3 ddr}{6dt^2}$$

$$\omega' = \omega + \frac{\tau d\omega}{dt} + \frac{\tau\tau dd\omega}{2dt^2} + \frac{\tau^3 d^3\omega}{6dt^3} + \text{etc.}$$

$$\sigma' = \sigma + \frac{\tau d\sigma}{dt} + \frac{\tau\tau dd\sigma}{2dt^2} + \frac{\tau^3 d^3\sigma}{6dt^3} + \text{etc.}$$

XI. Je remarque ici, qu'il n'est pas nécessaire de déterminer pour chaque tems l'angle ϕ, qui n'existe presque que dans notre imagination; il suffit de savoir la valeur de $\frac{d\phi}{dt} = q$, pour en trouver l'argument de latitude σ: ainsi on peut entierement se passer de l'angle ϕ. Cependant il n'est que trop évident que cette maniere de concevoir le mouvement du corps, est beaucoup plus embarrassante & plus pénible que celle que j'ai proposée au commencement, où j'ai calculé immédiatement les trois coordonnées qui déterminent le mouvement

ment du corps : & on se précipiteroit encore dans un plus grand embarras, si l'on vouloit introduire dans le calcul la ligne des absides avec l'excentricité. Et partant je conseille à ceux qui voudront se servir de cette méthode pour déterminer les dérangemens des corps célestes, de s'en tenir aux premieres regles, & d'appliquer le calcul immédiatement aux trois coordonnées.

APPLICATION DE CETTE MÉTHODE *aux forces réelles du Ciel.*

Fig. 5. Soit A la masse du corps auquel on veut rapporter le mouvement des autres corps, & qu'on regarde comme étant en repos, quoiqu'il ait un mouvement quelconque. Que B soit la masse du corps en B, dont nous cherchons principalement le mouvement ; & qu'un troisieme corps qui y agit soit en C, sa masse étant $= C$. Sur un plan fixe tiré par A, on baisse de B & C les perpendiculaires BY & Cy, & de là à la droite fixe AI les perpendiculaires YX & yx, pour avoir pour le lieu de chaque corps les trois coordonnées, que je nommerai :

$$AX = x;\ XY = y;\ YB = z:\ Ax = \mathfrak{x};\ xy = \mathfrak{y};\ yC = \mathfrak{z};$$

soient outre cela les distances au corps A

$$AB = v \qquad \& \ AC = \mathfrak{v}, \text{ de sorte que}$$

$$vv = xx + yy + zz \quad \& \ \mathfrak{v}\mathfrak{v} = \mathfrak{x}\mathfrak{x} + \mathfrak{y}\mathfrak{y} + \mathfrak{z}\mathfrak{z}.$$

Ensuite, soit la distance $BC = w$ & on aura

$$ww = (x-\mathfrak{x})^2 + (y-\mathfrak{y})^2 + (z-\mathfrak{z})^2 = vv + \mathfrak{v}\mathfrak{v} - 2x\mathfrak{x} - 2y\mathfrak{y} - 2z\mathfrak{z}.$$

Cela posé, le corps B est premierement attiré par le corps A par la force $= \frac{A}{vv}$, & ensuite par le corps C par la force $= \frac{C}{ww}$, qu'on décompose selon les directions BA & BE, paralleles à AC, d'où résulte la force selon $BA = \frac{Cv}{w^3}$ & selon $BE = \frac{C\mathfrak{v}}{w^3}$. Or, le corps A étant lui-même attiré par le corps B par la force selon $AB = \frac{B}{vv}$, & par le corps C par la

force

force selon $AC = \frac{C}{\mathfrak{v}\mathfrak{v}}$, pour maintenir le corps A en repos, il faut transporter ces deux forces en sens contraire sur le corps B, d'où les forces qui agissent sur le corps B, se réduisent à ces deux:

$$\text{selon } BA = \frac{A+B}{vv} + \frac{Cv}{w^3}; \ \& \text{ selon } BE = \frac{C\mathfrak{v}}{w^3} - \frac{C}{\mathfrak{v}\mathfrak{v}}$$

d'où l'on tirera les forces P, Q, R, qui agissent sur le corps B selon les directions des trois coordonnées AX, XY & YB, qui seront exprimées de cette sorte:

$$P = -x\left(\frac{A+B}{v^3} + \frac{C}{w^3}\right) + \mathfrak{x}\left(\frac{C}{w^3} - \frac{C}{\mathfrak{v}^3}\right)$$

$$Q = -y\left(\frac{A+B}{v^3} + \frac{C}{w^3}\right) + \mathfrak{y}\left(\frac{C}{w^3} - \frac{C}{\mathfrak{v}^3}\right)$$

$$R = -z\left(\frac{A+B}{v^3} + \frac{C}{w^3}\right) + \mathfrak{z}\left(\frac{C}{w^3} - \frac{C}{\mathfrak{v}^3}\right)$$

& maintenant le mouvement du corps B sera contenu dans ces trois formules

$$\alpha ddx = Pdt^2; \quad \alpha ddy = Qdt^2; \quad \alpha ddz = Rdt^2.$$

Méthode de déterminer le mouvement de trois corps qui s'attirent mutuellement.

Puisque le mouvement du corps C est aussi bien connu que celui du corps B, il est aisé d'en exprimer le mouvement par des formules semblables; qu'on pose pour cet effet:

$$\mathfrak{P} = -\mathfrak{x}\left(\frac{A+C}{\mathfrak{v}^3} + \frac{B}{w^3}\right) + x\left(\frac{B}{w^3} - \frac{B}{v^3}\right)$$

$$\mathfrak{Q} = -\mathfrak{y}\left(\frac{A+C}{\mathfrak{v}^3} + \frac{B}{w^3}\right) + y\left(\frac{B}{w^3} - \frac{B}{v^3}\right)$$

$$\mathfrak{R} = -\mathfrak{z}\left(\frac{A+C}{\mathfrak{v}^3} + \frac{B}{w^3}\right) + z\left(\frac{B}{w^3} - \frac{B}{v^3}\right).$$

& le mouvement du corps C ſera déterminé par ces trois formules

$$\alpha\, dd\mathfrak{x} = \mathfrak{P}dt^2; \quad \alpha\, dd\mathfrak{y} = \mathfrak{Q}dt^2; \quad \alpha\, dd\mathfrak{z} = \mathfrak{R}dt^2.$$

Voyons maintenant quel uſage on peut tirer de ces ſix formules, pour déterminer le mouvement des deux corps B & C.

I. Or d'abord il faut ſuppoſer que, pour une certaine époque qui répond au tems t, tant le lieu que le mouvement de chaque corps B & C eſt connu, & partant les quantités ſuivantes, entant qu'elles répondent au tems t ſont données

$$x,\ y,\ z \quad \& \quad \frac{dx}{dt} = p; \quad \frac{dy}{dt} = q; \quad \frac{dz}{dt} = r$$

$$\mathfrak{x},\ \mathfrak{y},\ \mathfrak{z} \quad \& \quad \frac{d\mathfrak{x}}{dt} = \mathfrak{p}; \quad \frac{d\mathfrak{y}}{dt} = \mathfrak{q}; \quad \frac{d\mathfrak{z}}{dt} = \mathfrak{r}$$

& enſuite les formules trouvées nous fourniſſent:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{\alpha}P; \quad \frac{dq}{dt} = \frac{1}{\alpha}Q; \quad \frac{dr}{dt} = \frac{1}{\alpha}R;$$

$$\frac{d\mathfrak{p}}{dt} = \frac{1}{\alpha}\mathfrak{P}; \quad \frac{d\mathfrak{q}}{dt} = \frac{1}{\alpha}\mathfrak{Q}; \quad \frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \frac{1}{\alpha}\mathfrak{R}.$$

II. De là on peut paſſer aux différentiels plus hauts, ayant

$$\frac{dv}{dt} = \frac{xp + yq + zr}{v}; \quad \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{p} + \mathfrak{y}\mathfrak{q} + \mathfrak{z}\mathfrak{r}}{\mathfrak{v}} \quad \&$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{(x-\mathfrak{x})(p-\mathfrak{p}) + (y-\mathfrak{y})(q-\mathfrak{q}) + (z-\mathfrak{z})(r-\mathfrak{r})}{w},$$

d'où l'on formera les valeurs:

$$\frac{dP}{dt}; \quad \frac{dQ}{dt}; \quad \frac{dR}{dt} \quad \& \quad \frac{d\mathfrak{P}}{dt}; \quad \frac{d\mathfrak{Q}}{dt}; \quad \frac{d\mathfrak{R}}{dt}$$

qui renfermeront, outre les coordonnées x, y, z & $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, encore les lettres p, q, r & $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ pareillement connues. Or les diffé-

ren-

rentielles de celles-ci étant aussi connues, on trouvera aussi les formules différentielles suivantes :

$$\frac{ddP}{dt^2};\quad \frac{ddQ}{dt^2};\quad \frac{ddR}{dt^2},\quad \&\quad \frac{dd\mathfrak{P}}{dt^2};\quad \frac{dd\mathfrak{Q}}{dt^2};\quad \frac{dd\mathfrak{R}}{dt^2}$$

lesquelles renfermant, outre les lettres précédentes, encore les quantités P, Q, R & $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, dont nous avons déjà assigné les différentielles, on pourra par la différentiation réitérée parvenir aux valeurs différentielles plus hautes, aussi loin qu'on le jugera à propos.

III. Ayant déterminé toutes ces valeurs, on en tirera aisément tant les lieux que les mouvemens de nos deux corps B & C, après un tems τ écoulé depuis l'époque marquée. Car, marquant pour le lieu de l'un & de l'autre corps les coordonnées par les lettres x', y', z', & $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}'$, & pour leur mouvement les vitesses selon ces trois directions par les lettres

$$p'=\frac{dx'}{dt};\quad q'=\frac{dy'}{dt};\quad r'=\frac{dz'}{dt},\quad \&\ \mathfrak{p}'=\frac{d\mathfrak{x}'}{dt};\quad \mathfrak{q}'=\frac{d\mathfrak{y}'}{dt};\quad \mathfrak{r}'=\frac{d\mathfrak{z}'}{dt}$$

on aura : pour le corps B

$$x'=x+\tau p+\frac{\tau^2 P}{2\alpha}+\frac{\tau^3 dP}{6\alpha dt}\cdots;\quad p'=p+\frac{\tau P}{\alpha}+\frac{\tau^2 dP}{2\alpha dt}\cdots$$

$$y'=y+\tau q+\frac{\tau^2 Q}{2\alpha}+\frac{\tau^3 dQ}{6\alpha dt}\cdots;\quad q'=q+\frac{\tau Q}{\alpha}+\frac{\tau^2 dQ}{2\alpha dt}\cdots$$

$$z'=z+\tau r+\frac{\tau^2 R}{2\alpha}+\frac{\tau^3 dR}{6\alpha dt};\quad r'=r+\frac{\tau R}{\alpha}+\frac{\tau^2 dR}{2\alpha dt}$$

& de la même maniere pour le corps C

$$\mathfrak{x}'=\mathfrak{x}+\tau\mathfrak{p}+\frac{\tau^2\mathfrak{P}}{2\alpha}+\frac{\tau^3 d\mathfrak{P}}{6\alpha dt}\cdots;\quad \mathfrak{p}'=\mathfrak{p}+\frac{\tau\mathfrak{P}}{\alpha}+\frac{\tau^2 d\mathfrak{P}}{2\alpha dt}\cdots$$

$$\mathfrak{y}'=\mathfrak{y}+\tau\mathfrak{q}+\frac{\tau^2\mathfrak{Q}}{2\alpha}+\frac{\tau^3 d\mathfrak{Q}}{6\alpha dt}\cdots;\quad \mathfrak{q}'=\mathfrak{q}+\frac{\tau\mathfrak{Q}}{\alpha}+\frac{\tau^2 d\mathfrak{Q}}{2\alpha dt}\cdots$$

$$\mathfrak{z}'=\mathfrak{z}+\tau\mathfrak{r}+\frac{\tau^2\mathfrak{R}}{2\alpha}+\frac{\tau^3 d\mathfrak{R}}{6\alpha dt}\cdots;\quad \mathfrak{r}'=\mathfrak{r}+\frac{\tau\mathfrak{R}}{\alpha}+\frac{\tau^2 d\mathfrak{R}}{2\alpha dt}\cdots$$

IV.

IV. Plus on prend petit l'intervalle de tems τ, & moins on a besoin de termes dans ces expressions; & je crois même qu'on feroit fort bien de ne prendre le tems τ qu'assez grand, pour qu'on pût se passer des termes qui renferment les différentiels des quantités P, Q, R & $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, sans porter aucune atteinte à la précision. Par là on sera dispensé du travail assez ennuyeux de chercher ces valeurs différentielles qui deviendroient extrèmement compliquées. Alors, ayant déterminé l'état des deux corps pour le tems $t + \tau$, on poursuivra de la même maniere le calcul pour arriver à des tems plus éloignés de la premiere époque, en prenant les précautions que j'ai indiquées ci-dessus.

V. Je crois que cette méthode est non seulement la plus simple, qu'on puisse employer dans ces recherches, mais qu'elle est aussi la seule qu'on puisse pratiquer avec succès. En effet, quand même on réussiroit à trouver les intégrales des formules différentio-différentielles qui renferment le mouvement desiré, ce qu'on ne sauroit pourtant espérer, je suis assuré qu'on feroit toujours mieux de se servir de la méthode que je viens d'exposer, & qu'on pourroit même porter les recherches à un plus haut degré de précision. Outre cela, on comprend aisément qu'on peut étendre cette méthode avec le même succès à l'attraction de quatre corps & plus, sans que le calcul devienne beaucoup plus embarrassé: de la même maniere que l'action du corps C a été ici introduite dans le calcul, on y introduiroit encore celle d'un corps D, & même de plusieurs E, F etc. Les regles exposées seront aussi suffisantes pour déterminer le mouvement de chacun séparément.

VI. Mais ordinairement, quand on recherche les dérangemens dans le mouvement d'un corps céleste, on peut regarder comme connu le mouvement des autres corps qui causent ces dérangemens. Car, quoique leur mouvement souffre aussi par leur action mutuelle, on peut toujours le considérer comme à peu près connu, & cela suffit, puisqu'une petite erreur dans la position du corps troublant n'est presque d'aucune

cune conséquence dans le corps troublé. Cependant, puisqu'il est aussi intéressant de connoitre en même tems les dérangemens de tous les corps, rien n'empêche qu'on ne mette d'abord en pratique la méthode que je viens de proposer.

Mais, si les dérangemens sont fort petits & qu'on veuille se contenter d'un moindre degré de précision, je ne disconviens point qu'il vaut alors mieux déterminer ces dérangemens dans les élémens, par lesquels les Astronomes ont accoutumé de représenter les orbites des corps célestes. Pour cette raison, j'ajoute les recherches suivantes.

Sur la détermination des dérangemens extrêmement petits.

Outre les dénominations employées ci-dessus, soit AN la ligne des nœuds pour l'orbite du corps B, & posons: Fig. 5.

la longitude du nœud IAN $= \psi$

l'inclinaison de l'orbite ou l'angle BNY $= \omega$

l'argument de latitude ou l'angle NAB $= \sigma$

la distance AB étant $= v$, & l'angle élémentaire décrit par le corps B, dans le tems dt, autour de A $= d\phi$.

Cela posé, nous avons vu que les coordonnées sont exprimées ainsi:

$x = v(\cos\sigma\cos\psi - \sin\sigma\sin\psi\cos\omega)$; $y = v(\cos\sigma\sin\psi + \sin\sigma\cos\psi\cos\omega)$

& $z = v \sin\sigma \sin\omega$.

Ensuite, pour le corps C soit

la longitude ou l'angle IAy $= \zeta$

la latitude ou l'angle yAC $= \eta$

& la distance AC $= u$, que j'ai indiquée auparavant par la lettre allemande $\mathfrak{v}$. De là nous aurons les coordonnées:

$\mathfrak{x} = u \cos\eta\cos\zeta$; $\mathfrak{y} = u \cos\eta\sin\zeta$ & $\mathfrak{z} = u \sin\eta$,

d'où nous tirons $x\mathfrak{x} + y\mathfrak{y} = vu\, c.\eta\, (\cos\sigma\, c.(\zeta-\psi) + \sin\sigma\sin(\zeta-\psi)\, c.\omega)$

donc $x\mathfrak{x} + y\mathfrak{y} + z\mathfrak{z} = vu$ (fin η f σ f ω + cof η cof σ cof $(\zeta - \psi)$ + cof η fin σ fin $(\zeta - \psi)$ cof ω),

formule qui exprime le cofinus de l'angle BAC multiplié par vu: donc, pofant cet angle BAC $= \theta$, de forte que

$$\text{cof}\,\theta = \text{fin}\,\eta\,\text{f}\,\sigma\,\text{f}\,\omega + \text{cof}\,\eta\,\text{cof}\,\sigma\,\text{cof}(\zeta - \psi) + \text{cof}\,\eta\,\text{f}\,\sigma\,\text{f}(\zeta - \psi)\,\text{cof}\,\omega,$$

nous aurons $ww = vv + uu - 2vu\,\text{cof}\,\theta$, & de là nos trois forces qui agiffent fur le corps B feront:

$$P = -x\left(\frac{A+B}{v^3} + \frac{C}{w^3}\right) + u\,\text{cof}\,\eta\,\text{cof}\,\zeta\left(\frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3}\right)$$

$$Q = -y\left(\frac{A+B}{v^3} + \frac{C}{w^3}\right) + u\,\text{cof}\,\eta\,\text{fin}\,\zeta\left(\frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3}\right)$$

$$R = -z\left(\frac{A+B}{v^3} + \frac{C}{w^3}\right) + u\,\text{fin}\,\eta\left(\frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3}\right)$$

Subftituons maintenant ces formules dans les équations trouvées ci-deffus, qui expriment les dérangemens de ces élémens; & nous trouvons:

$$Px + Qy + Rz = -vv\left(\frac{A+B}{v^3} + \frac{C}{w^3}\right) + vu\,(\text{f}\,\eta\,\text{f}\,\sigma\,\text{f}\,\omega + \text{cof}\,\eta\,\text{cof}\,\sigma$$

$$\text{cof}(\zeta - \psi) + \text{cof}\,\eta\,\text{fin}\,\sigma\,\text{fin}(\zeta - \psi)\,\text{cof}\,\omega)\ \text{par}\left(\frac{C}{w^3} + \frac{C}{u^3}\right)$$

ou bien $Px + Qy + Rz = -vv\left(\frac{A+B}{v^3} + \frac{C}{w^3}\right) + vu\,\text{cof}\,\theta\left(\frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3}\right)$.

Enfuite, felon la Fig. 4.

$$R\,\text{fin}\,VQ - P\,\text{cof}\,IV - Q\,\text{cof}\,KV = u\left(\frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3}\right)(\text{fin}\,\eta\,\text{cof}\,\sigma\,\text{fin}\,\omega -$$

$$\text{cof}\,\eta\,\text{cof}\,\sigma\,\text{cof}(\zeta - \psi) + \text{cof}\,\eta\,\text{cof}\,\sigma\,\text{f}(\zeta - \psi)\,\text{cof}\,\omega),$$

où je remarque que cette formule provient de la précédente, fi l'on y met cof σ au lieu de fin σ, & — fin σ au lieu de cof σ, ou bien le

le négatif de celle-ci résulte de celle-là, si l'on y écrit $-(90^\circ - \sigma)$ au lieu de σ.

Enfin, la troisieme formule devient

$$R\cot\omega + P\sin\psi - Q\cos\psi = u\left(\frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3}\right)\left(\frac{\sin\eta\cos\omega}{\sin\omega} - \cos\eta\sin(\zeta - \psi)\right).$$

Pour comprendre mieux la nature de ces expressions, nous n'avons qu'à transporter tout à la Trigonométrie sphérique de la même maniere que ci-dessus dans la Fig. 4.

Que le grand cercle INy représente donc le plan fixe, & B & C les lieux de ces deux corps, vus du corps A, qu'on doit concevoir dans le centre de la sphere. Soit N le lieu du nœud, de sorte que $IN = \psi$, l'angle $yNB = \omega$, & l'arc $NB = \sigma$; ensuite pour l'autre corps C, on a Fig. 6.

la longitude $Iy = \zeta$, & la latitude $yC = \eta$

de sorte que $Ny = \zeta - \psi$, & il est clair que l'arc BC est représenté par l'angle θ. Qu'on prenne maintenant $NV = 90^\circ - \sigma$, ou bien soit l'arc BNV un quart de cercle, & le cosinus de l'arc VC pris négativement sera la même expression qui se trouve dans la seconde formule: ou bien, prenant l'arc VQ aussi égal à un quart de cercle, la dite formule est exprimée par sin CQ de sorte que

$$R\sin VQ = P\cos IV - Q\cos KV = u\left(\frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3}\right)\sin CQ.$$

Pour la troisieme, qu'on continue les arcs NB & yC jusqu'à leur concurrence en S, & on aura

$$\operatorname{tag} yS = \operatorname{tag}\omega\sin(\zeta - \psi) \quad \& \quad \sin S = \frac{\cos\omega}{\cos yS}.$$

De C tirons sur l'arc NB la perpendiculaire CR, & nous aurons:

$$\sin CR = \sin CS . \sin S = \sin S(\sin yS\cos\eta - \cos yS\sin\eta)$$

 donc

donc $\sin CR = \cos\eta \cos\omega \operatorname{tag} yS - \sin\eta \cos\omega$, ou bien

$$\sin CR = \cos\eta \cdot \sin\omega \sin(\zeta - \psi) - \sin\eta \cos\omega.$$

Par conséquent, la troisieme formule se réduit à celle-ci:

$$R\cot\omega + P\sin\psi - Q\cos\psi = -u\left(\frac{C}{w^3} + \frac{C}{u^3}\right)\frac{\sin CR}{\sin\omega}.$$

Maintenant le mouvement du corps B est déterminé par les équations suivantes:

$$\text{I. } ddv - vd\Phi^2 = \frac{-dt^2}{\alpha}\left(\frac{A+B}{vv} + \frac{Cv}{w^3}\right) + \frac{u\,dt^2\cos\theta}{\alpha}\left(\frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3}\right)$$

$$\text{II. } 2dvd\Phi + vdd\Phi = \frac{u\,dt^2 \sin CQ}{\alpha}\left(\frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3}\right)$$

$$\text{III. } d\psi = \frac{-u\,dt^2 \sin\sigma \sin CR}{\alpha v\,d\Phi \sin\omega}\left(\frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3}\right)$$

$$\text{IV. } d\omega = \frac{-u\,dt^2 \cos\sigma \sin CR}{\alpha v\,d\Phi}\left(\frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3}\right)$$

& enfin $\text{V. } d\sigma = d\Phi - d\psi\cos\omega$.

Si la masse du corps C évanouissoit, le mouvement du corps B seroit régulier & se feroit dans le même plan. Mais les dérangemens seront peu considérables lorsque les expressions $\frac{Cv}{w^3}$ & $u\left(\frac{C}{w^3} + \frac{C}{u^3}\right)$ sont très petites par rapport à celle-ci $\frac{A + B}{vv}$: c'est donc à ce cas principalement que j'appliquerai les recherches suivantes sur les variations que subissent les élémens Astronomiques, dont on se sert pour la détermination des orbites.

I. Ces recherches roulent principalement sur les deux premieres équations, que je représente pour abréger de cette sorte:

1°

$1^{\circ}.\, ddv - v d\phi^2 = \frac{E dt^2}{vv} + R dt^2$ & $2^{\circ}.\, 2dv d\phi + v dd\phi = S dt^2$, de sorte que

$$E = \frac{1}{a}(A + B);\; R = \frac{u \operatorname{cof} \theta}{a}\left(\frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3}\right) - \frac{Cv}{a w^3}$$

$$\& \; S = \frac{u \operatorname{fin} CQ}{a}\left(\frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3}\right)$$

où les dérangemens sont causés par les quantités R & S, puisque le mouvement seroit régulier si ces quantités évanouissoient.

II. Puisque, dans le cas $S = o$, la seconde équation donneroit $vv d\phi = \mathfrak{C} dt$, la quantité $\mathfrak{C}$ étant constante, je pose $vv d\phi = r dt$, & parce que $dr dt = 2v dv d\phi + vv dd\phi$, il s'ensuit $dr = Sv dt$, d'où l'on connoit la variabilité de cette quantité r; & en même tems on en tire le rapport entre les différentiels dt & $d\phi$, d'où l'on pourra éliminer l'un ou l'autre du calcul.

III. Puisque la distance v devient tantôt un *maximum*, tantôt un *minimum*, de sorte que dans l'un & l'autre cas il soit $dv = o$, pour en tenir compte, j'introduis dans le calcul un certain angle λ, connu sous le nom d'anomalie, duquel le différentiel dv dépende en sorte qu'il évanouisse avec le sinus de cet angle λ. Pour cet effet, posant $v = \frac{p}{1 + q \operatorname{cof} \lambda}$, formule semblable à celle qu'on trouve pour le mouvement régulier, de sorte que $\frac{1}{v} = \frac{1}{p} + \frac{q}{p} \operatorname{cof} \lambda$, je suppose d'abord $\frac{dv}{vv} = s d\phi \operatorname{fin} \lambda$, afin qu'on obtienne $dv = o$, quand $\operatorname{fin} \lambda = o$.

IV. Sur cette formule $v = \frac{p}{1 + q \operatorname{cof} \lambda}$ j'observe, que la lettre p marque le demi-parametre de l'orbite, & q son excentricité, qui

ſont conſtantes dans le mouvement régulier, mais ici à cauſe des forces perturbatrices il les faut regarder comme variables. Enſuite, l'angle λ, qui exprime l'anomalie vraie, croîtroit également avec l'angle ϕ dans le mouvement régulier, mais ici leurs différentiels $d\phi$ & $d\lambda$ ſeront inégaux, & leur différence $d\phi - d\lambda$ donnera le mouvement de la ligne des abſides.

V. Ayant donc $\frac{1}{v} = \frac{1}{p} + \frac{q}{p}\cos\lambda$ & $\frac{dv}{vv} = s\,d\phi\,\sin\lambda$, nous en tirons l'égalité ſuivante:

$$\frac{dp}{pp} + \frac{q\,dp - p\,dq}{pp}\cos\lambda + \frac{q}{p}\,d\lambda\,\sin\lambda = s\,d\phi\,\sin\lambda,$$

qui, pour le mouvement régulier, où $d\phi = o$, $dq = o$ & $d\lambda = d\phi$; donneroit $s = \frac{q}{p}$; mais rien n'empêche que nous ne ſuppoſions auſſi ici $s = \frac{q}{p}$, à cauſe de pluſieurs nouvelles quantités variables que nous venons d'introduire dans le calcul. Poſant donc $s = \frac{q}{p}$, nous aurons:

$$d\lambda = d\phi - \frac{dp}{pq\,\sin\lambda} + \frac{p\,dq - q\,dp}{pq\,\sin\lambda}\cos\lambda.$$

VI. Enſuite, ayant déjà poſé $vv\,d\phi = r\,dt$, la formule $\frac{dv}{vv} = s\,d\phi\,\sin\lambda$ donne $dv = rs\,dt\,\sin\lambda$, d'où pour la premiere équation nous tirons $ddv = d.rs.\,dt\,\sin\lambda + rs\,dt\,d\lambda\,\cos\lambda$: cette valeur y étant ſubſtituée, en diviſant par dt, nous aurons:

$$d.rs.\sin\lambda + rs\,d\lambda\cos\lambda - \frac{v\,d\phi^2}{dt} = \frac{-E\,dt}{vv} + R\,dt.$$

Or, puiſque $dt = \frac{vv\,d\phi}{r}$, il en réſultera

d.*rs*

$$d.rs.\sin\lambda + rs\,d\lambda\cos\lambda - \frac{r\,d\phi}{v} + \frac{E\,d\phi}{r} - \frac{Rvv\,d\phi}{r} = o$$

ou bien, à cauſe de $\frac{1}{v} = \frac{1}{p} + \frac{q}{p}\cos\lambda$,

$$d.rs.\,\text{ſ}\lambda + rs\,d\lambda\cos\lambda - \frac{r}{p}d\phi - \frac{qr}{p}d\phi\cos\lambda + \frac{E\,d\phi}{r} - \frac{Rvv\,d\phi}{r} = o.$$

VII. Quoique nous faſſions $s = \frac{q}{p}$, la multitude des lettres nous permet encore de ſuppoſer $\frac{r}{p} = \frac{E}{r}$, ou bien $r = \sqrt{Ep}$, pour faire évanouir les grands termes $-\frac{r}{p}d\phi$ & $\frac{E\,d\phi}{r}$. Donc, puiſque $s = \frac{p}{q}$, nous aurons:

$d.rs.\sin\lambda + \frac{qr}{p}(d\lambda - d\phi)\cos\lambda - \frac{Rvv\,d\phi}{r} = o$, ou bien en conſervant plutôt la lettre s au lieu de q, puiſque

$$d\lambda - d\phi = -\frac{dp}{pps\,\text{ſi}\lambda} + \frac{ds\cos\lambda}{s\sin\lambda},$$

$r\,ds\sin\lambda + s\,dr\sin\lambda - \frac{r\,dp\cos\lambda}{pp\,\text{ſ}\lambda} + \frac{r\,ds\;c.\lambda^2}{\sin\lambda} - \frac{Rvv\,d\phi}{r} = o$, ou

$$rr\,ds\,\text{ſ}\lambda^2 + sr\,dr\,\text{ſ}\lambda^2 - \frac{rr\,dp\cos\lambda}{pp} + rr\,ds\,c.\lambda^2 - Rvv\,d\phi\,\text{ſ}\lambda = o.$$

VIII. Mais, puiſque $rr = Ep$, cette équation ſe changera en celle-ci:

$$Ep\,ds + \tfrac{1}{2}Es\,dp\sin\lambda^2 - \frac{E\,dp\cos\lambda}{p} - Rvv\,d\phi\sin\lambda = o.$$

Or

Or, ayant tiré de la seconde équation: $dr = Svdt = \frac{Sv^3 d\Phi}{r}$, donc $\frac{1}{2}Edp = Sv^3 d\Phi$, le rapport des différentiels ds & $d\Phi$ sera exprimé ainsi

$$Epds + Sv^3 s d\Phi \sin\lambda^2 - \frac{2Sv^3 d\Phi \cos\lambda}{p} - Rvvd\Phi \sin\lambda = 0,$$

ou bien, en substituant $\frac{q}{p}$ au lieu de s

$$Edq - \frac{Sqv^3 d\Phi}{p}(2 - \sin\lambda^2) - \frac{2Sv^3 d\Phi \, c.\lambda}{p} - Rvvd\Phi \, s\lambda = 0,$$

$$\text{ou } dq = \frac{Rvvd\Phi \sin\lambda}{E} + \frac{Sv^3 d\Phi}{Ep}(q + 2\cos\lambda + q\cos\lambda^2).$$

IX. Voilà maintenant tous nos différentiels réduits au seul différentiel $d\Phi$, dont le rapport à l'élément du tems dt est donné par la formule $vvd\Phi = dt\sqrt{Ep}$. Car, posant $v = \frac{p}{1 + q\cos\lambda}$, nous aurons:

$$1^\circ. \; dp = \frac{2Sv^3 d\Phi}{E} = 2Svdt\sqrt{\frac{p}{E}}$$

$$2^\circ. \; dq = \frac{Rvvd\Phi \sin\lambda}{E} + \frac{Sv^3 d\Phi}{Ep}(q + 2\cos\lambda + q\cos\lambda^2)$$

$$\text{ou } dq = Rdt \sin\lambda . \sqrt{\frac{p}{E}} + \frac{Svdt(q + 2\cos\lambda + q\cos\lambda^2)}{\sqrt{Ep}}$$

$$3^\circ. \; d\lambda = d\Phi + \frac{Rvvd\Phi \cos\lambda}{Eq} - \frac{Sv^3 d\Phi \, s\lambda}{Epq}(2 + q\cos\lambda)$$

& de là on a $dv = \frac{qvvd\Phi}{p} s\lambda = \frac{q}{p} dt \sin\lambda . \sqrt{Ep}$.

X. En-

X. Enfin, pour les changemens du plan de l'orbite, à cause de $v\,d\phi = \frac{dt\,\sqrt{Ep}}{v}$, nous aurons:

$$d\psi = \frac{-vu\,dt \sin\sigma \sin CR}{a \sin\omega \sqrt{Ep}}\left(\frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3}\right)$$

$$d\omega = \frac{-vu\,dt \cos\sigma \sin CR}{a\sqrt{Ep}}\left(\frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3}\right)$$

& $d\sigma = d\phi - d\psi \cos\omega$.

XI. A l'aide de ces formules on pourra, pour chaque petit intervalle de tems, déterminer les variations causées 1°. dans le demi-parametre de l'orbite p, 2°. dans l'excentricité q, 3°. dans la position de la ligne des absides, 4°. dans la position de la ligne des nœuds, 5°. dans l'inclinaison de l'orbite, c'est à dire, dans les élémens qui demeureroient constans dans le mouvement régulier. Ensuite, pour le mouvement même du corps, on a d'abord l'angle élémentaire $d\phi$ avec le changement de la distance dv, & ensuite aussi l'accroissement de l'argument de latitude σ. Tout revient donc à l'intégration de ces formules par des approximations convenables.

Remarques
sur les formules précédentes.

I. Quand même l'intégration de ces formules réussiroit, ce qu'on ne sauroit pourtant espérer que par des approximations, on voit que la détermination de tous les élémens renfermeroit les mêmes élémens, de sorte qu'on n'en sauroit tirer aucun avantage, à moins que ces élémens ne soient déjà à peu près connus; ce qui est la raison pour laquelle je ne regarde cette méthode applicable qu'aux cas où les dérangemens sont extrêmement petits, ou bien où les corrections qu'on cherche, sont fort petites. Cependant, dans ces cas mêmes, il sera bon, après avoir corrigé ces élémens, de répéter les mêmes opérations sur ces élémens corrigés, pour les trouver encore plus exactement.

II. Il faudroit ſans doute prendre cette précaution dans l'uſage des Tables de la Lune, dont les argumens ſuppoſent déjà pour la plûpart connue la diſtance de la Lune au Soleil, qu'on ne ſauroit pourtant ſavoir exactement avant que d'avoir déjà déterminé le lieu de la Lune. Je parle des Tables ordinaires de la Lune dont on ſe ſert aujourd'hui; & je ſuis fort en doute encore, s'il eſt convenable de changer leur forme en ſorte que les argumens de toutes les inégalités dépendent uniquement du mouvement moyen de la Lune.

III. Je dois encore remarquer, que les Tables de la Lune dont les Aſtronomes ſe ſervent, ne ſont pas conſtruites ſur les formules que je viens d'expoſer ici. La différence ſe trouve dans l'anomalie, que je prens ici en ſorte que la diſtance de la Lune à la Terre en réſulte exactement, ou la plus grande, ou la plus petite, lorſque le ſinus de l'anomalie évanouit; au lieu que dans les Tables l'anomalie tient toujours le même rapport au vrai mouvement de la Lune, ou bien on y ſuppoſe uniforme le mouvement des abſides, d'où vient que les plus grandes & les plus petites diſtances de la Lune ne répondent pas exactement aux points où le ſinus de l'anomalie évanouit. Or, ſuivant les formules données, le mouvement des abſides devient très irrégulier, & cela d'autant plus que l'excentricité eſt plus petite, d'où elles ne ſeroient point applicables à des cas où l'excentricité évanouiroit. Pour éviter cet inconvénient, on ne devroit plus mettre $s = \frac{q}{p}$, comme j'ai fait dans le développement des formules générales.

IV. Mais, quoi qu'il en ſoit, la premiere méthode me paroit toujours fort préférable, à moins que les dérangemens ne ſoient extrèmement petits, & il me paroit encore douteux s'il ne ſeroit pas même moins pénible de ſuivre cette méthode pour la détermination du mouvement de la Lune, & partant d'une époque où tant le lieu que le mouvement auroit été parfaitement connu, & de calculer, par exemple, de 6 heures en 6 heures, le lieu de la Lune ſuivant les for-

mules,

mules que j'ai exposées ci-dessus. Alors, au lieu des Tables Lunaires, on auroit des éphémérides continuelles, & tout le travail tomberoit uniquement sur les premiers Calculateurs, dont l'ouvrage ne demanderoit peut-être pas plus de peine que quand on calcule par les Tables pour le midi & le minuit de chaque jour le lieu de la Lune: outre que, par cette nouvelle méthode, on pourroit arriver à un plus haut degré de précision, puisqu'on ne seroit obligé de négliger aucune force qui agit sur la Lune. C'est ce qui me fait espérer que ces nouvelles idées mériteront l'attention des Astronomes.



RÉFLEXIONS
SUR LES
DIVERSES MANIERES DONT ON PEUT REPRÉSENTER LE MOUVEMENT DE LA LUNE. (*)

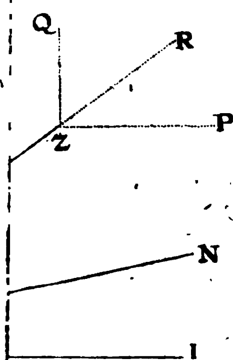
PAR MR. L. EULER.

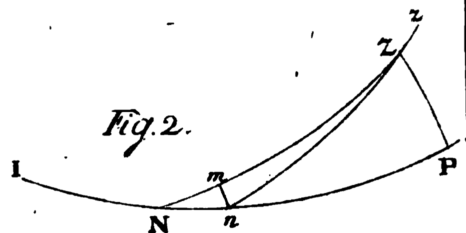
1.

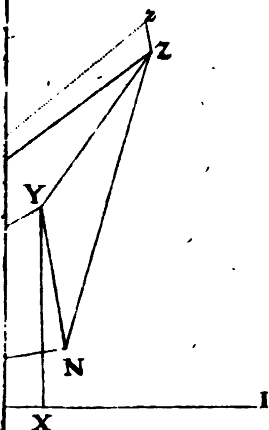
Quelque exactes que soient les dernieres Tables astronomiques de la Lune, dont nous sommes redevables aux soins de feu Mr. le Professeur *Meyer* de Gottingue, il s'en faut beaucoup que la Théorie de ce Satellite de la Terre soit parfaitement approfondie. Toutes les équations que ce grand homme a employées pour déterminer le lieu de la Lune, ne renferment que d'heureuses approximations pour atteindre à la vérité, qui en effet demanderoit un nombre infini de semblables équations; de sorte que tout le mérite de ces Tables consiste en ce que les équations employées approchent déjà tant de la vérité, qu'on puisse négliger sans une erreur sensible toutes les autres, quoique leur nombre soit infini. Il en est de même que des séries convergentes, dont un certain nombre de termes exprime déjà si exactement la véritable valeur de la série, que tous les autres pris ensemble ne fourniroient qu'une si petite particule, qu'elle ne sauroit être d'aucune conséquence dans le calcul, où l'on se propose toujours un certain degré de précision, au delà duquel, dès qu'on y est arrivé, il seroit superflu de vouloir pousser les approximations.

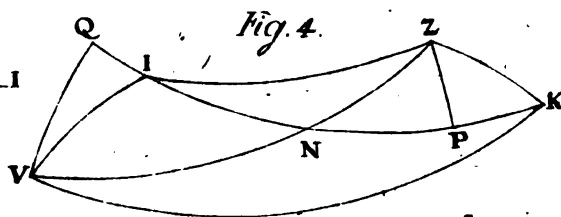
2. Comme il est presque impossible de déterminer par les observations le lieu de la Lune plus exactement qu'à une minute près,
Mr.

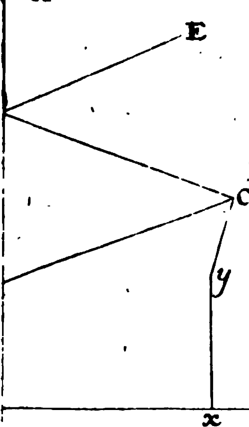
(*) Lû le 18 Déc. 1763.

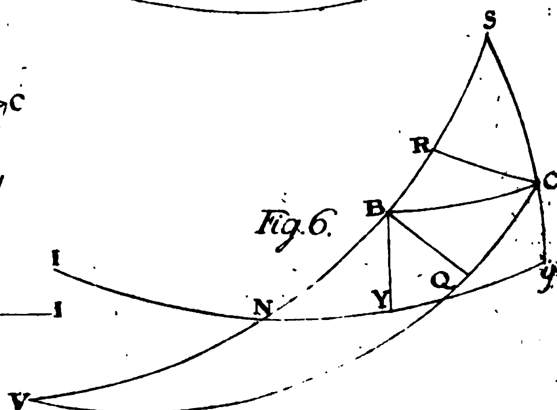

Q
R
P
Z
N
I


Fig. 2.
z
Z
I
m
P
N
n


z
Z
Y
N
X
I


Q
Fig. 4.
Z
I
K
N
P
V


E
C
y
x
I


S
R
C
B
Fig. 6.
I
Q
y
N
Y
V

Mr. *Meyer* s'est proposé de porter ses Tables de la Lune à ce même degré de précision, en sorte que le lieu calculé de la Lune ne sauroit s'écarter de la vérité au delà d'une minute, ce qui est sans doute tout ce qu'on peut prétendre, attendu que les Tables pour les planetes principales ne sont pas encore portées à un plus haut point de perfection. Pour l'état actuel où se trouve l'art d'observer, il seroit même inutile de pousser plus loin les Tables Astronomiques; & quand on seroit en état de calculer le lieu de la Lune à une seconde près, on n'en sauroit retirer aucun avantage pour la pratique. Or un tel degré de précision demanderoit peut-être une centaine de nouvelles équations, qui fatigueroient sans aucun fruit le travail & la patience des Calculateurs.

3. Il faut donc bien remarquer que les Tables de M. *Meyer* ne contiennent qu'une fort heureuse approximation au vrai lieu de la Lune, que le mérite doit en être d'autant plus grand aux yeux des Astronomes, qu'auparavant les Tables s'écartoient souvent au delà de 5 minutes de la vérité, & qu'un plus haut degré de précision ne serviroit même à rien, tant que les Observateurs ne trouveront pas moyen de faire des observations beaucoup plus exactes. Ce n'est qu'à mesure qu'on fera de plus grands progrès dans la pratique des observations, qu'il conviendra de porter les Tables astronomiques à un plus haut degré de précision; or soit que l'espérance d'y arriver soit fondée ou non, il est toujours extrèmement important qu'on tâche de développer mieux la théorie du mouvement de la Lune, & de l'élever, s'il étoit possible, au plus haut point de perfection.

4. Le fameux probleme des trois corps, auquel il faut rapporter le mouvement de la Lune, surpasse encore trop les forces de l'Analyse, pour qu'on puisse espérer d'en trouver une solution parfaite. Tout ce qu'il nous est permis d'y faire, se réduit à des méthodes d'approcher, ce qui se peut exécuter d'une infinité de manieres différentes, où toute l'adresse de l'Analyste se déploye dans le choix des plus convenables. Cette entreprise renferme bien de l'arbitraire du côté de

l'Analyſe, comme il arrive dans toutes les autres approximations: on ſait par combien de méthodes différentes les Géometres ont approché du véritable rapport entre le diametre & la circonférence du cercle, & qu'il y en a qui en approchent beaucoup plus promtement que les autres, quoique toutes ſoient également bien fondées. Il en eſt de même du mouvement de la Lune, duquel on peut approcher par une infinité de méthodes différentes; c'eſt là-deſſus que je me propoſe de faire quelques refléxions, qui me ſemblent répandre beaucoup de lumiere ſur cette queſtion auſſi compliquée qu'importante.

5. Voici donc en général la méthode dont on ſe ſert pour repréſenter à peu près le mouvement de la Lune: d'abord on conçoit preſqu'une autre Lune, dont le mouvement ſeroit aiſé à déterminer, & qui ne différeroit que fort peu de celui de la vraie Lune, & alors on tâche de découvrir pour chaque tems propoſé la différence qui ſe trouve entre les lieux de cette Lune imaginaire & de la véritable. Il eſt clair que cette différence dépend de pluſieurs circonſtances auxquelles il faut avoir égard, & qu'elle doit être repréſentée par pluſieurs Tables d'équations dont le nombre ſera d'autant plus grand, qu'on voudra approcher de la vérité de plus près. C'eſt la même route qu'on a d'abord ſuivie pour connoitre le mouvement des planetes principales, où pour chacune d'elles on a introduit une autre planete imaginaire, dont le mouvement ſe feroit dans un cercle uniformement autour du Soleil; il eſt connu ſous le nom de mouvement moyen; & enſuite on a recherché les écarts de la véritable planete de ce mouvement moyen, d'où l'on eſt enfin parvenu à l'équation du centre, qui marque combien il faut ajouter au lieu moyen ou en ſouſtraire pour avoir le vrai lieu. Le grand *Kepler* a porté cette méthode au plus haut degré de perfection.

6. Pour la Lune, ce ſeroit commencer de trop loin que de vouloir ſuppoſer à la Lune imaginaire un mouvement circulaire & uniforme autour de la Terre: on profite plutôt d'abord des lumieres que la découverte de *Kepler* nous a fournies. Pour cet effet, on ſuppoſe à la Lu-

Lune imaginaire un mouvement par une ellipſe, conformément aux regles de *Kepler*, & on donne à cette ellipſe une telle grandeur & excentricité, & encore un tel mouvement des abſides, que le mouvement de la Lune imaginaire s'écarte auſſi peu de celui de la véritable que l'irrégularité du mouvement le permet. Le grand *Newton* avoit déjà formé ce projet, & pour mieux approcher du but, il a non ſeulement ſuppoſé variable l'excentricité de l'orbite elliptique, mais il a auſſi mis certaines inégalités dans le mouvement des abſides. C'eſt ſur cette idée qu'on a publié autrefois en Angleterre pluſieurs Tables Lunaires, qui étoient bien mieux d'accord avec les obſervations que les précédentes, mais qui ne laiſſoient pas d'être encore très défectueuſes en s'écartant ſouvent preſque juſqu'à 10 minutes de la vérité; & il ſemble que, depuis cet heureux commencement du grand *Newton*, tous les efforts des Anglois ont été ſans ſuccès dans cette recherche.

7. Après pluſieurs recherches ſur cette matiere, j'avois publié dès l'an 1742 une nouvelle forme de Tables Lunaires, où pour la commodité du calcul j'ai ſuppoſé tant le mouvement des abſides uniforme, que l'excentricité de l'orbite invariable pour la Lune imaginaire, de ſorte que ſon lieu pût être calculé auſſi aiſément que celui des planetes principales: enſuite, j'y ai ajouté quelques Tables de corrections, qui, étant appliquées au lieu de la Lune imaginaire, donnaſſent le lieu de la Lune réelle. La Théorie m'avoit bien fourni toutes ces corrections, avec pluſieurs autres que j'ai omiſes à cauſe de leur petiteſſe; mais quelques élémens demandoient un grand nombre d'obſervations pour être bien déterminés, & comme ceux que j'avois employés pour ce deſſein n'étoient pas aſſez exacts, les Tables que j'avois conſtruites là-deſſus ne remplirent point mes vues, quoiqu'elles ne le cédaſſent en rien aux Angloiſes, & que leur application fût beaucoup plus aiſée.

8. Cependant, la forme même que j'avois donnée à mes Tables, trouva une approbation générale auprès de tous les Aſtronomes, qui jugerent qu'il ne falloit que mieux déterminer par les obſervations les élémens

mens numériques de ces Tables, pour porter cet important article de l'Astronomie à sa plus grande perfection. Mr. *Meyer*, après avoir ramassé un grand nombre des meilleures observations, a heureusement rempli cette tâche, & rectifié toutes les équations que j'avois employées pour déterminer le lieu de la Lune: & ce sont les mêmes Tables qui ont été reçues avec le plus grand applaudissement tant en France qu'en Angleterre, & dont on se sert généralement dans le calcul des Eclipses, & partout ailleurs où il s'agit d'une détermination du lieu de la Lune. Les Tables de M. *Clairaut* sont aussi construites sur le même pied, & quand elles ne répondent pas si bien au Ciel, la raison ne sauroit en être attribuée qu'à quelques légeres circonstances, dont il ne seroit pas difficile de tenir compte.

9. Ces Tables sont donc fondées sur la forme que j'avois proposée autrefois, en introduisant une Lune imaginaire, qui se mût selon les regles de *Kepler* dans une certaine ellipse, dont l'un des foyers se trouvât dans le centre de la Terre, & dont l'axe eût un mouvement uniforme égal à celui de l'apogée de la Lune, de sorte que tout revînt ensuite à déterminer la différence qui se trouve entre le lieu de cette Lune imaginaire & la véritable. Or il est clair que ces deux suppositions pour le mouvement de la Lune imaginaire sont absolument arbitraires, & qu'on lui pourroit, avec autant de raison, attribuer une ellipse variable tant par rapport à l'axe qu'à l'excentricité, & mettre aussi certaines inégalités dans le mouvement des absides, pour rendre la différence entre les deux Lunes encore plus petite, ou même la faire évanouir entierement. Une telle supposition seroit sans doute plus propre à représenter le vrai mouvement de la Lune, pour que le calcul ne devînt pas trop embarassant.

10. En effet, les suppositions que j'ai faites alors, ne semblent pas assez convenables à la nature de l'apogée de la Lune, attendu que la Lune imaginaire pourroit bien se trouver dans son apogée, ou périgée, tandis que la véritable en seroit considérablement éloignée, & que sa distance à la Terre ne seroit, ni la plus grande, ni la plus petite.

Car

Car, quand la Lune imaginaire aura paſſé par ſon apogée, il ſe pourroit bien que les équations augmentaſſent encore pendant quelque tems la diſtance de la véritable à la Terre, de ſorte qu'elle atteignît ſon apogée longtems après, ou avant. Quoique ce cas ne ſoit pas d'une grande importance, pourvu qu'on réuſſiſſe à déterminer exactement le vrai lieu de la Lune, il ſemble pourtant que, plus on mettra d'accord la Lune imaginaire avec la véritable, plus les Tables qui en ſeront conſtruites, deviendront conformes à la nature, & peut-être ſeront-elles plus propres à porter la préciſion à un plus haut degré. Cette idée ſemble au moins mériter toute notre attention.

11. Elle m'avoit conduit autrefois à une autre méthode, par laquelle j'ai déterminé pour chaque moment la ſection conique dont le mouvement de la Lune fait partie, & par laquelle elle continueroit de ſe mouvoir conformément aux regles de *Kepler*, ſi la force perturbatrice du Soleil venoit à évanouir ſubitement. Par-là je ſuis parvenu à une orbite variable à tous égards: pour chaque inſtant il falloit premierement déterminer tant le grand axe de l'ellipſe que ſon excentricité, enſuite la poſition des abſides, ou le lieu de l'apogée, dont le mouvement devenoit d'autant plus irrégulier, que l'excentricité étoit plus petite; & enfin l'anomalie vraie, ou l'éloignement de l'apogée exigeoit quantité de corrections. Or, dans tout cela, je n'avois pas encore fait attention au mouvement en latitude, d'où le mouvement de la ligne des nœuds & l'inclinaiſon de l'orbite à l'écliptique ſont auſſi aſſujettis à des variations toutes particulieres. Mais, auſſi à cet égard, j'ai expoſé autre part les formules générales, qui renferment la détermination du mouvement conformément à cette méthode.

12. Cette ſinguliere méthode d'enviſager le mouvement de la Lune, paroit d'abord fort propre à la pratique, & je ne doute pas qu'on ne puiſſe s'en ſervir avec ſuccès attendu que l'excentricité moyenne eſt déjà aſſez conſidérable, au lieu que ſi elle étoit très petite, ces approximations ne ſauroient encore avoir lieu, conduiſant même à des ſéries divergentes. L'Analyſe qui m'a conduit à ces formules ne

paroit pas non plus assez naturelle, puisqu'elle passe par des intégrations embarrassantes, dont il faut pourtant ensuite délivrer le calcul: & surtout le rapport aux regles de *Kepler*, qu'on y introduit d'abord sans aucune nécessité, ne semble pas assez propre à faciliter le calcul, & met des bornes trop étroites aux secours de l'Analyse. De là résulte cette question importante, s'il ne seroit pas possible de manier les équations fondamentales & différentielles du second degré, que les principes de la Mécanique fournissent, ensorte qu'on en puisse dériver sans tant d'embarras, non seulement les deux manieres d'approcher, dont je viens de parler, mais encore à la fois toutes les manieres possibles, dont le nombre est sans doute infini, afin que pour chaque cas on en puisse choisir celle qui sera la plus convenable pour le calcul astronomique.

13. Après plusieurs essais, je crois enfin avoir trouvé une solution fort aisée de cette question, qui peut être d'une grande utilité non seulement pour la Lune, mais aussi pour tous les corps célestes, dont le mouvement est dérangé par l'action de quelques autres corps. Or je ferai ici abstraction des dérangemens auxquels le mouvement en latitude pourroit être assujetti, puisque ceux-ci sont pour la plûpart assez faciles à déterminer, & que les autres n'en dépendent presque point. On rencontre toujours les plus grandes difficultés dans la détermination des dérangemens qui troublent le seul mouvement en longitude; & dès qu'on y a une fois réussi, on n'est pas ordinairement fort embarrassé par rapport aux inégalités dans le mouvement en latitude.

14. Posant donc la distance de la Lune à la Terre $= v$, & sa longitude $= \Phi$, pour un tems écoulé $= t$, on sait que prenant constant le différentiel du tems dt, le mouvement est déterminé par deux équations différentio-différentielles de cette forme

$$\text{I.} \quad 2\,dv\,d\Phi + v\,dd\Phi = P\,dt^2$$

$$\text{II.} \quad ddv - v\,d\Phi^2 + \frac{A\,dt^2}{vv} = Q\,dt^2,$$

où

où les lettres P & Q renferment les forces perturbatrices, de ſorte que, ſi elles évanouiſſoient, le mouvement ſeroit régulier & conforme aux regles de *Kepler*. Et partant, pour d'autres corps céleſtes, il faut toujours rapporter le mouvement à un point, par rapport auquel il ſeroit à peu près régulier. C'eſt donc de la réſolution de ces deux équations que dépend la connoiſſance des dérangemens principaux, auxquels tous les corps céleſtes ſont aſſujettis, & pour chaque cas il eſt aiſé de définir les valeurs des quantités P & Q.

15. Pour la premiere équation je fais dabord cete ſubſtitution $vv d\phi = s dt$, qui donnant

$$2v dv d\phi + vv dd\phi = ds dt$$

nous fournit $ds dt = Pv dt^2$, & partant $ds = Pv dt$, qui étant multipliée par la premiere $s dt = vv d\phi$, donne $s ds = Pv^3 d\phi$, d'où nous connoiſſons le rapport des élémens dt & ds à $d\phi$, ſi l'on juge à propos de réduire tout à l'élément de longitude $d\phi$. De là on voit auſſi que, ſi la quantité P évanouiſſoit, on auroit $ds = o$, & partant s conſtant; de ſorte que les aires décrites $\frac{1}{2}\int vv d\phi$ ſeroient proportionnelles au tems t, conformément à la premiere regle de *Kepler*.

16. Pour la ſeconde équation, je fais la ſuppoſition $\frac{dv}{vv} = r d\phi$, ou bien $d.\frac{1}{v} = - r d\phi$; & puiſque $dv = rvv d\phi$, nous aurons $dv = rs dt$, & partant $ddv = dt\, d.rs$, & $v d\phi^2 = \frac{ss dt^2}{v^3} = \frac{s dt d\phi}{v}$, d'où la ſeconde équation prend cette forme

$$d.rs - \frac{s d\phi}{v} + \frac{A dt}{vv} = Q dt$$

qui, ſubſtituant pour dt ſa valeur $\frac{vv d\phi}{s}$, ſe change en celle-ci

$$r ds + s dr - \frac{s d\phi}{v} + \frac{A d\phi}{s} = \frac{Q vv d\phi}{s}$$

 &

& puisque $ds = \frac{Pv^3 d\Phi}{s}$, nous en tirons

$$dr = d\Phi\left(\frac{1}{v} - \frac{A}{ss} - \frac{Pv^3 r}{ss} + \frac{Qvv}{ss}\right)$$

où il faut bien se souvenir que, dans le mouvement régulier, s seroit une quantité constante.

17. Maintenant, puisqu'il convient de considérer dans le calcul le réciproque de la distance $\frac{1}{v}$ plutôt qu'elle-même, je suppose $\frac{1}{v} = \frac{A}{ss} + \frac{q}{ss}$ ou $v = \frac{ss}{A + q}$ pour avoir $dr = \frac{d\Phi}{ss}(q - Pv^3 r + Qvv)$. Or ensuite ayant $\frac{dv}{vv} = \frac{2A\,ds}{s^3} + \frac{2q\,ds}{s^3} - \frac{dq}{ss} = r\,d\Phi$, il s'ensuit

$$dq = \frac{2(A + q)\,ds}{s} - rss\,d\Phi, \quad \text{ou bien}$$

$$dq = -rss\,d\Phi + \frac{2(A + q)Pv^3 d\Phi}{ss}.$$

De là on connoit pour chaque instant pendant lequel la longitude Φ croît de son élément $d\Phi$, les incrémens des quantités s, r & q, d'où, si on les pouvoit déterminer elles-mêmes, on auroit tout de suite la distance $v = \frac{ss}{A + q}$ & le tems $t - \int\frac{vv\,d\Phi}{s}$, d'où il faudroit ensuite réciproquement conclure la longitude Φ.

18. On peut rendre cette derniere substitution plus commode en posant $\frac{1}{v} = p + q$, ou bien $v = \frac{1}{p + q}$, de sorte que

$$dr = d\Phi\left(p + q - \frac{A}{ss} - \frac{Pv^3 r}{ss} + \frac{Qvv}{ss}\right).$$

Pre-

Prenons maintenant s en forte que $p = \frac{A}{ss}$ ou $ss = \frac{A}{p}$, donc $s\,ds = \frac{-A\,dp}{2pp}$. De là nous tirons les déterminations fuivantes:

1°. $dt = \frac{vv\,d\phi\sqrt{p}}{\sqrt{A}} = \frac{d\phi\sqrt{p}}{(p+q)^2\sqrt{A}}$,

2°. $dp = \frac{-2Pv^3pp\,d\phi}{A}$

3°. $dv = vvr\,d\phi$ ou $dq = -r\,d\phi + \frac{2Pv^3pp\,d\phi}{A}$

4°. $dr = q\,d\phi - \frac{Pv^3pr\,d\phi}{A} + \frac{Qvvp\,d\phi}{A}$.

Donc, fi les forces perturbatrices P & Q évanouïffent, on aura

$p = b$; $q = c\cos(\phi+\alpha)$; $r = c\sin(\phi+\alpha)$; $v = \frac{1}{b + c\cos(\phi+\alpha)}$

& $dt = \frac{d\phi\sqrt{b}}{(b + c\cos(\phi+\alpha))^2\sqrt{A}}$, d'où l'on tire le mouvement dans une fection conique conformément aux regles de *Kepler*.

19. On voit bien qu'on peut varier à l'infini cette fubftitution: la plus propre pour l'ufage aftronomique eft celle-ci: $v = \frac{p}{1+q}$ ou $\frac{1}{v} = \frac{1}{p} + \frac{q}{p}$, de forte que

$$\frac{dv}{vv} = \frac{(1+q)\,dp}{pp} - \frac{dq}{p} = r\,d\phi,$$ & partant

$$dq = \frac{(1+q)\,dp}{p} - pr\,d\phi.$$

 Or

Or ayant $dr = d\phi\left(\frac{1}{p} + \frac{q}{p} - \frac{A}{ss} - \frac{Pv^3r + Qvv}{ss}\right)$,

prenons $\frac{A}{ss} = \frac{1}{p}$; ou $ss = Ap$; donc $sds = \frac{1}{2}Adp = Pv^3d\phi$; de là tous les élémens se rapporteront ainsi à celui de longitude $d\phi$, posant $v = \frac{p}{1+q}$,

1°. $dt = \frac{vv\,d\phi}{\sqrt{Ap}} = \frac{p\,d\phi\sqrt{p}}{(1+q)^2\sqrt{A}}$

2°. $dp = \frac{2Pv^3d\phi}{A}$

3°. $dq = -prd\phi + \frac{2Pv^3(1+q)d\phi}{Ap}$ & $dv = vvrd\phi$

4°. $dr = \frac{qd\phi}{p} - \frac{Pv^3rd\phi}{Ap} + \frac{Qvvd\phi}{Ap}$,

où, pour le cas des forces perturbatrices évanouissantes, on a $p = b$, $q = c\,\mathrm{cos}\,(\phi + \alpha)$, $r = \frac{c\,\mathrm{sin}\,(\phi + \alpha)}{b}$, donc

$$v = \frac{b}{1 + c\,\mathrm{cos}(\phi + \alpha)},\ \&\ dt = \frac{b\,d\phi\sqrt{b}}{(1+c\,\mathrm{cos}(\phi+\alpha))^2\sqrt{A}}.$$

où b est le demi-parametre de l'orbite, $\phi + \alpha$ l'anomalie vraie, & c l'excentricité de l'orbite.

20. Cette Analyse nous conduit dabord à l'hypothese de l'orbite variable à tous égards, dont j'ai parlé ci-dessus. Car soit, pour l'instant présent, p le demi-parametre de l'orbite, u son excentricité, & ω l'anomalie vraie de la Lune, & on n'a qu'à mettre $q = -u\,\mathrm{cos}\,\omega$, & $r = \frac{-u\,\mathrm{sin}\,\omega}{p}$, ou $pr = -u\,\mathrm{sin}\,\omega$, afin que le différentiel de

la

la distance $dv = \frac{-vvud\Phi \sin\omega}{p}$ évanouisse, tant lorsque $\omega = 0$, que lorsque $\omega = 180°$. Ayant donc $dq = - du \cos\omega + ud\omega \sin\omega$, & $d.pr = pdr + rdp = - du \sin\omega - ud\omega \cos\omega$, la combinaison de ces deux équations fournit

$$du = - dq \cos\omega - pdr \sin\omega - rdp \sin\omega$$
$$ud\omega = dq \sin\omega - pdr \cos\omega - rdp \cos\omega.$$

Or $pdr + rdp = qd\Phi + \frac{Pv^3rd\Phi + Qvvd\Phi}{A}$ ou

$$pdr + rdp = - ud\Phi\cos\omega - \frac{Pv^3ud\Phi\sin\omega}{Ap} + \frac{Qvvd\Phi}{A} =$$
$$- ud\Phi\cos\omega - \frac{Pvvud\Phi \sin\omega}{A(1+u\cos\omega)} + \frac{Qvvd\Phi}{A}$$

& $dq = ud\Phi \sin\omega + \frac{2Pvvd\Phi}{A}$ à cause de $v = \frac{p}{1+u\cos\omega}$.

Donc tous les élémens seront déterminés de cette sorte

1°. $dt = \frac{vvd\Phi}{\sqrt{Ap}} = \frac{pd\Phi\sqrt{p}}{(1-u\cos\omega)^2\sqrt{A}}$

2°. $dp = \frac{2Pv^3d\Phi}{A} = \frac{vv\,d\Phi}{A} \cdot \frac{2Pp}{(1-u\cos\omega)}$

3°. $du = \frac{vv\,d\Phi}{A}\left(\frac{P(u - 2\cos\omega + u\cos\omega^2)}{1 - u\cos\omega} - Q\sin\omega\right)$

4°. $ud\omega = ud\Phi + \frac{vv\,d\Phi}{A}\left(\frac{P(2 - u\cos\omega)\sin\omega}{1 - u\cos\omega} - Q\cos\omega\right)$

où l'on a $dv = \frac{-vvud\Phi\sin\omega}{p}$, ou $d.\frac{1}{v} = \frac{u}{p}d\Phi \sin\omega$.

21.

Or ayant $dr = d\phi\left(\frac{1}{p} + \frac{q}{p} - \frac{A}{ss} - \frac{Pv^3r + Qvv}{ss}\right)$,
prenons $\frac{A}{ss} = \frac{1}{p}$; ou $ss = Ap$; donc $sds = \frac{1}{2}Adp = Pv^3d\phi$; de là tous les élémens ſe rapporteront ainſi à celui de longitude $d\phi$, poſant $v = \frac{p}{1+q}$,

1°. $dt = \frac{vvd\phi}{\sqrt{Ap}} = \frac{pd\phi\sqrt{p}}{(1+q)^2\sqrt{A}}$

2°. $dp = \frac{2Pv^3d\phi}{A}$

3°. $dq = -prd\phi + \frac{2Pv^3(1+q)d\phi}{Ap}$ & $dv = vvrd\phi$

4°. $dr = \frac{qd\phi}{p} - \frac{Pv^3rd\phi}{Ap} + \frac{Qvvd\phi}{Ap}$,

où, pour le cas des forces perturbatrices évanouiſſantes, on a $p = b$, $q = c\cos(\phi + \alpha)$, $r = \frac{c\sin(\phi+\alpha)}{b}$, donc

$$v = \frac{b}{1+c\cos(\phi+\alpha)}, \text{ \& } dt = \frac{bd\phi\sqrt{b}}{(1+c\cos(\phi+\alpha))^2\sqrt{A}}$$

où b eſt le demi-parametre de l'orbite, $\phi + \alpha$ l'anomalie vraie, & c l'excentricité de l'orbite.

20. Cette Analyſe nous conduit dabord à l'hypotheſe de l'orbite variable à tous égards, dont j'ai parlé ci-deſſus. Car ſoit, pour l'inſtant préſent, p le demi-parametre de l'orbite, u ſon excentricité, & ω l'anomalie vraie de la Lune, & on n'a qu'à mettre $q = -u\cos\omega$, & $r = \frac{-u\sin\omega}{p}$, ou $pr = -u\sin\omega$, afin que le différentiel de

la

la distance $dv = \frac{-vvud\Phi \sin\omega}{p}$ évanouisse, tant lorsque $\omega = 0$, que lorsque $\omega = 180^\circ$. Ayant donc $dq = -du \cos\omega + ud\omega \sin\omega$, & $d.pr = pdr + rdp = -du \sin\omega - ud\omega \cos\omega$, la combinaison de ces deux équations fournit

$$du = -dq \cos\omega - pdr \sin\omega - rdp \sin\omega$$

$$ud\omega = dq \sin\omega - pdr \cos\omega - rdp \cos\omega.$$

Or $pdr + rdp = qd\Phi + \frac{Pv^3 rd\Phi + Qvvd\Phi}{A}$ ou

$$pdr + rdp = -ud\Phi\cos\omega - \frac{Pv^3 ud\Phi \sin\omega}{Ap} + \frac{Qvvd\Phi}{A} =$$

$$-ud\Phi\cos\omega - \frac{Pvvud\Phi \sin\omega}{A(1+u\cos\omega)} + \frac{Qvvd\Phi}{A}$$

& $dq = ud\Phi \sin\omega + \frac{2Pvvd\Phi}{A}$ à cause de $v = \frac{p}{1+u\cos\omega}$.

Donc tous les élémens seront déterminés de cette sorte

$$1^\circ.\ dt = \frac{vvd\Phi}{\sqrt{Ap}} = \frac{pd\Phi\sqrt{p}}{(1-u\cos\omega)^2\sqrt{A}}$$

$$2^\circ.\ dp = \frac{2Pv^3 d\Phi}{A} = \frac{vv\,d\Phi}{A} \cdot \frac{2Pp}{(1-u\cos\omega)}$$

$$3^\circ.\ du = \frac{vv\,d\Phi}{A}\left(\frac{P(u - 2\cos\omega + u\cos\omega^2)}{1 - u\cos\omega} - Q\sin\omega\right)$$

$$4^\circ.\ ud\omega = ud\Phi + \frac{vv\,d\Phi}{A}\left(\frac{P(2 - u\cos\omega)\sin\omega}{1 - u\cos\omega} - Q\cos\omega\right)$$

où l'on a $dv = \frac{-vvud\Phi\sin\omega}{p}$, ou $d.\frac{1}{v} = \frac{u}{p}d\Phi \sin\omega$.

21. Sachant le rapport de tous les élémens entr'eux, on peut aussi les réduire tous à celui du tems dt, au lieu duquel on peut aisément introduire le mouvement moyen du Soleil. Donc, puisque $vv\,d\phi = dt\sqrt{A}p$, les élémens du mouvement seront déterminés ainsi

$$1°.\ dp = \frac{dt\sqrt{p}}{\sqrt{A}} \cdot \frac{2Pp}{1-u\cos\omega},$$ pour la variation du parametre

$$2°.\ du = \frac{dt\sqrt{p}}{\sqrt{A}}\left(\frac{P(u - 2\cos\omega + u\cos\omega^2)}{1 - u\cos\omega} - Q\sin\omega\right)$$

pour la variation de l'excentricité

$$3°.\ d\omega = d\phi + \frac{dt\sqrt{p}}{u\sqrt{A}}\left(\frac{P(2 - u\cos\omega)\sin\omega}{1 - u\cos\omega} - Q\cos\omega\right)$$

pour la variation de l'anomalie vraie ω;

où il faut remarquer que $\phi - \omega$ exprime la longitude de l'apogée. Ensuite, ayant $v = \frac{p}{1 - u\cos\omega}$, la longitude de la Lune ϕ doit être tirée de cette équation $dt\sqrt{A} = \frac{p\,d\phi\sqrt{p}}{(1 - u\cos\omega)^2}$ & la variation de la distance v est connue immédiatement par cette formule $dv = \frac{-u\,dt\sin\omega\,.\sqrt{A}}{\sqrt{p}}$.

22. Voilà donc une Analyse fort aisée, qui nous a conduits aux mêmes formules que j'avois trouvées autrefois par une méthode fort embarrassée qui passoit par des intégrations & par la résolution d'une formule irrationelle quarrée, qu'il falloit rendre rationelle. Ces formules nous découvrirent pour chaque instant la grandeur, l'espece & la position de la section conique, dans laquelle la Lune ou tout autre corps céleste contineroit à se mouvoir, si les forces perturbatrices évanouissoient subitement. Or, quelque naturelle que paroisse cette méthode, elle a, comme j'ai déjà remarqué, cet inconvénient, qu'elle ne sauroit avoir

avoir lieu dans les cas où l'excentricité u eſt très petite, puiſqu'alors le mouvement de l'apogée ou la valeur de l'angle ω ſeroit aſſujettie à de trop grandes inégalités à cauſe des parties diviſées par u. Mais, pour la Lune, où l'excentricité eſt aſſez conſidérable, je crois qu'il ne ſeroit pas inutile d'y appliquer ces formules & d'y conſtruire des Tables.

23. Après avoir déduit cette méthode d'enviſager les dérangemens des corps céleſtes, des formules générales du §. 19, je remarque que ces mêmes formules nous fourniſſent auſſi la premiere méthode dont je me ſuis ſervi pour conſtruire mes premieres Tables Lunaires, & que feu M. *Meyer* a ſuivie enſuite avec tant de ſuccès. Pour y arriver, on n'a qu'à ſuppoſer l'excentricité conſtante, qui ſoit $= e$, & poſer $q = -e \cos\omega$, de ſorte que ω exprime ce qu'on nomme l'anomalie vraie. De là nous aurons d'abord la diſtance $v = \frac{p}{1 - e\cos\omega}$, & partant $dt\sqrt{A} = \frac{p\,d\Phi\sqrt{p}}{(1 - e\cos\omega)^2}$; donc $dv = vvr\,d\Phi = r\,dt\sqrt{Ap}$, où la valeur de r ſera déterminée par les formules ſuivantes

$$dp = \frac{2Pv^3 d\Phi}{A} = \frac{dt\sqrt{p}}{\sqrt{A}} \cdot \frac{2Pp}{1 - e\cos\omega}$$

$$dr = \frac{-e\,d\Phi\cos\omega}{p} - \frac{vv\,d\Phi}{Ap}\left(\frac{Ppr}{1 - e\cos\omega} - Q\right).$$

$$e\,d\omega\sin\omega = -pr\,d\Phi + \frac{vv\,d\Phi}{A} \cdot 2P.$$

Mais ici on voit bien, qu'à moins que la quantité $\frac{2Pvv}{A} - pr$ ne devienne diviſible par $e\sin\omega$, l'anomalie vraie ω en obtient un mouvement très irrégulier: de ſorte que cette méthode eſt auſſi aſſujettie à de grands inconvéniens.



CONSIDÉRATIONS
SUR LE
PROBLEME DES TROIS CORPS.(*)
PAR MR. L. EULER.

1.

Le probleme où il s'agit de déterminer le mouvement de trois corps qui s'attirent mutuellement, selon l'hypothese Newtonienne, est devenu depuis quelque tems si fameux par les soins que les plus grands Géometres y ont employés, qu'on a déjà commencé à disputer, à qui la gloire de l'avoir le premier résolu appartenoit. Mais cette dispute est fort prématurée, & il s'en faut bien encore qu'on soit parvenu à une solution parfaite du probleme. Tout ce qu'on y a fait jusqu'ici est restreint à un cas très particulier, où le mouvement de chacun des trois corps suit à peu près les regles établies par *Kepler*; & dans ce cas même on s'est borné à déterminer le mouvement par approximation. Dans tous les autres cas, on ne sauroit se vanter qu'on puisse assigner seulement à peu près le mouvement des trois corps, lequel demeure encore pour nous un aussi grand mystere, que si l'on n'avoit jamais pensé à ce probleme.

2. Pour prouver clairement combien on est encore éloigné d'une solution complette de ce probleme, on n'a qu'à le comparer avec le cas où il n'y a que deux corps qui s'attirent mutuellement, & même avec le cas le plus simple, où il s'agit de déterminer le mouvement d'un corps pesant projetté d'une maniere quelconque dans le vuide. Et on conviendra aisément qu'il auroit été impossible de trouver

(*) lû le 4. Déc. 1764.

ver la parabole qu'un tel corps décrit, sans avoir connu préalablement la loi suivant laquelle un corps pesant tombe perpendiculairement en bas. Sans la découverte de Galilée, que la vitesse d'un tel corps tombant croît en raison de la racine quarrée de la hauteur, on ne seroit certainement jamais arrivé à la connoissance de la parabole qu'un corps jetté obliquement décrit dans le vuide.

3. Il en est de même du mouvement de deux corps en général qui s'attirent mutuellement, où il faut aussi commencer par déterminer le mouvement rectiligne dont ces corps s'approchent ou s'éloignent l'un de l'autre, avant qu'on puisse entreprendre de chercher les sections coniques que ces corps décriront étant jettés obliquement. Car, quoique le grand *Newton* ait suivi un ordre renversé dans ses recherches, personne ne sauroit douter qu'il n'eût jamais réussi à déterminer le mouvement curviligne, sans avoir été en état de déterminer le rectiligne.

4. De là je tire cette conséquence incontestable, qu'on ne sauroit espérer de résoudre le probleme des trois corps en général, à moins qu'on n'ait trouvé moyen de résoudre le cas où les trois corps se meuvent sur une ligne droite; ce qui arrive lorsqu'ils ont été disposés au commencement sur une ligne droite, & qu'ils y ont été, ou en repos, ou poussés selon la même direction. Donc, avant que d'entreprendre la solution du probleme des trois corps, tel qu'il est communément proposé, il est indispensablement nécessaire de s'appliquer au cas où le mouvement de tous les trois corps se fait sur la même ligne droite; & on peut bien être assuré que, tant que ce dernier probleme se refusera à nos recherches, on se flattera en vain de réussir dans la solution du premier. Dans des recherches si difficiles, il convient toujours de commencer par les cas les plus simples.

5. Or le cas où les trois corps se meuvent sur une même ligne droite, est sans contredit beaucoup plus simple que si ces corps décrivoient des lignes courbes, où il pourroit même arriver que ces

courbes ne se trouvassent point dans un même plan; ces circonstances doivent nécessairement rendre nos recherches beaucoup plus compliquées. Cela est si évident, qu'on sera bien surpris qu'aucun des grands Géometres qui se sont occupés de ce probleme, n'ait commencé ses recherches par le cas du mouvement rectiligne; mais la raison en est sans doute, qu'un tel mouvement ne se trouve point au monde, & que ces grands hommes se sont un peu hâtés d'appliquer le résultat de leurs travaux aux mouvemens réels du Ciel, sans vouloir entreprendre des recherches qui n'y auroient point un rapport immédiat.

6. Peut-être sera-t-on même tenté de croire que ce cas, à cause de sa simplicité, a été trop au dessous des forces de ces Géometres, & qu'ils en ont voulu laisser le développement à des génies moins élevés: mais ce sentiment seroit bien mal fondé, puisque la solution de ce cas est assujettie à de si grandes difficultés, qu'elles semblent n'avoir pû encore être surmontées par les plus grands Analystes. Il me paroit donc très important de mettre devant les yeux toutes ces difficultés, afin que ceux qui voudront encore s'occuper du grand probleme des trois corps puissent réunir leurs forces pour les surmonter, s'il est possible. Ces efforts seront d'autant plus utiles, qu'on ne sauroit espérer de parvenir jamais à une solution parfaite de ce probleme, à moins qu'on n'ait auparavant trouvé moyen de vaincre toutes les difficultés dont le cas du mouvement rectiligne est enveloppé; & encore alors peut-être ne sera-t-on pas fort avancé à l'égard du probleme général.

Du mouvement rectiligne de trois corps.

Pl. VIII. Fig. 1.

7. Que les trois corps se meuvent donc sur la ligne droite EF, & qu'ils se trouvent à présent aux points A, B, C, les lettres A, B, C, étant prises en même tems pour marquer leurs masses respectives. Donc, posant les distances $AB = x$, & $BC = y$, le corps A sera poussé vers F par les forces accélératrices $\frac{B}{xx} + \frac{C}{(x+y)^2}$, le corps B sera poussé en même sens vers F par la force accélératrice

trice $= \frac{C}{yy} - \frac{A}{xx}$, & le corps C vers E par la force $= \frac{B}{yy} + \frac{A}{(x+y)^2}$. Confidérons le corps B comme en repos, ou bien cherchons le mouvement refpectif des deux autres A & C par rapport à celui-ci ; & puifqu'il faut tranfporter en fens contraire les forces qui agiffent fur B, aux deux autres, le corps A fera pouffé vers B par la force $= \frac{A+B}{xx} - \frac{C}{yy} + \frac{C}{(x+y)^2}$, & le corps C vers B par la force $= \frac{B+C}{yy} - \frac{A}{xx} + \frac{A}{(x+y)^2}$.

8. Suppofons maintenant l'élément du tems $= \mathrm{d}t$, en le prenant conftant, & les principes de mécanique nous fourniffent d'abord ces deux équations :

$$\text{I.} \quad \frac{\mathrm{dd}x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{A-B}{xx} + \frac{C}{yy} - \frac{C}{(x+y)^2}$$

$$\text{II.} \quad \frac{\mathrm{dd}y}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{B-C}{yy} + \frac{A}{xx} - \frac{A}{(x+y)^2}$$

où je ne m'embarraffe point du coëfficient qu'il faudroit donner à l'élément $\mathrm{d}t$, qui dépend de la maniere dont on veut exprimer le tems. C'eft donc uniquement de la réfolution de ces deux équations différentielles du fecond degré que dépend la détermination du mouvement des corps A & C, par rapport au corps B ; de forte que le probleme eft réduit à une queftion purement analytique.

9. Avant que d'entreprendre la réfolution de ces équations, je remarque qu'il y a un cas où toutes les difficultés s'évanouiffent ; car il eft aifé de voir qu'un cas feroit poffible où les diftances x & y conferveroient toujours le même rapport entr'elles. Pour trouver ce cas, pofons $y = nx$, & nous aurons *Cas particulier.*

$$-n(A+B)+\frac{C}{n}-\frac{Cn}{(1+n)^2}=\frac{-B-C}{nn}+A-\frac{A}{(n+1)^2},$$

ou bien

$$n^3(nn+3n+3)A+(n^5+2n^4+n^3-nn-2n-1)B-(3nn+3n+1)C=0,$$

d'où il est aisé de trouver entre les masses A, B, C, le juste rapport, le nombre n étant donné, pour que ce cas puisse avoir lieu. Mais, si les masses sont données, pour trouver le nombre n il faut résoudre cette équation du cinquieme degré:

$$(A+B)n^5+(3A+2B)n^4+(3A+B)n^3-(B+3C)nn-(2B+3C)n-B-C=0,$$

& alors, posant $A+B-\frac{C}{nn}+\frac{C}{(1+n)^2}=E$, on aura pour le mouvement $\frac{dx^2}{2dt^2}=E\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right)$ & $dt\sqrt{2E}=\frac{-dx\sqrt{ax}}{\sqrt{(a-x)}}$.

10. Ayant donc trouvé la juste valeur du nombre n, de sorte qu'on ait toujours $y=nx$, ce cas aura lieu quand au commencement les distances BA & BC auront été comme 1 à n, & que les vitesses imprimées alors vers B auront eu le même rapport. Alors le mouvement du corps A vers B sera le même que celui d'un corpuscule infiniment petit vers un corps dont la masse seroit $=E$; & pour mieux déterminer ce mouvement, on n'a qu'à mettre $x=a\cos\Phi^2$, pour avoir $dt\sqrt{2E}=2a^{\frac{3}{2}}d\Phi\cos\Phi^2$; & partant $t\sqrt{2E}=a^{\frac{3}{2}}(\Phi+\sin\Phi\cos\Phi)$, où a marque la distance AB au commencement, lorsqu'il étoit $t=0$ & $\Phi=0$, en supposant que le corps A s'est trouvé alors en repos. Il arrivera donc jusqu'en B, faisant $\Phi=90^\circ=\frac{\pi}{2}$, après le tems t déterminé par cette égalité: $t\sqrt{2E}=$

$a^{\frac{3}{2}}$

$a^{\frac{3}{2}}\frac{\pi}{2}$. Cette maniere de repréſenter le mouvement, en y introduiſant des arcs de cercle, ſemble être la plus propre à ce deſſein.

11. Mais retournons à nos deux équations générales du §. 8, & je remarque qu'on en peut former une troiſieme équation, qui admette l'intégration. Pour cet effet, multiplions la premiere par $\alpha\,dx + \beta\,dy$ & l'autre par $\beta\,dx + \gamma\,dy$, & leur ſomme ſera:

$$\frac{\alpha dx\,ddx + \beta dy\,ddx + \beta dx\,ddy + \gamma dy\,ddy}{dt^2} =$$

$$-\frac{\alpha(A+C)dx}{xx} + \frac{\alpha C dx}{yy} - \frac{\alpha C dx - \beta C dy}{(x+y)^2}$$

$$-\frac{\beta(A+B)dy}{xx} + \frac{\beta C dy}{yy} - \frac{\beta A dx - \gamma A dy}{(x+y)^2}$$

$$+\frac{\beta A dx}{xx} - \frac{\beta(B+C)dx}{yy}$$

$$+\frac{\gamma A dy}{xx} - \frac{\gamma(B+C)dy}{yy}$$

dont le premier membre eſt intégrable, ſon intégrale étant

$$\frac{\alpha dx^2 + 2\beta dx dy + \gamma dy^2}{2\,dt^2}.$$

12. Pour rendre auſſi intégrable l'autre membre, faiſons

$$\gamma A = \beta(A+B);\ \alpha C = \beta(B+C)\ \&\ \alpha C + \beta A = \beta C + \gamma A,$$

dont la derniere égalité eſt déjà renfermée dans les deux précédentes: prenant donc $\beta = AC$, nous aurons $\gamma = C(A+B)$ & $\alpha = A(B+C)$, & l'intégrale de l'autre membre ſe trouvera:

$$\frac{\alpha(A+B)-\beta A}{x} + \frac{\gamma(B+C)-\beta C}{y} + \frac{\alpha C + \beta A}{x+y},$$

puis,

puis, substituant pour α, β, γ, les valeurs trouvées se changent en cette forme:

$$\frac{AB(A+B+C)}{x}+\frac{BC(A+B+C)}{y}+\frac{AC(A+B+C)}{x+y},$$

& partant notre équation intégrale sera:

$$\frac{A(B+C)dx^2+2ACdxdy+C(A+B)dy^2}{2dt^2}=(A+B+C)\left(\Gamma+\frac{AB}{x}+\frac{BC}{y}+\frac{AC}{x+y}\right),$$

où Γ est la quantité constante, introduite par l'intégration.

13. Si, d'une maniere semblable, nous pouvions trouver encore une autre équation intégrale, on n'auroit alors qu'à en éliminer l'élément dt, pour avoir une équation différentielle du premier degré entre les deux variables x & y; & on seroit certainement bien avancé dans la solution de ce probleme, quand même cette équation seroit encore assujettie à de très grandes difficultés. Mais il y a peu d'espérance de parvenir seulement à ce point; au moins toutes les peines que je me suis données pour découvrir encore une autre combinaison, qui conduisît à une équation intégrable, ont été inutiles. Je ne vois donc pas d'autre route que d'éliminer dans les équations différentielles du second degré l'élément dt^2, par le moyen de sa valeur trouvée ici:

$$\frac{1}{dt^2}=\frac{2(A+B+C)\left(\Gamma+\frac{AB}{x}+\frac{BC}{y}+\frac{AC}{x+y}\right)}{A(B+C)dx^2+2ACdxdy+C(A+B)dy^2}.$$

14. Mais il faut bien remarquer qu'il n'est pas permis de substituer simplement cette valeur dans l'une ou l'autre des équations du §. 8; car, puisque l'élément dt y est supposé constant, on ne gagneroit rien, parce que cette supposition y demeureroit toujours enveloppée. Pour cette raison il convient auparavant de délivrer les dites équa-

équations de cette condition, que l'élément du tems dt y est supposé constant. Pour cet effet, puisque la formule $\frac{ddx}{dt}$ y est posée pour $d.\frac{dx}{dt}$, en ne prenant aucun élément constant, au lieu de $\frac{ddx}{dt}$ il faut écrire $\frac{ddx}{dt} - \frac{dxddt}{dt^2}$, d'où les équations du §. 8. seront exprimées ainsi:

$$\text{I.} \quad \frac{ddx}{dt^2} - \frac{dxddt}{dt^3} = \frac{-A-B}{xx} + \frac{C}{yy} - \frac{C}{(x+y)^2}$$

$$\text{II.} \quad \frac{ddy}{dt^2} - \frac{dyddt}{dt^3} = \frac{-B-C}{yy} + \frac{A}{xx} - \frac{A}{(x+y)^2},$$

où aucun différentiel n'est supposé constant.

15. De ces deux équations éliminons d'abord le second différentiel ddt, pour avoir cette équation:

$$\frac{dyddx - dxddy}{dt^2} = \frac{-(A+B)dy - Adx}{xx} + \frac{(B+C)dx - Cdy}{yy} + \frac{Adx - Cdy}{(x+y)^2},$$

où il est maintenant permis d'écrire, au lieu de dt^2, sa valeur trouvée ci-dessus, ce qui nous conduit à cette équation:

$$\frac{2(A+B+C)\left(\Gamma + \frac{AB}{x} + \frac{BC}{y} + \frac{AC}{x+y}\right)(dyddx - dxddy)}{A(B+C)dx^2 + 2ACdxdy + C(A+B)dy^2} = \frac{-(A+B)dy - Adx}{xx} + \frac{(B+C)dx + Cdy}{yy} + \frac{Adx - Cdy}{(x+y)^2}.$$

Voilà donc une seule équation différentielle du second degré entre les deux variables x & y, qui contient la solution de notre probleme, & tout

tout se réduit à la découverte d'une méthode par laquelle on puisse rendre cette équation intégrable.

16. Quelque compliquée que paroisse cette équation, je pourrois produire des exemples assez semblables, où l'intégration a réussi; je crois donc qu'on ne doit point déseſpérer du succès. On peut rendre cette équation plus simple, & la délivrer des différentiels du second degré, en posant $dx = p dy$, pour avoir $dy ddx - dx ddy = dy^2 dp$, & notre équation prendra cette forme:

$$\frac{2(A+B+C)\left(\Gamma + \frac{AB}{x} + \frac{BC}{y} + \frac{AC}{x+y}\right) dp}{A(B+C)pp + 2ACp + C(A+B)}$$

$$+ \frac{A+B+Ap}{xx} dy - \frac{(B+C)p - C}{yy} dy + \frac{C - Ap}{(x+y)^2} dy = 0,$$

à laquelle satisfait, comme on le voit dabord, une certaine valeur constante prise pour p. Car, supposant $p = n$, ou bien $x = ny$, on aura

$$\frac{A+B+An}{nn} - (B+C)n - C + \frac{C - An}{(n+1)^2} = 0,$$

d'où l'on tire le même cas d'intégrabilité que j'ai déjà développé ci-dessus, où la valeur du nombre n doit être d'une équation du cinquieme degré.

17. Pour mieux approfondir la nature de cette équation, développons quelques cas dont la résolution est déjà connue d'ailleurs, ce qui arrive lorsque la masse d'un des trois corps est presque infinie par rapport aux autres, puisqu'alors chacun des deux autres y est porté tout comme si l'autre n'existoit point; de sorte que ce cas doit revenir à celui où il n'y auroit que deux corps. Supposons donc infinie la masse du corps B, & écrivant ΔB au lieu de Γ, nous aurons à résoudre cette équation:

Evolution du cas où $B = \infty$.

$$\frac{2\left(\Delta+\frac{A}{x}+\frac{C}{y}\right)dp}{App+C}+\frac{dy}{xx}-\frac{pdy}{yy}=0$$ (ayant posé $dx=pdy$)

ce qui nous assure que l'intégration ne sauroit se refuser à nos recherches, quoique les méthodes ordinaires nous prêtent peu de secours pour y arriver. Je reviens donc à la méthode que j'ai expliquée autrefois, où il s'agit de trouver un multiplicateur qui rende cette équation intégrable.

18. Quelques circonstances me font juger qu'un tel multiplicateur pourroit être une fonction de la seule quantité p, qui soit $=P$, & partant cette équation intégrable:

$$\frac{2\left(\Delta+\frac{A}{x}+\frac{C}{y}\right)Pdp}{App+C}+\frac{Pdy}{xx}+\frac{Ppdy}{yy}=0:$$

soit donc $2\int\frac{Pdp}{App+C}=Q$, aussi fonction de p, & le premier membre de l'intégrale sera $\left(\Delta+\frac{A}{x}+\frac{C}{y}\right)Q$. Soit donc l'équation intégrale entiere

$$\left(\Delta+\frac{A}{x}+\frac{C}{y}\right)Q+V=0,$$

où il est évident que la partie V ne sauroit renfermer p, mais qu'elle est fonction des seules quantités x & y. De là nous aurons:

$$\frac{Pdy}{xx}-\frac{Ppdy}{yy}=-\frac{AQpdy}{xx}-\frac{CQdy}{yy}+dV,$$

où $dV=\frac{(P+AQp)dy}{xx}+\frac{(CQ-Pp)dy}{yy}$, & partant intégrable; ce qui ne sauroit arriver à moins qu'il ne fût $P+AQp=$

$= \alpha p$, & $CQ - Pp = \beta$, ou bien $dV = \frac{\alpha dx}{xx} + \frac{\beta dy}{yy}$, & par conséquent

$$V = \gamma - \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y}.$$

19. Ces deux conditions nous fourniſſent:

$$Q = \frac{\alpha p - P}{Ap} = \frac{\beta + Pp}{C};$$

donc $(\alpha C - \beta A)p = P(App + C)$, & $P = \frac{(\alpha C - \beta A)p}{App + C}$; par conséquent $Q = \frac{\alpha pp + \beta}{App + C}$. Or il faut qu'il ſoit

$$Q = 2\int \frac{Pdp}{App + C}, \text{ ou bien } dQ = \frac{2Pdp}{App + C} = \frac{2(\alpha C - \beta A)pdp}{(App + C)^2},$$

ce qui étant préciſément d'accord avec la valeur de Q, l'équation intégrale cherchée ſera:

$$\left(\Delta + \frac{A}{x} + \frac{C}{y}\right) \cdot \frac{\alpha pp + \beta}{App + C} + \gamma - \frac{\alpha}{x} - \frac{\beta}{y} = 0,$$

ou bien

$$\Delta(\alpha pp + \beta) + \gamma(App + C) + \frac{\beta A - \alpha C}{x} + \frac{(\alpha C - \beta A)pp}{y} = 0$$

où les conſtantes α, β, γ, de même que Δ, peuvent être priſes à volonté, & partant l'intégrale aura cette forme:

$$E + Fpp + \frac{1}{x} - \frac{pp}{y} = 0, \quad \text{où } \Delta = AE - CF.$$

20. Or, pour ce cas, ayant $\Gamma = \Delta B = B(AE - CF)$, l'élément du tems dt doit être déterminé par cette équation:

dt^2

$$dt^2 = \frac{Adx + Cdy^2}{2B\left(AE - CF + \frac{A}{x} + \frac{C}{y}\right)} = \frac{(App + C)dy^2}{2B\left(AE - CF + \frac{A}{x} + \frac{C}{y}\right)};$$

mais l'équation trouvée donne

$$pp = \left(E + \frac{1}{x}\right) : \left(\frac{1}{y} - F\right);$$

cette valeur y étant substituée fournit celle-ci:

$$dt^2 = dy^2; \ 2B\left(\frac{1}{y} - F\right), \text{ ou } dt\sqrt{2B} = \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{(1 - Fy)}}.$$

Ensuite, puisque $pp = \frac{dx^2}{dy^2}$, on aura:

$$\frac{xdx^2}{1 + Ex} = \frac{ydy^2}{1 - Fy} \text{ ou } \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(1 + Ex)}} = \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{(1 - Fy)}} = dt\sqrt{2B},$$

d'où l'on voit clairement que l'un & l'autre des corps A & C fait le même mouvement vers le corps B, tout comme si l'autre n'existoit point. De la même maniere, on développera les cas où la masse A, ou C, seroit presque infiniment grande par rapport aux autres, de sorte qu'il seroit superflu d'en faire le calcul.

21. Essayons donc la même méthode pour intégrer l'équation générale du §. 16; pour cet effet multiplions-la par une fonction de p qui soit $= P$, pour avoir cette équation: *Essai pour l'intégration de l'équation générale.*

$$\frac{2(A + B + C)\left(\Gamma + \frac{AB}{x} + \frac{BC}{y} + \frac{AC}{x + y}\right)Pdp}{A(B + C)pp + 2ACp + C(A + B)}$$

$$+ \frac{(A+B+Ap)Pdy}{xx} - \frac{(C+(B+C)p)Pdy}{yy} + \frac{(C-Ap)Pdy}{(x+y)^2} = 0,$$

que nous supposerons intégrable. Posons l'intégrale

$$2(A + B + C)\int\frac{Pdp}{A(B + C)pp + 2ACp + C(A + B)} = Q,$$

 &

& soit l'équation intégrale cherchée

$$\left(\Gamma + \frac{AB}{x} + \frac{BC}{y} + \frac{AC}{x+y}\right) Q + V = 0,$$

d'où nous aurons :

$$dV - \frac{ABQ\,p\,dy}{xx} - \frac{BCQ\,dy}{yy} - \frac{ACQ(1+p)\,dy}{(x+y)^2} =$$
$$\frac{(A+B+Ap)P\,dy}{xx} - \frac{(C+(B+C)p)P\,dy}{yy} + \frac{(C-Ap)P\,dy}{(x+y)^2}.$$

22. Comme la lettre V ne sauroit renfermer p, posons

$$V = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{x+y} + \delta,$$

& nous aurons à remplir les conditions suivantes :

$$-\alpha p = (A + B + Ap)\,P + ABQ\,p$$
$$-\beta = -(C + (B + C)\,p)\,P + BCQ$$
$$-\gamma(1+p) = (C - Ap)\,P + ACQ(1+p).$$

Eliminons-en Q, ce qui peut se faire en deux manieres :

$$(\beta A - \alpha C)\,p = (A(B+C)pp + 2ACp + C(A+B))P$$
$$(\beta A - \gamma B)(1+p) = (A(B+C)pp + 2ACp + C(A+B))P,$$

d'où l'on voit qu'on ne sauroit satisfaire à la fois à ces deux conditions, ce qui est une marque évidente, que cette méthode ne réussit point pour l'équation générale. Ou bien le multiplicateur qui la rend intégrable, n'est pas simplement une fonction de la quantité p.

23. Comme dans le cas $B = \infty$, l'intégrale a été réduite à cette forme : $E + Fpp + \frac{1}{x} - \frac{pp}{y} = 0$, on pourroit penser que l'intégrale de notre équation générale auroit peut-être une telle forme :

$$\frac{1}{x+y} = \frac{P}{x} + \frac{Q}{y} + R,$$

où

où P, Q & R seroient de certaines fonctions de la quantité p. Mais, en substituant pour $\frac{1}{x+y}$ cette valeur, & pour $\frac{dy^1}{(x+y)^2}$ celle-ci

$$\frac{Ppdy}{(1+p)xx} + \frac{Qdy}{(1+p)yy} - \frac{1}{1+p}\left(\frac{dP}{x} + \frac{dQ}{y} + dR\right),$$

on s'appercevra aisément qu'il n'est pas possible de satisfaire à l'équation différentielle de cette maniere. D'où l'on peut conclure que l'intégrale ne sauroit être exprimée d'une façon si simple, & que sa forme sera beaucoup plus compliquée & renfermera peut-être des quantités transcendantes.

24. En employant de cette sorte la méthode des multiplicateurs on voit bien que ce n'est pas la constante Γ qui en empêche le succès: cependant il n'y a aucun doute que, posant cette constante $\Gamma = 0$, l'équation ne doive devenir beaucoup plus facile à résoudre, & partant il sera toujours très raisonnable de commencer par ce cas, puisque, tant qu'on ne trouve pas moyen de le résoudre, on entreprendroit en vain la résolution de l'équation générale. Posons donc $\Gamma = 0$, pour avoir à résoudre cette équation: *Considération du cas. $\Gamma = 0$.*

$$\frac{2(A+B+C)\left(\frac{AB}{x} + \frac{BC}{y} + \frac{AC}{x+y}\right)dp}{A(B+C)pp + 2ACp + C(A+B)} + \frac{A+B+Ap}{xx}dy$$
$$- \frac{(B+C)p - C}{yy}dy + \frac{C-Ap}{(x+y)^2}dy = 0,$$

qui a cette belle propriété, que les deux variables x & y y remplissent partout le même nombre de dimensions, ou bien que cette équation est du nombre de celles qu'on nomme homogenes.

25. Ayant déjà posé $dx = pdy$, posons outre cela $x = sy$, & puisque $pdy = sdy + yds$, nous en tirons $\frac{dy}{y} = \frac{ds}{p-s}$. Or l'équation elle-même à résoudre prendra cette forme:

2(A

$$\frac{2(A+B+C)\left(\frac{AB}{s}+BC+\frac{AC}{s+1}\right)dp}{A(B+C)pp+2ACp+C(A+B)}+\frac{A+B+Ap}{ss}\cdot\frac{dy}{y}$$

$$-(C+(B+C)p)\frac{dy}{y}+\frac{C-Ap}{(s+1)^2}\cdot\frac{dy}{y}=0,$$

où l'on n'a qu'à substituer pour $\frac{dy}{y}$ sa valeur $\frac{ds}{p-s}$, pour obtenir une équation différentielle du premier degré entre les deux variables p & s, qui est:

$$\frac{2(A+B+C)\left(\frac{AB}{s}+BC+\frac{AC}{s+1}\right)dp}{A(B+C)pp+2ACp+C(A+B)}+\frac{ds}{p-s}\left(\frac{A+B+Ap}{ss}\right.$$

$$\left.-C-(B+C)p+\frac{C-Ap}{(s+1)^2}\right)=0,$$

& se réduit à cette forme:

$$\frac{2(A+B+C)s(s+1)(p-s)dp}{A(B+C)pp+2ACp+C(A+B)}+\frac{ds((A+B)(s+1)^2-Cs^3(s+2))+pds(A(2s+1)-(B+C)ss(s+1)^2)}{BCss+(AB+BC+AC)s+AB}=0.$$

26. Partageons cette équation dans les deux membres suivans:

$$\frac{2(A+B+C)pdp}{A(B+C)pp+2ACp+C(A+B)}+\frac{ds((A+B)(s+1)^2-Cs^3(s+2))}{s(s+1)(BCss+(AB+BC+AC)s+AB)}=$$

$$\frac{2(A+B+C)sdp}{A(B+C)pp+2ACp+C(A+B)}+\frac{pds((B+C)ss(s+1)^2-A(2s+1))}{s(s+1)(BCss+(AB+BC+AC)s+AB)},$$

dont le premier est intégrable de lui-même, & le dernier le devient en le divisant par ps. Cette équation, quoique différentielle du premier degré, semble être assujettie à de plus grandes difficultés que la précédente du second degré; puisqu'ici même, dans le cas où l'on

l'on fait B $= \infty$, l'équation n'en devient presque point plus traitable. Car on aura bien:

$$\frac{2(p-s)\,dp}{App+C} + \frac{(1-pss)\,ds}{s(Cs+A)} = 0,$$

qui est certainement intégrable, quoique la route pour la résoudre paroisse fort cachée. Cependant on verra que cette valeur $s = \frac{1}{pp}$ y satisfait, ou en est une intégrale particuliere.

27. Mais c'est d'une maniere bien singuliere que nous connoissons l'intégrale de cette équation

$$\frac{2(p-s)\,dp}{App-C} + \frac{(1-pss)\,ds}{s(Cs+A)} = 0;$$

nous ne savons autre chose sinon que, posant $x = sy$ ou $s = \frac{x}{y}$, de sorte que $\frac{dy}{y} = \frac{ds}{p-s}$, on aura par le §. 19.

$$\frac{1}{x} - \frac{pp}{y} = n(App + C) \text{ à cause de } AE - CF = 0,$$

& de là $\int \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(1-nCx)}} = \int \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{(1+nAy)}}$. Mais nous ne saurions développer de cette équation le rapport entre les quantités p & s. Voilà donc un exemple bien remarquable d'une équation différentielle dont nous connoissons la construction, quoiqu'une méthode directe pour l'en déduire nous semble manquer, de sorte qu'on ne sauroit douter de ce côté que l'analyse ne soit encore susceptible d'un progrès très considérable.

28. Il est bon d'observer aussi que, quoiqu'on suppose ou A $= 0$ ou C $= 0$, la résolution de cette équation ne se trouve pas dégagée de tout embarras. Car soit A $= 0$ pour avoir cette équation:

tion: $2p\,dp - 2s\,dp - p\,ds + \frac{ds}{ss} = 0$, dont la solution ne saute pas certainement d'abord aux yeux, quoiqu'on sache que la valeur $pps = 1$ lui convienne. Cependant on arrivera au but en posant $p = \frac{z}{\sqrt{s}}$, d'où l'on tire

$$\frac{2z\,dz}{s} + \frac{ds}{ss}(1 - zz) - 2\,dz\sqrt{s} = 0, \text{ ou bien}$$

$$\frac{ds}{ss\sqrt{s}} + \frac{2z\,dz}{(1-zz)s\sqrt{s}} = \frac{2\,dz}{1-zz},$$ qui étant multipliée par $(1-zz)^{\frac{3}{2}}$ donne l'intégrale $-\frac{2}{3}s^{-\frac{3}{2}}(1-zz)^{\frac{3}{2}} = 2\int dz\sqrt{(1-zz)}$, où

$$s^{\frac{3}{2}} = \frac{-(1-zz)\sqrt{(1-zz)}}{3\int dz\sqrt{(1-zz)}}, \ \& \sqrt{s} = \frac{-\sqrt{(1-zz)}}{\sqrt[3]{3\int dz\sqrt{(1-zz)}}};$$

$$\& \ p = \frac{-z\sqrt[3]{3\int dz\sqrt{(1-zz)}}}{\sqrt{(1-zz)}}.$$

De là, à cause de $\frac{1}{x} - \frac{pp}{y} = \text{Const.}$ ou $\frac{1}{y}\left(\frac{1}{s} - pp\right) = \alpha$, on aura $y = \frac{1}{\alpha}\sqrt[3]{(3\int dz\sqrt{(1-zz)})^2}$, & $x = sy = \frac{1-zz}{\alpha}$.

29. A cause de cet embarras, nonobstant que la chose en elle-même soit fort aisée, je conclus qu'il ne convient en aucune maniere de conduire la solution de notre probleme de la façon que je viens de faire. Soit que la constante Γ évanouisse ou non, il n'est jamais à propos de poser $x = sy$, & d'introduire cette quantité s dans le calcul; aussi, pour peu qu'on réflêchisse sur la nature de la question, on verra que les deux distances x & y sont trop peu liées entr'elles pour qu'on puisse faire entrer leur rapport dans le calcul. Chacune de ces distances est plutôt immédiatement liée avec le tems t, & par cette raison je ne

ne sais pas si l'on ne feroit pas beaucoup mieux de ne point bannir du calcul l'élément du tems dt. Il est vrai qu'on ne voit pas alors comment on pourroit parvenir à une solution; mais c'est principalement aux Géometres à employer tous leurs efforts pour trouver une autre route, qui conduise à la solution du probleme.

30. On voit par-là qu'on est encore bien éloigné de la solution du cas le plus simple du probleme des trois corps, qui a lieu sans doute lorsque leur mouvement se fait sur la même ligne droite; & partant à plus forte raison il s'en faut beaucoup qu'on soit déjà arrivé à une solution parfaite de ce grand probleme. On comprend plutôt qu'on est encore à peine avancé au delà du premier pas. Ce premier pas renferme quelques propriétés générales, qui conviennent non seulement au mouvement de trois corps qui s'attirent mutuellement, mais qui ont également lieu, quelque grand que soit le nombre des corps. Comme il est très important de connoitre ces propriétés générales, quoiqu'elles ne suffisent pas à la détermination du mouvement, dès que le nombre des corps va au delà de deux, je vai les déduire des premieres formules que les principes mécaniques nous fournissent, afin qu'on voie clairement jusqu'à quel point on est déjà avancé dans ces recherches.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES
du mouvement des corps qui s'attirent mutuellement, quelque grand que soit leur nombre.

31. Considérons quatre corps, dont les masses soient A, B, C, D; & qui se trouvent à présent aux points A, B, C, D représentés dans la Figure; & qui par leur mouvement soient transportés en a, b, c, d pendant l'élément du tems dt, en parcourant les espaces infiniment petits Aa, Bb, Cc, Dd. Or, en vertu de l'attraction mutuelle, le corps A est poussé à la fois par les forces accélératrices suivantes: Fig. 2.

selon $AB = \frac{B}{AB^2}$; selon $AC = \frac{C}{AC^2}$; selon $AD = \frac{D}{AD^2}$,

& de la même maniere chacun des autres corps est sollicité par trois semblables forces accélératrices. Ce que je dis ici de quatre corps s'appliquera sans aucune difficulté aux cas où le nombre des corps seroit ou plus grand ou plus petit; aussi n'envisagé-je point ces quatre corps comme existans dans un même plan, pour rendre ces recherches aussi générales qu'il est possible.

32. Quel que puisse être le mouvement de ces quatre corps, je le rapporte à un point fixe O, pris à volonté dans l'espace absolu, par lequel je fais passer trois lignes droites, pareillement fixes, OL, OM, ON, perpendiculaires entr'elles, pour représenter par-là trois plans fixes LOM, LON & MON, & y rapporter les lieux de nos corps à chaque instant; ce qui se fait pour chaque corps par trois coordonnées paralleles aux trois directions fixes OL, OM & ON. Nommons donc ces coordonnées

pour le corps A - -	$OX = x$;	$XY = y$;	$YA = z$
pour le corps B - -	$OX' = x'$;	$X'Y' = y'$;	$Y'B = z'$
pour le corps C - -	$OX'' = x''$;	$X''Y'' = y''$;	$Y''C = z''$
pour le corps D - -	$OX''' = x'''$;	$X'''Y''' = y'''$;	$Y'''D = z'''$.

Soient de plus les espaces infiniment petits parcourus dans l'élément du tems dt, $Aa = ds$; $Bb = ds'$; $Cc = ds''$; $Dd = ds'''$.

33. Cela posé, il est clair dabord qu'on aura

$$dsdds = dxddx + dyddy + dzddz = \tfrac{1}{2}d.Aa^2$$
$$ds'dds' = dx'ddx' + dy'ddy' + dz'ddz' = \tfrac{1}{2}d.Bb^2$$
$$ds''dds'' = dx''ddx'' + dy''ddy'' + dz''ddz'' = \tfrac{1}{2}d.Cc^2$$
$$dds'''dds''' = dx'''ddx''' + dy'''ddy''' + dz'''ddz''' = \tfrac{1}{2}d.Dd^2.$$

Ensuite les distances entre les corps seront déterminées par les formules suivantes:

$$AB^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2$$
$$AC^2 = (x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2$$
$$AD^2 = (x''' - x)^2 + (y''' - y)^2 + (z''' - z)^2$$
$$BC^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2$$
$$BD^2 = (x''' - x')^2 + (y''' - y')^2 + (z''' - z')^2$$
$$CD^2 = (x''' - x'')^2 + (y''' - y'')^2 + (z''' - z'')^2,$$

d'où l'on tire les différentiels de ces diſtances:

$$d.AB = \frac{(x'-x)(dx'-dx) + (y'-y)(dy'-dy) + (z'-z)(dz'-dz)}{AB},$$

& pareillement les autres.

34. Conſidérons d'abord la force accélératrice $\frac{B}{AB^2}$, dont le corps A eſt attiré par le corps B ſelon la direction AB, & décompoſant cette force ſelon les trois directions fixes OL, OM, ON, on trouvera que le corps A eſt ſollicité ſelon ces directions par les forces accélératrices ſuivantes,

ſelon OL, $= \frac{B(x'-x)}{AB^3}$; ſelon OM, $= \frac{B(y'-y)}{AB^3}$; ſelon ON, $= \frac{B(z'-z)}{AB^3}$.

On n'a qu'à y ajouter les forces, ſelon les mêmes directions, qui réſultent de l'attraction des autres corps, exercées ſur le corps A, pour avoir toutes les forces qui y agiſſent. Enſuite on fera la même choſe pour chacun des autres corps; & les principes du mouvement fourniront autant d'équations qu'il y a de forces qui agiſſent ſur chaque corps.

35. De là, prenant conſtant l'élément du tems dt, on tirera les équations ſuivantes:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{I.} & \frac{ddx}{dt^2} &= \frac{B(x'-x)}{AB^3}+\frac{C(x''-x)}{AC^3}+\frac{D(x'''-x)}{AD^3}\\
&\text{II.} & \frac{ddy}{dt^2} &= \frac{B(y'-y)}{AB^3}+\frac{C(y''-y)}{AC^3}+\frac{D(y'''-y)}{AD^3}\\
&\text{III.} & \frac{ddz}{dt^2} &= \frac{B(z'-z)}{AB^3}+\frac{C(z''-z)}{AC^3}+\frac{D(z'''-z)}{AD^3}
\end{aligned}\right\}\text{ pour le corps A.}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{IV.} & \frac{ddx'}{dt^2} &= \frac{C(x''-x')}{BC^3}+\frac{D(x'''-x')}{BD^3}+\frac{A(x-x')}{BA^3}\\
&\text{V.} & \frac{ddy'}{dt^2} &= \frac{C(y''-y')}{BC^3}+\frac{D(y'''-y')}{BD^3}+\frac{A(y-y')}{BA^3}\\
&\text{VI.} & \frac{ddz'}{dt^2} &= \frac{C(z''-z')}{BC^3}+\frac{D(z'''-z')}{BD^3}+\frac{A(z-z')}{AB^3}
\end{aligned}\right\}\text{ pour le corps B.}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{VII.} & \frac{ddx''}{dt^2} &= \frac{D(x'''-x'')}{CD^3}+\frac{A(x-x'')}{CA^3}+\frac{B(x'-x'')}{CB^3}\\
&\text{VIII.} & \frac{ddy''}{dt^2} &= \frac{D(y'''-y'')}{CD^3}+\frac{A(y-y'')}{CA^3}+\frac{B(y'-y'')}{CB^3}\\
&\text{IX.} & \frac{ddz''}{dt^2} &= \frac{D(z'''-z'')}{CD^3}+\frac{A(z-z'')}{CA^3}+\frac{B(z'-z'')}{CB^3}
\end{aligned}\right\}\text{ pour le corps C.}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{X.} & \frac{ddx'''}{dt^2} &= \frac{A(x-x''')}{DA^3}+\frac{B(x'-x''')}{DB^3}+\frac{C(x''-x''')}{DC^3}\\
&\text{XI.} & \frac{ddy'''}{dt^2} &= \frac{A(y-y''')}{DA^3}+\frac{B(y'-y''')}{DB^3}+\frac{C(y''-y''')}{DC^3}\\
&\text{XII.} & \frac{ddz'''}{dt^2} &= \frac{A(z-z''')}{DA^3}+\frac{B(z'-z''')}{DB^3}+\frac{C(z''-z''')}{DC^3}
\end{aligned}\right\}\text{ pour le corps D.}$$

Voilà

Voilà donc douze équations par lesquelles le mouvement de tous les quatre corps est déterminé, d'où l'on voit que pour tout autre nombre de corps on auroit toujours trois fois autant d'équations, ayant outre le tems t autant de quantités inconnues & variables.

36. Comme aucune de ces équations n'est intégrable, tout revient à en former, par certaines combinaisons, de nouvelles équations qui admettent l'intégration, & si l'on en pouvoit tirer douze équations de cette nature, le probleme seroit parfaitement résolu. Mais il s'en faut beaucoup qu'on puisse pousser la solution à ce point de perfection: & il faut bien se contenter du nombre d'équations intégrales que les méthodes connues peuvent fournir. Or d'abord des équations I, IV, VII, X on tirera celle-ci:

$$\frac{\mathrm{A}ddx + \mathrm{B}ddx' + \mathrm{C}ddx'' + \mathrm{D}ddx'''}{dt^2} = o,$$

où les autres membres se détruisent tous mutuellement. Cette équation donne donc par l'intégration:

$$\mathrm{A}dx + \mathrm{B}dx' + \mathrm{C}dx'' + \mathrm{D}dx''' = \alpha dt,$$

& ensuite: $\mathrm{A}x + \mathrm{B}x' + \mathrm{C}x'' + \mathrm{D}x''' = \alpha t + \mathfrak{A}$,

laquelle équation renferme un très beau rapport entre les coordonnées paralleles à la direction OL.

37. La même chose réussit pour les coordonnées paralleles aux deux autres directions OM & ON, de sorte que nous aurons en tout d'abord ces trois formules différentielles du premier degré:

$$\mathrm{A}dx + \mathrm{B}dx' + \mathrm{C}dx'' + \mathrm{D}dx''' = \alpha dt$$
$$\mathrm{A}dy + \mathrm{B}dy' + \mathrm{C}dy'' + \mathrm{D}dy''' = \mathfrak{G} dt$$
$$\mathrm{A}dz + \mathrm{B}dz' + \mathrm{C}dz'' + \mathrm{D}dz''' = \gamma dt.$$

&

& de là ces trois formules algébriques:

$$Ax + Bx' + Cx'' + Dx''' = \alpha t + \mathfrak{A}$$
$$Ay + By' + Cy'' + Dy''' = \beta t + \mathfrak{B}$$
$$Az + Bz' + Cz'' + Dz''' = \gamma t + \mathfrak{C},$$

qui nous donnent à connoitre que le commun centre d'inertie des quatre corps se meut uniformément suivant chacune des trois directions OL, OM, ON, & partant que son mouvement se fait uniformément sur une ligne droite, comme on le sait déjà depuis longtems.

28. Formons maintenant les équations suivantes:

$$\frac{y\,ddx - x\,ddy}{dt^2} = \frac{B(x'y - y'x)}{AB^3} + \frac{C(x''y - y''x)}{AC^3} + \frac{D(x'''y - y'''x)}{AD^3}$$
$$\frac{y'ddx' - x'ddy'}{dt^2} = \frac{C(x''y' - y''x')}{BC^3} + \frac{D(x'''y' - y'''x')}{BD^3} + \frac{A(xy' - yx')}{BA^3}$$
$$\frac{y''ddx'' - x''ddy''}{dt^2} = \frac{D(x'''y'' - y'''x'')}{CD^3} + \frac{A(xy'' - yx'')}{CA^3} + \frac{B(x'y'' - y'x'')}{CB^3}$$
$$\frac{y'''dx''' - x'''dy'''}{dt^2} = \frac{A(xy''' - xy''')}{DA^3} + \frac{B(x'y''' - y'x''')}{DB^3} + \frac{C(x''y''' - y''x''')}{DC^3},$$

où l'on pourra faire encore en sorte que les derniers membres se détruisent tous entr'eux, & il en résultera cette équation intégrable:

$$\frac{A(y\,ddx - x\,ddy)}{dt^2} + \frac{B(y'ddx' - x'ddy')}{dt^2} + \frac{C(y''ddx'' - x''ddy''}{dt^2} + \frac{D(y'''ddx''' - x'''ddy''')}{dt^2} = 0.$$

39. De cette maniere on obtiendra encore trois équations intégrales, qui seront:

A(ydx

$$A(y\,dx - x\,dy) + B(y'dx' - x'dy') + C(y''dx'' - x''dy'') + D(y'''dx''' - x'''dy''') = \delta\,dt$$

$$A(z\,dy - y\,dz) + B(z'dy' - y'dz') + C(z''dy'' - y''dz'') + D(z'''dy''' - y'''dz''') = \varepsilon\,dt$$

$$A(x\,dz - z\,dx) + B(x'dz' - z'dx') + C(x''dz'' - z''dx'') + D(x'''dz''' - z'''dx''') = \zeta\,dt$$

dont les intégrales peuvent encore être représentées par les aires des projections faites sur les trois plans fixes LOM, MON & NOL, de la route que chaque corps décrit, ces aires étant terminées par l'arc de chaque projection décrit dans le tems t, & les deux rayons vecteurs tirés au point O. Quelque plan donc qu'on prenne pour y faire ces projections, on multiplie chaque aire indiquée par la masse du corps auquel elle appartient, & la somme de tous ces produits est toujours proportionelle au tems pendant lequel ces aires ont été décrites. Cette propriété générale est analogue à celle que *Newton* a démontrée pour le mouvement d'un corps qui est sollicité vers un point fixe.

40. Cette propriété devient encore infiniment plus générale en considérant que, tant le point O, que la position des plans, dépend entierement de notre bon plaisir: d'où nous tirons le Théoreme suivant:

Quelque grand que soit le nombre des corps qui s'attirent mutuellement, & de quelque mouvement qu'ils soient portés, quand on décrit sur un plan quelconque les projections orthogonales des courbes que les corps décrivent, & qu'on en prend les aires décrites autour d'un point pris à volonté sur ce plan pour un tems quelconque, en multipliant chacune de ces aires par la masse du corps auquel elle convient, la somme de tous ces produits sera proportionelle au tems.

Ce beau Théoreme a lieu non seulement quand les corps s'attirent mutuellement en raison réciproque du quarré des distances, mais aussi quand l'attraction suit toute autre raison des distances: pourvu qu'à

 distan-

distances égales l'attraction soit proportionelle à la masse du corps attirant.

41. Voilà donc déjà six équations intégrales pour un nombre quelconque de corps qui s'attirent mutuellement: mais on peut encore en trouver une septieme de la maniere suivante. Puisque $dx\,ddx + dy\,ddy + dz\,ddz = ds\,dds = \frac{1}{2}d.\,Aa^2$, on verra qu'en assemblant des équations du §. 35. la valeur de la formule $\frac{A\,ds\,dds + B\,ds'\,dds' + C\,ds''\,dds'' + D\,ds'''\,dds'''}{dt^2}$, les parties qui ont AB^3 pour dénominateur produiront cette forme:

$$\frac{A.\,B}{AB^3}\left[-(x'-x)(dx'-dx)-(y'-y)(dy'-dy)-(z'-z)(dz'-dz)\right],$$

qui par le §. 33 se changera en celle-ci:

$$\frac{A.\,B}{AB^3}\left(-AB.\,d.\,AB\right) = \frac{-A.\,B.\,d.\,AB}{AB^2} = A.\,B\,d.\,\frac{1}{AB},$$

dont l'intégrale est par conséquent $= \frac{A.\,B}{AB}$, où le numérateur est le produit des deux masses A & B, & le dénominateur leur distance AB.

42. Comme l'intégration réussit pareillement dans les autres parties divisées par AC^3, AD^3, BC^3, BD^3, CD^3, en introduisant une constante arbitraire Δ, on obtiendra cette équation intégrale renfermant les espaces élémentaires Aa, Bb, Cc, Dd, parcourus dans le tems infiniment petit dt:

$$\frac{A.\,Aa^2 + B.\,Bb^2 + C.\,Cc^2 + D.\,Dd^2}{2dt^2} = \Delta + \frac{A.B}{AB} + \frac{A.C}{AC} + \frac{A.D}{AD} + \frac{B.C}{BC} + \frac{B.D}{BD} + \frac{C.D}{CD},$$

où

où il faut remarquer que, dans le premier membre, $\frac{Aa}{dt}$ exprime la vitesse du corps A; $\frac{Bb}{dt}$ celle du corps B; $\frac{Cc}{dt}$ celle du corps C, & $\frac{Dd}{dt}$ celle du corps D; de sorte que le premier membre tout entier représente la somme des forces vives de tous les corps ensemble.

43. On observera donc que la force vive totale de tous les corps qui agissent les uns sur les autres par leurs forces attractives, est toujours proportionelle à une expression composée d'une quantité constante Δ, & d'autres termes, dont chacun est le produit des masses de deux corps divisés par leur distances: il y aura donc autant de tels termes, qu'il y a de combinaisons de deux à deux des corps proposés, de sorte que si en général le nombre des corps est $= n$, le nombre de ces termes sera $= \frac{nnn}{2}$; qui dans le cas de quatre corps est donc $= 6$, comme on voit par l'expression trouvée. Pour la quantité constante Δ, on voit bien qu'elle dépend de l'état primitif imprimé aux corps. Ensuite on voit aussi en général que, plus les corps s'approchent entr'eux, plus la somme de leurs forces vives doit devenir grande. Or, au contraire, à mesure que les corps s'éloignent entr'eux, la somme de leurs forces vives diminuera.

44. Voilà donc en tout sept équations intégrales qu'on a pu découvrir jusqu'ici en général, quelque grand que soit le nombre des corps. Pour le cas de deux corps, où l'on n'a que 6 équations principales, il semble qu'on pourroit se passer de la septieme équation intégrale, & que les six premieres devroient suffire pour déterminer le mouvement; mais alors il arrive que ces six ne renferment que cinq déterminations, & que la sixieme devient identique, de sorte qu'on est obligé de se servir principalement de la septieme pour résoudre le probleme. La chose est aussi fort claire d'elle-même; car, puisque les six premieres équations intégrales auroient également lieu quand même

l'attraction ne suivroit pas la raison inverse quarrée des distances, il est évident qu'elles ne sauroient jamais être suffisantes pour procurer une solution.

45. Mais, dès qu'il est question de trois corps, dont le mouvement est déterminé par 9 équations, les sept équations intégrales que je viens de trouver ne suffisent plus pour en tirer une solution parfaite; il faudroit encore au moins en découvrir deux nouvelles, auxquelles on n'a pu encore parvenir, malgré tous les soins que les plus grands Géometres se sont donnés. La méthode dont je me suis servi ici, en cherchant certaines combinaisons entre les équations principales détaillées dans le §. 35, qui conduisent à quelque équation intégrable, semble entierement épuisée, & il faudra sans doute chercher une route tout à fait nouvelle. Dans l'état où l'Analyse se trouve, il semble même impossible de dire si l'on en est encore fort éloigné ou non; mais il est bien certain que, dès qu'on sera arrivé à ce point, l'Analyse en retirera de beaucoup plus grands avantages, que l'Astronomie ne sauroit s'en promettre, à cause de la grande complication dont tous les élémens seront entrelacés selon toute apparence, de sorte que pour la pratique on ne pourra presque en espérer aucun secours.

NOU-

NOUVELLE MANIERE
DE
COMPARER LES OBSERVATIONS DE LA LUNE AVEC LA THÉORIE. (*)

PAR MR. L. EULER.

J'ai proposé autrefois une méthode toute particuliere de déterminer par la Théorie les dérangemens que les mouvemens des corps célestes souffrent de leur action mutuelle; cette méthode est immédiatement fondée sur les formules différentielles du second degré, que la Théorie fournit pour la détermination du mouvement, sans qu'on ait besoin d'en chercher préalablement les intégrales. Pour cet effet je suppose d'abord, que tant le lieu du corps dont il est question, que son mouvement, c'est à dire, sa vitesse avec sa direction, soient exactement connus pour une époque donnée: ensuite, sachant pour ce même tems les accélérations que les forces qui agissent alors sur le corps y produisent, j'ai fait voir comment on peut de là assigner le lieu & le mouvement de ce corps, non seulement pour un instant après, mais pour un tems assez considérable écoulé depuis la premiere époque. Cependant ce tems ne doit pas être pris trop grand, de peur que l'aberration, qui croît avec le tems, ne devienne sensible; mais, dès qu'on y est arrivé, on n'a qu'à répéter les mêmes opérations pour parvenir à un moment deux fois plus éloigné de la premiere époque: & ainsi on pourra continuer le même calcul aussi loin qu'on voudra.

En se servant de cette méthode, on suit presque pas à pas le corps céleste dans son mouvement; & quand même on n'en pourroit

 espé-

(*) Lû le 6 Févr. 1766.

espérer de grands secours pour l'Astronomie, il seroit toujours fort important de connoitre tous les dérangemens auxquels le corps est assujetti d'un instant à l'autre; cette même connoissance ne laisseroit pas de nous éclairer très considérablement sur cet intéressant article de l'Astronomie.

Je crois qu'il ne seroit pas inutile d'appliquer cette méthode à la détermination du mouvement de la Lune; car, quoique les Tables Lunaires soient portées à un tel degré de perfection, qu'on ne sauroit presque espérer d'en pousser plus loin la précision, il n'est pas si aisé d'en tirer pour chaque instant les changemens qui sont causés tant dans la vitesse que dans la direction de la Lune: & on n'en sauroit même conclure ces élémens que par voie d'approximation, attendu qu'on est obligé de tenir compte de toutes les inégalités qui se trouvent dans les Tables. Mais, suivant cette nouvelle méthode, on parvient d'abord à la connoissance de ces deux élémens, sans avoir besoin d'aucune approximation. Ce qui étant un article très essentiel dans la connoissance du mouvement de la Lune, on a tout lieu d'espérer, qu'en poursuivant cette méthode avec tous les soins possibles, on y découvrira des ressources auxquelles on ne s'attendoit pas, & que c'est presque le plus sûr moyen pour porter la Théorie de la Lune au plus haut degré de perfection.

Pour cet effet, il faut commencer par connoitre très exactement tant le lieu que le mouvement de la Lune pour une époque donnée, d'où l'on puisse ensuite poursuivre la Lune presque pas à pas: & partant on comprendra aisément, que la moindre erreur commise dans ces deux élémens doit avec le tems produire des erreurs très grossieres, quoiqu'on puisse espérer de remédier à cet inconvénient, dès qu'on s'appliquera à cette recherche. Pour moi, je dois avouer que je ne me sens plus ni le courage ni la patience nécessaires pour entreprendre un travail de cette nature: mais ayant réfléchi sur les différentes opérations qui y sont nécessaires, j'ai trouvé moyen, en employant plusieurs observations de la Lune, faites pendant plusieurs jours consécuti-

cutivement, d'en constater pour le moment de chacune la véritable vitesse & direction de la Lune, de sorte qu'on pourra établir ensuite par-là des époques pour y appliquer la méthode mentionnée.

LEMME.

Connoissant pour les abscisses $\zeta = 0$, $\zeta = 1$, $\zeta = 2$, $\zeta = 3$, $\zeta = 4$ etc. les appliquées p, q, r, s, t etc. d'une courbe, trouver les valeurs différentielles tant du premier degré $\frac{dp}{d\zeta}$, $\frac{dq}{d\zeta}$, $\frac{dr}{d\zeta}$, $\frac{ds}{d\zeta}$ etc. que du second degré $\frac{ddp}{d\zeta^2}$, $\frac{ddq}{d\zeta^2}$, $\frac{ddr}{d\zeta^2}$, $\frac{dds}{d\zeta^2}$ etc. en prenant constant le différentiel $d\zeta$.

SOLUTION.

Soit z l'appliquée qui répond à l'abscisse indéfinie ζ; & posant $q - p = \Delta p$; $r - 2q + p = \Delta^2 p$; $s - 3r + 3q - p = \Delta^3 p$ etc. valeurs qu'on trouve aisément en prenant les différences de la série des appliquées, tant les premieres que les secondes, troisiemes etc. Cela posé, on sait qu'on aura:

$$z = p + \Delta p.\frac{\zeta}{1} + \Delta^2 p.\frac{\zeta(\zeta-1)}{1.2} + \Delta^3 p.\frac{\zeta(\zeta-1)(\zeta-2)}{1.\ 2.\ 3} \text{ etc. ou}$$

$$z = p + \Delta p.\zeta + \tfrac{1}{2}\Delta^2 p.(\zeta\zeta - \zeta) + \tfrac{1}{6}\Delta^3 p(\zeta^3 - 3\zeta^2 + 2\zeta)$$
$$+ \tfrac{1}{24}\Delta^4 p(\zeta^4 - 6\zeta^3 + 11\zeta^2 - 6\zeta)$$
$$+ \tfrac{1}{120}\Delta^5 p(\zeta^5 - 10\zeta^4 + 35\zeta^3 + 50\zeta^2 + 24\zeta)$$
etc.

De là il est aisé de tirer les valeurs différentielles de tous les ordres, & pour le premier & second nous aurons:

dz

$$\frac{dz}{d\zeta} = \Delta p + \tfrac{1}{2}\Delta^2 p(2\zeta - 1) + \tfrac{1}{6}\Delta^3 p(3\zeta\zeta - 6\zeta + 2)$$
$$+ \tfrac{1}{24}\Delta^4 p(4\zeta^3 - 18\zeta^2 + 22\zeta - 6)$$
$$+ \tfrac{1}{120}\Delta^5 p(5\zeta^4 - 40\zeta^3 + 105\zeta^2 - 100\zeta + 24)$$
etc.

$$\frac{ddz}{d\zeta^2} = \Delta^2 p + \Delta^3 p.(\zeta - 1) + \tfrac{1}{12}\Delta^4 p.(6\zeta\zeta - 18\zeta + 11)$$
$$+ \tfrac{1}{12}\Delta^5 p(2\zeta^3 - 12\zeta\zeta + 21\zeta - 10).$$

Maintenant, posant successivement $\zeta = 0$, $\zeta = 1$, $\zeta = 2$, etc. nous aurons ces valeurs différentielles pour les appliquées déterminées p, q, r, s etc.

du premier ordre:

$$\frac{dp}{d\zeta} = \Delta p - \tfrac{1}{2}\Delta^2 p + \tfrac{1}{3}\Delta^3 p - \tfrac{1}{4}\Delta^4 p + \tfrac{1}{5}\Delta^5 p - \text{etc.}$$

$$\frac{dq}{d\zeta} = \Delta p + \tfrac{1}{2}\Delta^2 p - \tfrac{1}{6}\Delta^3 p + \tfrac{1}{12}\Delta^4 p - \tfrac{1}{20}\Delta^5 p + \text{etc.}$$

$$\frac{dr}{d\zeta} = \Delta p + \tfrac{3}{2}\Delta^2 p + \tfrac{1}{3}\Delta^3 p - \tfrac{1}{12}\Delta^4 p + \tfrac{1}{30}\Delta^5 p$$

$$\frac{ds}{d\zeta} = \Delta p + \tfrac{5}{2}\Delta^2 p + \tfrac{11}{6}\Delta^3 p + \tfrac{1}{4}\Delta^4 p - \tfrac{1}{20}\Delta^5 p$$

du second ordre:

$$\frac{ddp}{d\zeta^2} = \Delta^2 p - \Delta^3 p + \tfrac{11}{12}\Delta^4 p - \tfrac{5}{6}\Delta^5 p$$

$$\frac{ddq}{d\zeta^2} = \Delta^2 p \quad * \quad - \tfrac{1}{12}\Delta^4 p + \tfrac{1}{12}\Delta^5 p$$

$$\frac{ddr}{d\zeta^2} = \Delta^2 p + \Delta^3 p - \tfrac{1}{12}\Delta^4 p \quad *$$

$$\frac{dds}{d\zeta^2} = \Delta^2 p + 2\Delta^3 p + \tfrac{11}{12}\Delta^4 p - \tfrac{1}{12}\Delta^5 p.$$

En-

Ensuite du troisieme ordre:

$$\frac{d^3 p}{d\zeta^3} = \Delta^3 p - \tfrac{3}{2}\Delta^4 p + \tfrac{7}{4}\Delta^5 p$$

$$\frac{d^3 q}{d\zeta^3} = \Delta^3 p - \tfrac{1}{2}\Delta^4 p + \tfrac{1}{4}\Delta^5 p$$

$$\frac{d^3 r}{d\zeta^3} = \Delta^3 p + \tfrac{1}{2}\Delta^4 p - \tfrac{1}{4}\Delta^5 p,$$

$$\frac{d^3 s}{d\zeta^3} = \Delta^3 p + \tfrac{3}{2}\Delta^4 p + \tfrac{1}{4}\Delta^5 p,$$

& du quatrieme ordre:

$$\frac{d^4 p}{d\zeta^4} = \Delta^4 p - 2\Delta^5 p$$

$$\frac{d^4 q}{d\zeta^4} = \Delta^4 p - \Delta^5 p$$

$$\frac{d^4 r}{d\zeta^4} = \Delta^4 p$$

$$\frac{d^4 s}{d\zeta^4} = \Delta^4 p + \Delta^5 p.$$

Ce Lemme nous fera d'un grand usage dans la comparaison de plusieurs lieux observés de la Lune, puisque par son moyen nous serons en état d'assigner pour chaque lieu les valeurs différentielles, qui s'y rapportent: or celles du second ordre ne sont que l'effet des forces qui agissent sur la Lune, ce qui nous met en état de comparer les observations avec la Théorie. Je m'en vai donc considérer les formules différentielles, que la Théorie fournit pour le mouvement de la Lune.

FORMULES DIFFÉRENTIELLES

qui expriment le mouvement de la Lune.

Pl. VIII. Fig. 3.

Soit A le centre de la Terre, & AB une ligne fixe tirée vers l'équinoxe du printems; Z le centre de la Lune, d'où l'on abaisse au plan de l'écliptique la perpendiculaire ZY, & de Y à AB la perpendiculaire YX. Posons

1°. la distance AZ $= v$;

2°. la latitude de la Lune ZAY $= \psi$ boréale;

3°. la longitude de la Lune YAX $= \phi$.

De ces trois élémens donnés par les observations on définira les trois coordonnées AX $= x$; XY $= y$, & YZ $= z$, de cette sorte:

$$z = v \sin\psi;\quad AY = v \cos\psi;\quad y = v \cos\psi \sin\phi;\quad x = v \cos\psi \cos\phi.$$

En même tems soit S le lieu du Soleil, sa distance à la Terre AS $= u$, & sa longitude BAS $= \theta$, d'où l'on tire AR $= u \cos\theta$ & RS $= u \sin\theta$.

Maintenant, posant la distance de la Lune au Soleil SZ $= w$, on aura $w^2 = (u\cos\theta - x)^2 + (u \sin\theta - y)^2 + zz$,

ou bien $w^2 = uu - 2uv \cos\psi (\cos\theta \cos\phi + \sin\theta \sin\phi) + vv$,

ou $w^2 = uu - 2uv \cos\psi \cos(\phi - \theta) + vv$.

Soit τ le tems écoulé depuis une certaine époque jusqu'à cette observation, pendant lequel le mouvement moyen du Soleil soit l'angle $= \tau$, qu'on exprime en parties du rayon 1; & posons la distance moyenne du Soleil à la Terre $= k$. Enfin, soit A à B comme la masse de la Terre à celle du Soleil, & la Théorie fournit pour le mouvement de la Lune ces trois formules:

$$\text{I.}\quad \frac{ddx}{d\tau^2} = -\frac{A k^3}{A+B}\cdot\frac{x}{v^3} + \frac{k^3 (u\cos\theta - x)}{w^3} - \frac{k^3 \cos\theta}{uu} = -P$$

$$\text{II. } \frac{ddy}{d\tau^2} = -\frac{Ak^3}{A+B}\cdot\frac{y}{v^3} + \frac{k^3(u\sin\theta - y)}{w^3} - \frac{k^3\sin\theta}{uu} = -Q$$

$$\text{III. } \frac{ddz}{d\tau^2} = -\frac{Ak^3}{A+B}\cdot\frac{z}{v^3} - \frac{k^3 z}{w^3} = -R.$$

Reflexions sur ces formules.

I. Ayant donc exactement observé le lieu de la Lune avec sa parallaxe horizontale, on pourra déterminer par là les quantités v, x, y, z, & sachant par la Théorie du Soleil la distance u avec sa longitude θ, on en tirera la distance w = SZ. De là, en regardant la fraction $\frac{A}{A+B} = \lambda$ comme connue, on calculera aisément ces trois valeurs :

$$P = \lambda \frac{k^3 x}{v^3} - \frac{k^3(u\cos\theta - x)}{w^3} + \frac{k^3\cos\theta}{uu}$$

$$Q = \lambda \frac{k^3 y}{v^3} - \frac{k^3(u\sin\theta - y)}{w^3} + \frac{k^3\sin\theta}{uu}$$

$$R = \lambda \frac{k^3 z}{v^3} + \frac{k^3 z}{w^3}$$

d'où l'on aura les trois égalités suivantes :

$$\frac{ddx}{d\tau^2} = -P; \quad \frac{ddy}{d\tau^2} = -Q \quad \& \quad \frac{ddz}{d\tau^2} = -R.$$

II. La Théorie nous fournit donc les valeurs différentio-différentielles des trois coordonnées x, y, z, rapportées au mouvement moyen du Soleil, qui nous sert de mesure du tems. Donc, si nous voulons exprimer le tems en jours, en posant le nombre des jours $= \zeta$, puisque le mouvement moyen du Soleil dans un jour est $= 0{,}0172028$, si nous posons cette fraction connue $= \alpha = 0{,}0172$

0172028, de forte que $ln = 8,2355992$, nous aurons $\mathrm{d}\tau = n\mathrm{d}\zeta$, & partant

$$\frac{\mathrm{dd}x}{\mathrm{d}\zeta^2} = -nnP; \quad \frac{\mathrm{dd}y}{\mathrm{d}\zeta^2} = -nnQ; \quad \frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}\zeta^2} = -nnR.$$

III. Or, en employant plufieurs obfervations de la Lune, dont les intervalles de tems foient tous d'un jour, fi nous prenons x, y, z, P, Q, R, pour la premiere de ces obfervations, & que pour les fuivantes nous confervions les mêmes lettres en y ajoutant les fignes $'$, $''$, $'''$, etc. par le moyen du lemme précédent, nous en pourrons conclure les valeurs différentielles $\frac{\mathrm{dd}x}{\mathrm{d}\zeta^2}$, $\frac{\mathrm{dd}y}{\mathrm{d}\zeta^2}$, $\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}\zeta^2}$; lefquelles devant être égales aux quantités $-nnP$, $-nnQ$, nnR, on verra jufqu'à quel point de précifion les obfervations feront d'accord avec la Théorie, & cela fans fe fervir d'aucunes Tables Lunaires. Cette maniere de comparer les obfervations avec la Théorie mérite d'autant plus d'attention, qu'elle eft tirée immédiatement des formules différentielles fournies par la Théorie; pendant que les Tables n'en font formées que par approximation, & qu'elles renferment encore plufieurs élémens conclus par les feules obfervations: comme le mouvement moyen, l'excentricité de l'orbite, & fon inclinaifon moyenne à l'écliptique. Or, dans cette maniere de comparer les obfervations avec la Théorie, nous n'avons befoin d'aucun de ces élémens.

IV. Mais remarquons que nos formules renferment la fraction $\lambda = \frac{A}{A+B}$, dont nous ne faurions connoitre la véritable valeur que par les obfervations: mais nous voyons auffi qu'une feule équation nous en découvre la véritable valeur; & comme chaque obfervation donne trois équations, cette détermination fera d'autant plus certaine, furtout quand nous y employerons plufieurs obfervations. Par ce moyen nous découvrirons bien plus furement le véritable rapport entre

entre la masse du Soleil B & celle de la Terre A, que par la méthode dont on s'est servi jusqu'ici pour cet effet.

V. Ensuite on remarquera que, pour faire usage de nos formules, il faut connoitre le vrai rapport entre les distances du Soleil & de la Lune à la Terre, u & v, qui est inconnu sans doute tant qu'on ne découvre point la parallaxe du Soleil. Mais considérant comme connue la parallaxe du Soleil dans sa moyenne distance k, puisque les observations nous donnent la parallaxe de la Lune, nous en tirerons d'abord le rapport entre les distances k & v, & celui qu'il y a entre k & u est donné par la Théorie du Soleil, ce qui suffit pour développer nos formules. Or on sait que la parallaxe du Soleil n'entre que pour fort peu dans le mouvement de la Lune, & partant il suffira de la connoitre à peu près. Je supposerai donc la parallaxe du Soleil de $9''$, & sa distance moyenne à la Terre $k = 100000$; & dans la même mesure j'exprimerai la distance de la Lune à la Terre.

VI. On pourroit faire encore une autre hypothese en supposant la parallaxe du Soleil de $8''$, ou de $10''$, & calculer séparément plusieurs observations sur nos formules pour voir quelle différence il en résulte: ce qui nous conduiroit peut-être à la route la plus sure pour déterminer exactement la parallaxe du Soleil. Mais on comprendra aisément que, pour cet effet, il faudroit employer des observations si exactes, que l'erreur n'en surpassât point quelques secondes, ce qui rend l'exécution de ce dessein presque impossible, à moins qu'en appliquant le même calcul à un très grand nombre d'observations, on n'en pût tirer enfin une conclusion assez certaine.

VII. Mais je m'en tiendrai ici au premier dessein, où il ne s'agit que de comparer les observations de la Lune avec la Théorie, sans aucun secours des Tables, & je supposerai la parallaxe du Soleil $= 9''$ dans sa moyenne distance $k = 100000$, & partant tout revient à trouver de bonnes observations de la Lune. Or, puisque les Tables de feu M. *Meyer* sont reconnues pour donner les lieux de la Lune à une minute près, & que les Connoissances des mouvemens célestes de Mr.

de la Lande sont calculées sur ces Tables, je regarderai les lieux de la Lune qui y sont assignés pour chaque midi, comme des observations immédiates: vu que des observations actuelles pourroient bien être moins exactes. Outre cela, j'en retirerai aussi cet avantage, que tous les intervalles de tems entre ces observations sont égaux entr'eux & précisément de 24 heures, ce qui fournit une grande commodité pour le calcul, que j'ai déjà arrangé en sorte que l'unité, par laquelle je mesure le tems, est un jour, qui donne en même tems les intervalles égaux pris sur l'axe de la courbe considérée dans le Lemme.

VIII. Ayant donc tiré de la Connoissance des mouvemens célestes de l'an 1765, six lieux de la Lune depuis le 31 Juillet jusqu'au 5 Août, j'ai calculé pour chacun les trois coordonnées x, y, z, pour en conclure leurs valeurs différentielles du second degré, dont voici le calcul:

	x	Δx	$\Delta^2 x$	$\Delta^3 x$	$\Delta^4 x$	$\Delta^5 x$
Juil. 31	113,69	53,28				
Août 1	166,97	43,12	−10,16	−2,36		
2	210,09	30,60	−12,52	−1,69	+0,67	+0,17
3	240,69	16,39	−14,21	−0,85	+0,84	
4	257,08	1,33	−15,06			
5	258,41					

d'où je tire pour la seconde observation du 1 Août la valeur différentielle:

$$\frac{ddx'}{d\zeta^2} = \Delta^2 x - \tfrac{1}{12}\Delta^4 x + \tfrac{1}{12}\Delta^5 x = -10,20.$$

Or, pour cette même observation, je trouve $P = \alpha\lambda - 290,1$ où $l\alpha = 10,0356834$; donc $lnn\alpha = 6,5068818$ & $290,1\,nn = 0,086$, de sorte que

$$-10,20 = -nn\alpha\lambda + 0,086 \quad \& \quad nn\alpha\lambda = 10,286,$$

& partant $\frac{1}{\lambda} = 312346$ ou $l\lambda = 4,5053647$.

IX.

IX. De la même manière je fais le calcul pour les coordonnées y.

	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
Juil. 31	−219,005					
		+34,966				
Août 1	−184,039		+11,075			
		+46,041		−2,532		
2	−137,998		+8,543		−1,475	
		+54,584		−4,007		+1,945
3	−83,414		+4,536		−10,470	
		+59,120		−3,537		
4	−24,294		+0,999			
		+60,119				
5	+35,825					

d'où $\frac{ddy'}{d\zeta^2} = +11,360$. Or $Q = -\mathcal{E}\lambda + 372,7$, où $l\mathcal{E} = 10,0779488$; donc $lnn\mathcal{E} = 6,5491472$ & $372,7nn = 0,1103$. Par conséquent $11,360 = \mathcal{E}nn\lambda - 0,1103$ ou $\mathcal{E}nn\lambda = 11,470$, & partant $\frac{1}{\lambda} = 308730$ ou $l\lambda = 4,5104162$.

X. Pour la troisieme coordonnée z, nous aurons

	z	Δz	$\Delta^2 z$	$\Delta^3 z$	$\Delta^4 z$	$\Delta^5 z$
Juil. 31	−14,5543					
		+4,7998				
Août 1	−9,7545		+0,6234			
		+5,4232		−0,3670		
2	−4,3313		+0,2564		+0,0325	
		+5,6796		−0,3345		−0,0619
3	+1,3483		−0,0781		−0,0294	
		+5,6015		−0,3639		
4	+6,9498		−0,4420			
		+5,1595				
5	+12,1093					

Donc $\frac{ddz'}{d\zeta^2} = 0,6234 - 0,0027 - 0,0051 = 0,6156$. Or $R = -\gamma\lambda + 9,274$ & $l\gamma = 8,8022397$, donc $lnn\gamma = 5,2734381$ & $9,274nn = 0,00274$ & partant $0,6156 = nn\gamma\lambda + 0,00274$ ou $nn\gamma\lambda = 0,61286$. Par conséquent $\frac{1}{\lambda} = 306250$ & $l\lambda = 4,5139232$.

X. CON-

CONCLUSIONS.

1. Voilà donc trois valeurs que les six observations choisies nous fournissent pour la fraction λ, qui à la vérité ne sont pas trop d'accord entr'elles, mais la différence n'est pas pourtant si grande, qu'elle ne puisse être attribuée aux erreurs des observations, en supposant même que ces erreurs ne surpassent point une minute. Le milieu entre ces trois valeurs étant $\frac{1}{\lambda} = 309108$, on en peut conclure avec assez d'assurance, que la masse du Soleil surpasse 309108 fois la masse de la Terre, en supposant la parallaxe du Soleil de 9''. Si l'on vouloit se donner la peine de faire le même calcul sur d'autres observations, & prendre le milieu des trois résultats qu'on en tire, on parviendroit à un rapport plus exact entre la masse du Soleil & celle de la Terre.

2. *Newton*, en supposant la parallaxe du Soleil de 10'', trouve le rapport de la masse du Soleil à celle de la Terre comme 227512 à 1: qui pour la parallaxe de 9'' devroit être augmenté en raison de 1000 à 729, d'où ce rapport seroit de 312088 à 1, ce qui s'accorde assez bien avec ce que je viens de trouver. Or, puisque *Newton* a tiré sa détermination du mouvement moyen de la Lune, elle est sans doute plus exacte que celle que j'ai trouvée ici.

3. Ayant trouvé la véritable valeur du nombre λ, on sera en état d'exécuter les opérations que j'ai proposées autrefois, par le moyen desquelles, en connoissant le lieu & le mouvement de la Lune pour une époque donnée, on peut déterminer les mêmes choses pour un autre tems qui n'en est pas trop éloigné, comme pour le jour suivant. Car, soient pour l'époque donnée la distance de la Lune à la Terre $= v$, les trois coordonnées x, y, z, leur valeurs différentielles $\frac{dx}{d\zeta}$, $\frac{dy}{d\zeta}$ & $\frac{dz}{d\zeta}$; & pour un tems de ζ jours après, posant les trois coordonnées X, Y, Z, on aura:

X =

$$X = x + \frac{\zeta dx}{d\zeta} + \frac{\zeta^2 ddx}{2d\zeta^2} + \frac{\zeta^3 d^3x}{6d\zeta^3} + \frac{\zeta^4 d^4x}{24d\zeta^4} + \text{etc.}$$

$$\& \frac{dX}{d\zeta} = \frac{dx}{d\zeta} + \frac{\zeta ddx}{d\zeta^2} + \frac{\zeta^2 d^3x}{2d\zeta^3} + \frac{\zeta^3 d^4x}{6d\zeta^4} + \text{etc.}$$

Or, la Théorie donnant $\frac{ddx}{d\zeta^2} = -nnP$, $\frac{ddy}{d\zeta^2} = -nnQ$ & $\frac{ddz}{d\zeta^2} = -nnR$, on obtient

$$X = x + \frac{\zeta dx}{d\zeta} - \frac{nn\zeta^2 P}{2} - \frac{nn\zeta^3 dP}{6d\zeta} - \frac{nn\zeta^4 ddP}{24d\zeta^2} \text{ etc.}$$

$$\& \frac{dX}{d\zeta} = \frac{dx}{d\zeta} - nn\zeta P - \frac{nn\zeta^2 dP}{2d\zeta} - \frac{nn\zeta^3 ddP}{6d\zeta^2} \text{ etc.}$$

& ainsi des autres coordonnées.

4. Maintenant, ayant pour le midi du premier d'Août 1765 à Paris,

$$x = +166{,}970; \quad y = -184{,}039; \quad z = -9{,}7545$$

& de là par les observations:

$$\frac{dx}{d\zeta} = +36{,}09; \quad \frac{dy}{d\zeta} = +40{,}316; \quad \frac{dz}{d\zeta} = +5{,}1982.$$

Ensuite nous avons

$$P = +34496; \quad Q = -37968; \quad R = -2041{,}4$$

& par les observations rapportées on pourroit encore trouver les valeurs différentielles de P, Q, R.

De là, pour ζ jours après le 1 Août, on aura

$$X = +166{,}970 + 36{,}090\zeta - 5{,}104\zeta\zeta$$
$$Y = -184{,}039 + 40{,}316\zeta + 5{,}618\zeta\zeta$$
$$Z = -9{,}7545 + 5{,}1982\zeta + 0{,}3020\zeta\zeta$$

& les valeurs différentielles

$$\frac{dX}{d\zeta} = + 36,090 - 10,208\,\zeta$$

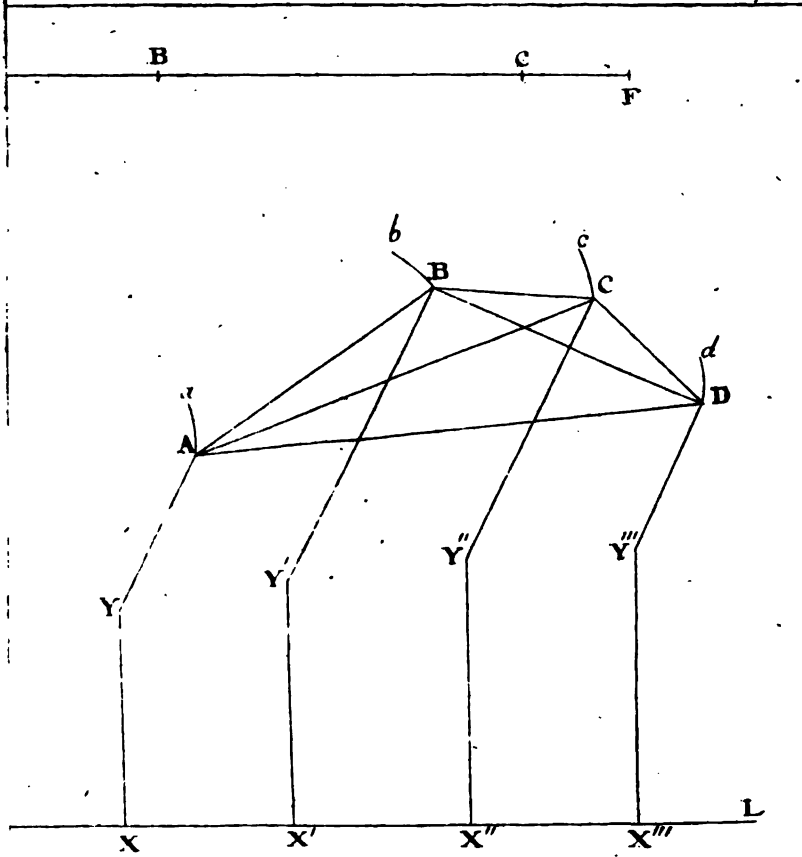
$$\frac{dY}{d\zeta} = + 40,316 + 11,236\,\zeta$$

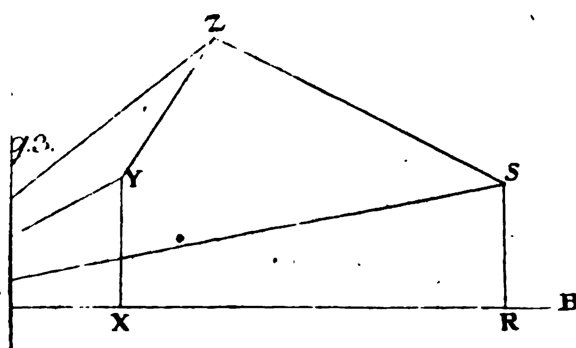
$$\frac{dZ}{d\zeta} = + 5,1982 + 0,6041\,\zeta.$$

5. J'observe donc que si l'on ne veut se servir que des trois premiers termes des formules pour X, Y, Z, on ne sauroit passer par un intervalle d'un jour entier, puisque les termes négligés seroient encore trop considérables. Il ne conviendroit donc point de prendre ces intervalles plus grands que de 2 heures; on les pourroit prendre plus grands, si l'on vouloit encore introduire dans le calcul les valeurs $\frac{dP}{d\zeta}$, $\frac{dQ}{d\zeta}$, $\frac{dR}{d\zeta}$, mais alors le calcul même deviendroit plus embarrassé.



EX-


B
C
F
b
c
B
C
a
A
d
D
Y
Y′
Y″
Y‴
X
X′
X″
X‴
L


Z
g.3.
Y
S
X
R
B

EXTRAIT DE DIFFÉRENTES LETTRES DE MR. D'ALEMBERT À MR. DE LA GRANGE.

I.

Vous ferez surpris sans doute de me voir revenir encore sur les cordes vibrantes, après m'en être tant occupé. Mais je n'ai pu me refuser à quelques réflexions que m'ont fait naitre la lecture des Mémoires de Mrs. *Bernoulli* & *Euler*, imprimés dans le Volume de 1765. (*)

Je ne veux point, non plus que M. *Bernoulli*, *disputer sur les mots*; & je conviendrai volontiers, que quand une corde est chargée d'un nombre de poids *fini*, en tel nombre qu'on voudra, on peut regarder la vibration de chaque point comme composée de plusieurs *vibrations Tayloriennes*, ainsi qu'on peut toujours regarder un mouvement unique, comme composé de plusieurs autres, en tel nombre qu'on voudra. Mais je nie 1°. que, dans tous les cas, ces vibrations *multiples* puissent être regardées comme *réellement* existantes, 2°. qu'on puisse appliquer généralement la théorie de M. *Bernoulli* aux cordes vibrantes chargées d'un nombre infini de poids.

II. J'ai déjà prouvé dans le Tome I. de mes *Opuscules* p. 63 & suiv. que, si on a $y = a \sin \pi x + b \sin 3\pi x$, & que $\frac{a}{3b}$ soit > 9, la corde ne fera réellement que des vibrations simples, & parfaite-

Gg 2

(*) Ce Volume ne m'est parvenu qu'en 1768.

faitement ſemblables des deux côtés de l'axe. Mais voici quelque choſe de plus général. Soit $y = a \sin \pi x + b \sin 3 \pi x + c \sin 5 \pi x$ + etc. la figure initiale de la corde, on aura pour un temps quelconque t, $y = a \sin \pi x \cos \pi t + b \sin 3 \pi x \cos 3 \pi t + c \sin 5 \pi x \cos 5 \pi t$; $\frac{dy}{dt}$, ou la viteſſe de chaque point, $= a \sin \pi x \times - \pi \sin \pi t + b \sin 3 \pi x \times - 3 \pi \sin 3 \pi t + c \sin 5 \pi x \times - 5 \pi \sin 5 \pi t$; & la plus grande valeur de $\frac{dy}{dt}$ arrivera lorſqu'on aura $0 = - a \sin \pi x \times \pi \pi \cos \pi t + b \sin 3 \pi x \times - 9 \pi \pi \cos 3 \pi t - c \sin 5 \pi x \times - 25 \pi \pi \cos 5 \pi t$ etc. Or on ſait que $\cos m \pi t$, (ſi m eſt un nombre impair,) eſt $= \cos \pi t \times T$, T marquant une fonction rationnelle, paire, & ſans diviſeur, de $\cos \pi t$, c'eſt à dire, dans laquelle il ne ſe rencontre que des puiſſances paires de $\cos \pi t$, en y comprenant $(\cos \pi t)^0$ ou 1. On ſait de même que $\sin m \pi t = \sin \pi t \times T'$, T' marquant une pareille fonction de $\cos \pi t$. Cela eſt aiſé à voir par les formules connues $\cos m a + \sin m a \sqrt{-1} = (\cos a + \sin a \sqrt{-1})^m$, & $\cos m a - \sin m a \sqrt{-1} = (\cos a - \sin a \sqrt{-1})^m$, qui donnent $\cos m a = \frac{(\cos a + \sin a \sqrt{-1})^m + (\cos a - \sin a \sqrt{-1})^m}{2}$, & $\sin m a = \frac{\cos a + \sin a \sqrt{-1})^m - (\cos a - \sin a \sqrt{-1})^m}{2 \sqrt{-1}}$. On aura par la même raiſon $\sin m \pi x = \sin \pi x \times X$, X étant une fonction paire, rationnelle & ſans diviſeur de $\cos \pi x$; on aura donc $y = \sin \pi x \cos \pi t [a + b X . T + c \xi . \theta + \text{etc.}]$; $\frac{dy}{dt} = - \sin \pi x \sin \pi t [a + b X' . T' + c \xi' . \theta' \text{ etc.}]$; & pour le cas de la plus grande viteſſe, l'équation $0 = - \sin \pi x \cos \pi t [a + 9 \pi \pi b X . T + 25 \pi \pi c \xi . \theta \text{ etc.}]$, les fonctions X, T, ξ, θ, X', T' etc. ne déſignant que des fonctions paires, rationnelles & ſans diviſeur, de $\cos \pi x$ & de $\cos \pi t$. Or ſuppoſons préſentement qu'abſtraction faite pour un moment du coëfficient a, les coëfficiens b, c, etc. ſoient tous poſitifs

tifs & très petits; supposons de plus P, Q, R, soient la somme des plus grandes valeurs négatives de $b.X.T + c.\xi.\theta$ etc., de $b.X'.T' + c.\xi'.\theta'$ etc., de $9\pi\pi b.X.T + 25\pi\pi c.\xi.\theta$ etc. & qu'on prenne a positive, & plus grande que la plus grande de ces valeurs (laquelle ne sera jamais infinie, puisque les fonctions X, T etc. sont rationelles, sans diviseur, & que cos πt^2, qui n'y est élevé qu'à des puissances entieres, n'est jamais > 1;) il est évident que a demeurera très petite, puisque b & c etc. le sont, & que les quantités renfermées entre deux crochets dans les trois équations ci-dessus ne seront jamais égales à zéro, quelque valeur qu'on donne à x & à t. Donc 1°. la valeur de y ne sera $= 0$ que quand cos $\pi t = 0$, c'est à dire, quand πt sera $= 90°. \pm$ la demi-circonférence prise tant de fois qu'on voudra; 2°. la valeur de $\frac{dy}{dt}$ ne sera $= 0$ que quand sin πt sera $= 0$, c'est à dire, quand πt sera un multiple de la demi-circonférence. 3°. Enfin la valeur de $\frac{dy}{dt}$ ne sera un *maximum* que quand cos πt sera $= 0$, c. à d. quand on aura $y = 0$. D'où il s'ensuit évidemment 1°. que tous les points de la corde feront *réellement* chacun une vibration *unique*, & que ces vibrations *synchrones* & *uniques* finiront quand πt sera un multiple quelconque de la demi-circonférence. 2°. Que l'axe de la corde partagera chaque vibration en deux parties *égales* & *d'égale durée*, & que la plus grande vitesse arrivera pour tous les points *en même temps*, & *au milieu* de chaque vibration.

III. Voilà, si je ne me trompe, dans une infinité de cas, des vibrations *simples*, *régulieres*, & *uniques*, pour tous les points de la corde à la fois. Les prétendues vibrations Tayloriennes & multiples n'existent ici qu'*en idée*, & n'ont pas plus *de réalité* qu'elles n'en auroient dans une corde *en repos*, qu'on peut supposer aussi affectée de deux vibrations Tayloriennes égales & contraires.

IV. Ces vibrations simples, régulieres, & uniques auront lieu, quels que soient les coëfficiens b, c, etc. c. à d. positifs ou négatifs, pourvu qu'ils soient très petits. Car les produits $X . T$, $X' . T'$, $\xi . \theta$, $\xi' . \theta'$, etc. ne pouvant jamais être que finis, il est évidemment toujours facile de déterminer a à être tel qu'il soit plus grand que la plus grande valeur négative de la somme des autres termes b, $X . T$ etc. & par conséquent que les quantités renfermées entre deux crochets dans les trois équations ci-dessus (art. II.) ne soient jamais zéro. On voit par-là combien de cas échappent aux vibrations prétendues multiples. Il est même évident que si on a $y = a \sin \pi x \cos \pi t + b \sin 2 \pi x \times \cos 2 \pi t + c \sin 3 \pi x \cos 3 \pi t$ etc. on aura $\frac{dy}{dt} = \sin \pi x \sin \pi t$ $[a + b X . T + c X' . T'$, etc.$]$, X, X', & T, T' etc. désignant des fonctions rationnelles & sans diviseur de $\cos \pi x$ & de $\cos \pi t$, & que par conséquent, en prenant a tel que la quantité renfermée entre deux crochets ne soit jamais $= 0$, ce qui est toujours possible & facile, $\frac{dy}{dt}$ ne sera $= 0$ que quand $\sin \pi t = 0$. Ainsi voilà encore une infinité de cas où les vibrations sont simples & uniques dans tous les points. M. *Bernoulli* dira peut-être que dans ce dernier cas les vibrations ne sont pas égales des deux côtés de l'axe, ni partagées en deux également au point où la vitesse est un *maximum*. Mais outre que cette difficulté n'a pas lieu dans le cas de l'art. II. ci-dessus, lorsque m est toujours supposé impair, il est aisé de faire voir que dans le cas même où les points de la corde ont réellement des vibrations *multiples*, ces vibrations ne sont ni égales, ni d'égale durée. Je l'ai démontré dans le 1[er] Mém. de mes Opuscules, Tom. I. p. 58. §. XXVIII. pour le cas de $y = \alpha \sin \pi x + \mathfrak{G} \sin 2 \pi x$; & il est aisé de voir en général que si les valeurs de πt lorsque $\frac{dy}{dt} = 0$ sont supposées 0, a', b', c', etc. les temps des vibrations seront proportionnels à a', $b' - a'$, $c' - b'$ etc. & les valeurs de y successivement égales à $a \sin \pi x + b$ sin

sin

$\sin 2\pi x + c \sin 3\pi x +$ etc.; $a \sin \pi x \cos a' + b \sin 2\pi x \cos 2a' + c \sin 3\pi x \cos 3a'$; $a \sin \pi x \cos b' + b \sin 2\pi x \cos 2b' +$ etc.; ce qui donne pour l'étendue de chaque vibration l'excès d'une valeur de y ſur la valeur précédente.

V. De toute cette Théorie il s'enſuit 1°. qu'il y a une infinité de cas où les vibrations des points de la corde ſont *réellement* ſimples & non pas *multiples*. 2°. Que dans le cas même où elles ſont multiples, elles ne ſont ni iſochrones ni ſynchrones, quand on les enviſage ſous leur véritable point de vue, c'eſt à dire, quand on conſidere le mouvement *réel* & non *fictif* de ces points dans l'eſpace abſolu. Il me paroit donc, comme j'en ai déjà fait la remarque dans le Mém. cité, qu'on ne peut expliquer d'une maniere ſatisfaiſante par cette multiplicité de vibrations, ſoit prétendue, ſoit réelle, les ſons multiples à la douzieme, à la dix-ſeptieme & à l'octave, rendus par une corde ſonore. J'ai propoſé d'ailleurs à l'article FONDAMENTAL de l'Encyclopédie d'autres objections contre cette explication des ſons multiples.

VI. Je dis, en ſecond lieu, qu'on ne ſauroit appliquer en général la théorie de M. *Bernoulli* aux cordes vibrantes de figure quelconque; car il faudroit pour cela qu'on pût toujours ſuppoſer pour l'équation de la corde vibrante $y = a \sin \pi x + b \sin 2\pi x + c \sin 3\pi x$ etc. Or 1°. cela eſt évidemment impoſſible, lorſqu'il y a des angles dans la figure initiale, puiſqu'au point où ſont ces angles, dy a deux valeurs, au lieu qu'il n'en a jamais qu'une dans l'équation $y = a \sin \pi x + b \sin 2\pi x$ etc. Vous avez vous-même reconnu, Monſieur, que l'on ne pouvoit aſſigner dans ces cas-là le mouvement de la corde. 2°. Il y a une infinité de figures initiales, par exemple $y = a (\sin \pi x)^{\frac{5}{3}}$, où ma ſolution donne le mouvement de la corde, & où cependant il me paroit qu'on ne peut ſuppoſer $y = a \sin \pi x + b \sin 2\pi x$ etc. puiſque la 1ere équation donne $\frac{ddy}{dx^2} = \infty$ lorſque $x = 0$, & que la ſeconde donne $ddy = 0$ lorſque $x = 0$.

VII.

VII. Je viens présentement au Mémoire de M. *Euler*, imprimé dans le même Volume. Je passe sous silence la plaisanterie qu'il essaye de me faire p. 313, parce que l'essentiel n'est pas ici d'être plaisant. Vous, Monsieur, qui m'avez quelquefois combattu avec raison, & sans plaisanter, vous aviez pensé d'abord comme M. *Euler*, que ma méthode pouvoit s'appliquer à toutes sortes de figures de cordes; mais vous avez depuis tellement abandonné cette opinion, qu'il me semble même que vous restraignez aujourd'hui la solution à un trop petit nombre de figures. Quoi qu'il en soit, & pour ne point revenir sur cette controverse, suffisamment agitée entre nous, je n'ai presque rien à ajouter ici à ce que j'ai dit dans les Tomes I & IV. de mes Opuscules pour combattre l'opinion de M. *Euler* (*). Je me contenterai de dire que les nouvelles raisons apportées par M. *Euler* en faveur de son sentiment, ne me paroissent pas fort solides. En premier lieu, lorsque la courbe initiale a des angles, il croit remédier à l'inconvénient qui en résulte, en *émoussant* un peu ces angles. Mais par-là il altere absolument la courbure, & par conséquent la force accélératrice $\frac{ddy}{dx^2}$, & le mouvement des points sur lesquels cette force agit. On prouveroit de même, en *émoussant* un peu les angles, que le temps de la descente par deux cordes contiguës est le même que par l'arc que ces cordes soutendent; ce qui est pourtant bien loin d'être vrai. En second lieu, M. *Euler* ne nie pas que lorsque le $\frac{ddy}{dx^2}$ fait un saut quelque part, l'équation $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{ddy}{dt^2}$ cesse d'avoir lieu; mais il prétend que l'altération de l'équation en un point *unique* n'empêche pas la solution d'être vraie; comme il arrive qu'une équation finie est exacte, quoique son équation différentielle ne le soit pas à la rigueur dans tous les

(*) Le Tome IV. de mes Opuscules, qui a paru en Mai 1768, étoit presque achevé d'imprimer, quand j'ai reçu le Volume de Berlin de 1765 où sont les nouvelles objections de Mrs. *Bernoulli* & *Euler*.

les points de la courbe repréſentée par l'équation finie. Je réponds que pour tous ceux qui ont des notions juſtes du calcul différentiel, l'équation différentielle d'une courbe eſt auſſi rigoureuſement vraie pour chacun de ſes points que l'équation finie de la même courbe. J'en ai apporté un exemple frappant Tome IV. de mes Opuſc. p. 171. Il en eſt de même & par les mêmes raiſons de l'équation différentielle entre les forces accélératrices & les viteſſes, qui eſt toujours exactement & rigoureuſement vraie, quoique dans certains points elle ne paroiſſe pas l'être. Si on propoſoit à M. *Euler* de trouver une courbe dans laquelle le rayon de la développée en un point quelconque fût égal au rayon de la développée dans le point voiſin infiniment proche, croiroit-il avoir réſolu ce probleme par le moyen d'une courbe formée de deux arcs de cercle contigus, & ayant au point de réunion une tangente commune? Cependant il eſt certain que la ſolution ſeroit exacte, excepté dans le point *unique* de la réunion des deux arcs. C'eſt que le véritable eſprit de l'énoncé du probleme demande que le rayon oſculateur ſoit conſtant *partout*, & qu'ici il ne l'eſt pas, quoiqu'il ſoit conſtant dans chacune des deux courbes. Il en eſt de même dans le cas dont il s'agit; le véritable eſprit de l'équation $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{ddy}{dt^2}$ demande qu'elle ait lieu dans *toute* l'étendue de la courbe, ce qui n'eſt pas quand le $\frac{ddy}{dx^2}$ fait un ſaut; parce que l'équation $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{ddy}{dt^2}$ qui a lieu pour les deux parties de la corde priſes ſéparément, n'eſt pas uniforme pour les deux parties priſes enſemble, en ſorte que le mouvement du point qui ſépare ces deux parties, eſt réellement repréſenté par deux équations très différentes, ce qui eſt abſurde; comme, dans l'exemple propoſé, le point commun aux deux arcs de cercle a deux rayons différens, quoique les rayons ſoient égaux dans les deux arcs.

VIII. En voilà aſſez & peut-être trop ſur cette double controverſe avec Mrs. *Bernoulli* & *Euler*. J'aime mieux vous faire part de quelques recherches ſur les vibrations des cordes inégalement épaiſſes.

Mr. *Bernoulli* a traité fort élégamment ce problême, mais d'une maniere très limitée & pour deux cas seulement. L'équation générale est $\frac{ddy}{Xdx^2} = \frac{ddy}{dt^2}$; ou pour observer la loi des homogenes, soit la force tendante égale au poids d'une corde de la longueur L, & de l'épaisseur uniforme e, a la hauteur qu'un corps pesant parcourroit dans le temps T donné à volonté, on aura $\frac{ddy}{dt^2} \times \frac{T^2}{2a} = \frac{Leddy}{Xdx^2}$. Pour intégrer cette équation, on supposera, suivant la méthode indiquée dans le 1er Mém. de mes Opuscules, $y = Ac^{\xi} \operatorname{cof} \frac{\pi t}{T} + Bc^{\xi'} \operatorname{cof} \frac{2\pi t}{T} + Dc^{\xi''} \operatorname{cof} \frac{3\pi t}{T}$, & on aura les équations $\frac{dd\xi + d\xi^2}{dx^2} = \frac{-X\pi^2}{2aLe}$; $\frac{dd\xi' + d\xi'^2}{dx^2} = -\frac{X.4\pi^2}{2aLe}$; $\frac{dd\xi'' + d\xi''^2}{dx^2} = -\frac{9X\pi^2}{2aLe}$; ainsi en général, supposant $y =$ à la somme d'une suite de quantités de la forme $\zeta \operatorname{cof} \frac{\lambda\pi t}{T}$, la question se réduira à intégrer l'équation $\frac{dd\zeta}{dx^2} = \frac{-\lambda^2 x\pi^2\zeta}{2aLe}$. En faisant $\zeta = c^{\int p\,dx}$, cette équation tombe dans le cas si connu de Riccati, & l'intégration peut se trouver par les méthodes connues; mais il faut que la valeur de ζ ait les deux conditions d'être $= 0$ lorsque $x = 0$ & lorsque $x =$ une certaine quantité a; & il est nécessaire de s'assurer s'il est toujours possible de satisfaire à cette double condition, la valeur de X étant donnée; c'est un point que personne, ce me semble, n'a encore examiné en général.

IX. Je remarque d'abord que x ne sauroit être ni zéro ni négative, puisque x représente l'épaisseur de la corde en ses différens points. Ainsi, en faisant $\frac{2a}{\lambda^2\pi^2} = n$, on aura l'équation $dx = \frac{-dp}{pp + \frac{x}{eLn}}$,

x étant

x étant toujours réel & positif. Soit maintenant e' la plus petite valeur de x, & soit une corde de l'épaisseur uniforme e', tendue par le même poids eL que la corde donnée; en supposant n la même de part & d'autre, ce qui est permis, on aura pour la corde uniforme $dx' = -\frac{dp'}{p'p' + \frac{e'}{eLn}}$, & il est évident à cause de $x > e$, qu'en prenant $p' = p$, on aura $x < x'$. De plus les valeurs de z & de z' égales à $c^{\int p dx}$ & $c^{\int p' dx}$, devant être $= 0$ lorsque $x = 0$ dans les deux cas, il est visible que $\int p dx$ & $\int p' dx$ doivent être $= -\infty$ lorsque $x = 0$, & que par conséquent p & p' doivent être $= \infty$ lorsque $x = 0$. Soient ensuite tracées les courbes RCF, rcf, dont les coordonnées soient $AP = x$, $PM = p$, $ap = x'$, $pm = p'$, & qui aient les deux équations différentielles ci-dessus en x, p, & en x', p'; il n'est pas difficile de voir 1°. que ces courbes auront à peu près les figures qu'on a décrites ici, ayant pour asymptotes AO, DE, ao, de; 2°. que lorsque $p = \infty$, on aura $dx = \frac{-dp}{pp}$ & $dx = -\frac{dp'}{p'p'}$, d'où il est aisé de conclure que les espaces ACR, CFD sont infinis & égaux, ainsi que acr, cfd; 3°. que la valeur de z ou $c^{\int p dx} = c^{-\infty + APMR}$ quantité finie & $= c^{-CPM}$; 4°. que dans la courbe rcf qui a pour équation $dx = -\frac{dp'}{p'p' + \frac{e'}{eLn}}$, $ac = cd$, & que ad est la longueur de la corde uniforme, parce que quand $x = ad$, on a $z' = c^{-\infty + acr - fcd} = c^{-\infty} = 0$; 5°. que la valeur de AD qui donne $p = \infty$ négatif, est $<$ que ad, comme on l'a fait voir ci-dessus; qu'ainsi on trouvera toujours une valeur AD de x qui sera $< ad$, & qui donnera $y = c^{-\infty + ACR - FCD} = c^{-\infty} = 0$. Donc on aura deux valeurs de x qui donneront $z = 0$; savoir $x = 0$, & $x = AD < ad$. Planche IX. Fig. 1. & 2.

X. Nous voilà donc bien assurés qu'on peut dans tous les cas avoir une solution qui donne $\zeta = 0$, lorsque $x = 0$, & lorsque $x = AD$; & pour que AD coïncide avec la longueur donnée de la corde inégalement épaisse, il n'y a qu'à considérer que la longueur ad de la corde uniforme étant arbitraire, puisqu'elle dépend de la constante arbitraire n, il sera toujours possible de prendre n telle que AD coïncide avec la longueur donnée de la corde inégalement épaisse.

XI. Venons présentement à la construction ou intégration de l'équation $dd\zeta = -g^2 X \zeta dx^2$, ou $dp + ppdx = -g^2 X dx$, en prenant $g^2 = \frac{\lambda^2 \pi^2}{2aLe}$. On sait qu'elle est intégrable toutes les fois que $X = (b + fx)^{-\frac{4r'}{2r' \pm 1}}$, b & f étant des constantes arbitraires, & r' un nombre entier positif, & aussi lorsque $X = \frac{h}{(b + fx + lxx)^2}$. Les deux cas de M. *Bernoulli* sont renfermés dans ces deux-là. M. *Euler* dans le Tome IX. des Mém. de Petersb. p. 298. a donné l'analyse du 1[er] cas, & cette analyse dont il a supprimé la démonstration en cet endroit, paroit fondée sur une autre méthode, exposée p. 154 & suiv. du même Volume. Mais il s'en faut beaucoup que l'intégrale qu'il donne pour complette, le soit en effet, comme je vais tâcher de le prouver en cherchant l'intégrale complette véritable.

XII. Pour cela je me sers d'une méthode semblable à celle que vous avez employée, Monsieur, dans les Mém. de Turin Tome III. p. 187, & faisant $dd\zeta + g^2 \zeta dx'^2 . x'^{2m} = 0$, équation à laquelle se réduit le 1[er] des deux cas ci-dessus, & dans laquelle j'ai donné le signe + à g^2 transportée dans le 1[er] membre; je suppose avec vous, suivant les regles connues, dx variable, $x = \frac{x'^{m+1}}{m+1}$, & dx

con-

constant; ce qui donne l'équation transformée $\frac{d^2 z}{du^2} + \frac{n dz}{u du} + g^2 z = 0$, dans laquelle $n = \frac{m}{m+1}$. Supposant ensuite avec vous $z = x e^{ug\sqrt{-1}}$, j'ai $\frac{d^2 x}{du^2} + \left(2g\sqrt{-1} + \frac{n}{u}\right)\frac{dx}{du} + \frac{ngx\sqrt{-1}}{u} = 0$: or je remarque qu'il ne suffit pas, ce me semble, de supposer, comme vous avez fait, $x = Au^r + Bu^{r+1} + Cu^{r+2}$, etc. mais qu'il faut, ou du moins qu'on peut supposer encore $x = Au^r + Bu^{r-1} + Cu^{r-2}$ etc. d'où l'on tirera $r = -\frac{n}{2}$. Cette derniere suite est la seule que trouve M. *Euler*, & sa solution est à cet égard en quelque maniere le complément de la vôtre, qui donne $r = 0$, ou $1 - n$.

XIII. Mais ce n'est pas tout; les trois valeurs de x que donnent ces formules particulieres sont encore trop limitées; pour avoir la valeur générale & complette de x, il faut supposer $x = x's$, x' étant égale à une des trois valeurs particulieres de x, ou à la somme de deux de ces valeurs ou à la somme des trois, & on aura, en substituant & réduisant, l'équation $\frac{x' dds + 2 ds dx'}{du^2} + \left(2g\sqrt{-1} + \frac{n}{u}\right)\frac{x' ds}{du} = 0$; équation d'où l'on tire $\frac{ds}{du} \times x'^2 \times u^n \times e^{2gu\sqrt{-1}} = G$; ce qui donne la valeur complette de s, & par conséquent celle de x, qu'on pourra aisément dégager des imaginaires qu'elle renferme, en employant pour cela les méthodes connues.

XIV. Il est à remarquer que lorsqu'on employe la suite $x = Au^r + Bu^{r-1} + Cu^{r-2}$ etc. qui donne $r = -\frac{n}{2}$, le rap-

 port

port de chaque coëfficient au précédent sera exprimé par une fraction dont le numérateur est $\left(-\frac{n}{2}-k'\right)\left(-\frac{n}{2}-k'-1+n\right)$, k étant un nombre entier positif quelconque, en y comprenant zéro. D'où il est clair que la valeur de x sera finie 1°. si $\frac{n}{2}=-k'$, ce qui donne $m=-\frac{2k}{2k+1}$, 2°. si $\frac{n}{2}=k'+1$, ce qui donne $m=-\frac{2(k'+1)}{2(k'+1)-1}$; conditions qui retombent encore dans celles de Riccati.

XV. On peut encore intégrer l'équation $\frac{dd\zeta}{du^2}+\frac{nd\zeta}{udu}+g^2\zeta=0$, par une autre méthode, en supposant $\zeta=y\cos gu+y'\sin gu$, ce qui donne, en substituant $\left(\frac{ddy}{du^2}+\frac{2gdy'}{du}+\frac{ngy'}{u}+\frac{dny}{udu}\right)\cos gu+\left(\frac{ddy'}{du^2}-\frac{2gdy}{du}-\frac{ngy}{u}+\frac{ndy'}{udu}\right)\sin gu=0$; & comme y & y' sont indéterminées l'une & l'autre, on peut supposer séparément chaque terme $=0$; d'où résultent les deux équations $\frac{ddy}{du^2}+\frac{2gdy'}{du}+\frac{ngy'}{u}+\frac{ndy}{udu}=0$; & $\frac{ddy'}{du^2}-\frac{2gdy}{du}-\frac{ngy'}{u}+\frac{ndy'}{udu}=0$; multipliant la 2de par un coëfficient indéterminé v, on aura en les ajoutant ensemble, $\frac{dd(y+vy')}{du^2}+\frac{nd}{udu}(y+vy')+\frac{2gd(y'-vy)}{du}+\frac{ng}{u}(y'-vy)$. Supposant donc $y+vy'$ divisible par $y'-vy$, ce qui donne $vv=-1$ & $y'-vy=(y+vy')\times\frac{1}{v}$, on aura, en faisant $y+$

$y + \nu y' = \omega$, l'équation $\frac{dd\omega}{du^2} + \frac{n\,d\omega}{u\,du} + \frac{2g\,d\omega}{\nu\,du} + \frac{gn\omega}{\nu u}$: $= 0$; qui est la même que l'équation ci-dessus pour x, art. XII. en donnant à $\sqrt{-1}$ & à ν leurs doubles valeurs. Cette équation s'intégrera donc encore par les articles précédens XII, XIII & XIV.

XVI. Comme la quantité ν a deux valeurs $+\sqrt{-1}$ & $-\sqrt{-1}$ dans l'équation ci-dessus en ω, il est clair que ω aura deux valeurs en u, de la forme $\alpha\,(M + N\sqrt{-1})$ & $\beta\,(M - N\sqrt{-1})$, α & β étant des constantes arbitraires & M, N des séries formées par des puissances de u suivant les loix indiquées ci-dessus; d'où il est aisé de voir qu'on aura $y = \frac{\alpha(M+N\sqrt{-1})+\beta(M-N\sqrt{-1})}{2}$ & $y' = \frac{\alpha(M+N\sqrt{-1})-\beta(M-N\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$.

Supposons maintenant, ce qui est permis, $\alpha = \delta + \varepsilon\sqrt{-1}$, $\beta = \delta - \varepsilon\sqrt{-1}$, on aura $y = \delta M - \varepsilon N$, & $y' = \varepsilon M + \delta N$, & la valeur de $\zeta = y \cos gu + y' \sin gu$, sera délivrée d'imaginaires. Soit $\varepsilon = \delta\lambda'$, & on aura $\zeta = \delta\,[(M - N\lambda')\cos gu + (\lambda' M + N)\sin gu]$. Les quantités λ' & g donneront le moyen de trouver deux valeurs de ζ qui soient à la fois égales à zéro; voici comment. Supposons qu'on prenne un angle ϱ à volonté, & qu'on détermine, ce qui est toujours possible, la quantité λ' à être telle que $\frac{M - N\lambda'}{-\lambda' M - N} = \frac{\sin\varrho}{\cos\varrho} = \tang\varrho$; (M, N étant ici les valeurs qui répondent à une des extrémités de la corde) je dis qu'en faisant $\varrho' = \varrho + \pi'$, ($\pi'$ étant un angle constant inconnu) on aura encore $\tang\varrho' = \frac{M' - N'\lambda'}{-\lambda' M' - N'}$, M', N' étant ici les valeurs répondantes à l'autre extrémité de la corde; d'où il s'ensuit que si V, V' sont les deux valeurs de u qui répondent aux extrémités données de la corde, il n'y a qu'à prendre $gV' - gV = \pi'$, ou $g = \frac{\pi'}{V' - V}$; & supposer λ' tel que $\frac{N\lambda' - M}{\lambda' M + N} = \tang gV$ ou

tang

tang gV'. Il est visible que pour déterminer π' ou g, la difficulté se réduira à tracer les deux courbes qui ont pour coordonnées λ', ρ; λ', ρ'; & pour équation $\text{tang}\,\rho = \frac{M - N\lambda'}{-\lambda' M - N}$ & $\text{tang}\,\rho' = \frac{M' - N'\lambda'}{-\lambda' M' - N'}$, M & N étant des fonctions connues de V, & M', N' de pareilles fonctions de V'; l'interſection des deux courbes donnera la valeur des inconnues λ' & ρ, ainsi que ρ'; & par conséquent celles de π' & de g. La quantité g étant connue, on aura la quantité n qui en dépend, puisque $g^2 = \frac{\lambda^2 \pi^2}{2aLe}$, ou, pour garder la loi des homogenes $g^2 = \frac{\lambda^2 \pi^2}{2aLe} \times \varepsilon b^{-2m}$, ε étant supposée l'épaisseur de la corde au point où $x = 0$. Connoissant a, on connoitra le temps T, pendant lequel la corde fera λ vibrations; & il est facile de voir que la longueur du pendule simple isochrone sera $\frac{2a}{\lambda^2 \pi^2}$.

XVII. On peut encore supposer au lieu de $\zeta = y \cos gu + y' \sin gu$, l'équation $\zeta = y \cos(gu + \eta) + y' \sin(gu + \eta)$, η étant une constante à volonté. On tirera de là précisément les mêmes équations en y, en y' & en ω, que dans l'art. XV. ci-dessus; les valeurs de ω seront dans ce cas-ci, ou du moins pourront être supposées simplement égales à $\delta(M + N\sqrt{-1})$ & $\delta(M - N\sqrt{-1})$; & les valeurs de y, y' seront δM & δN; de plus, en écrivant au lieu de $\cos(gu + \eta)$ & de $\sin(gu + \eta)$ leurs valeurs $\cos gu \cos \eta - \sin \eta \sin gu$, & $\sin gu \cos \eta + \sin \eta \cos gu$, on déterminera comme dans l'art. précédent les quantités g & η par le moyen des deux valeurs de $y = 0$. Mais la méthode précédente me paroît plus simple.

XVIII. Au reste, quelque méthode que l'on suive, on n'oubliera pas 1°. que dans le cas où $2m = \frac{-4r'}{2r' \pm 1}$, il y a toujours deux

deux suites finies $Au^r + Bu^{r+1} + Cu^{r+2}$ etc. & $A'u^{-\frac{n}{2}} + B'u^{-\frac{n}{2}-1} + C'u^{-\frac{n}{2}-2}$ etc. qui donnent la valeur de x dans l'art. XII. ci-dessus; 2°. que cette valeur doit être completrée suivant la formule de l'art. XIII. pour être rendue la plus générale qu'il est possible. Ayant par ce moyen la valeur générale de ζ, on supposera les constantes indéterminées qui y entrent, telles que ζ soit $= 0$ lorsque $x = 0$, c. à d. à une des extrémités de la corde; & il résulte de ce qui a été démontré ci-dessus art. IX. & X, qu'il y aura toujours un autre point de la même corde où ζ sera encore $= 0$.

XIX. A' l'occasion de ces recherches, je vous ferai part, Monsieur, d'une difficulté qui m'a embarassé quelque temps. L'équation en x de l'art. XII. est susceptible de deux solutions qui donnent chacune une suite finie lorsque $2m = \frac{-4r'}{2r' \pm 1}$, comme je l'ai déjà dit dans l'art. précédent, r' étant, comme vous l'avez trouvé, ou zéro, ou $\frac{1}{m+1}$, selon que $\frac{1}{m+1}$ est positif ou négatif. Prenons une de ces deux valeurs de x à volonté, nommons-la x'; la valeur génerale de x sera $x's = x'\int \frac{G\,du\,e^{-2gu\sqrt{-1}}}{x'^2 u^n} + Hx'$ (art. XIII). Cette valeur générale doit renfermer comme un de ses cas l'autre valeur de x, qui est algébrique, finie, & sans l'exponentielle $e^{-2gu\sqrt{-1}}$. Or comment est-il possible qu'en substituant dans $x'\int \frac{G\,du.\,e^{-2gu\sqrt{-1}}}{x'^2 u^n} + Hx'$, à la place de x' sa premiere valeur finie & algébrique en u, on ait une valeur générale dans laquelle, au moins en certains cas, l'exponentielle disparoisse, & d'où résulte l'autre valeur finie & algébrique de x'? Pour résoudre cette difficulté, je suppo-

suppose que la valeur finie & algébrique qu'on donne à x' soit α ($u^r + \epsilon u^{r+1} + \gamma u^{r+2}$ etc.) α étant une quantité infinie & constante; il est clair qu'en supposant G finie, la valeur de s aura pour facteur $\frac{1}{\alpha^2}$ & sera par conséquent infiniment petite du 2[d] ordre, & celle de $x's$ (qui renfermera encore le facteur $\frac{1}{\alpha}$) infiniment petite du 1[er].

J'imagine présentement que l'intégrale de $\frac{du.e^{-2gu\sqrt{-1}}}{x'^2 u^n}$ contienne deux parties, dont l'une $= \frac{V}{\alpha^2}$, renferme l'exponentielle $e^{-2gu\sqrt{-1}}$, & dont l'autre soit de la forme $\frac{x''}{x'}$, x'' étant l'autre valeur finie & algébrique de x; il est visible qu'en supposant H $= 0$, & tous les coëfficiens de x'' finis, j'aurai la valeur $x = \frac{x'V}{\alpha^2} + x'' = x''$ à cause de $\frac{x'V}{\alpha^2}$ infiniment petit.

XX. Autre remarque qui m'a paru digne de vous être communiquée. Soit $ddy + ydx^2 = 0$, & supposons $y = 0$ lorsque $x = 0$, on aura $y = \sin x$; & faisant $y = c^{\int p dx}$, $y = c^{-\int \frac{p dp}{1+pp}} = \frac{1}{\sqrt{(1+pp)}}$. Lorsque x est devenu plus grand que la demi-circonférence π, sin x ou y est alors négatif, ainsi que $\sqrt{(1+pp)}$, & la quantité $\int p dx$, laquelle est évidemment toujours réelle, quelle que soit p, devient le logarithme d'une quantité négative y. Voilà donc bien évidemment, ce me semble, une quantité *négative* qui a un logarithme *réel*; ce qui confirme de nouveau, si je ne me trompe, le sentiment où je suis sur ce sujet, & que j'ai exposé dans le Tome I. de mes Opuscules.

XXI.

XXI. En voici une nouvelle preuve. L'équation $dx = \frac{-dp}{pp+1}$, & la ſuppoſition de $y = \sin x = 0$ lorſque $x = 0$, fait voir que dans le cas préſent, ſi on prend l'arc $AQ = x$, p ſera la tangente de ſon complément QB, & $\frac{1}{\sqrt{(1+pp)}}$ ſera le ſinus de AQ. Or, ſi on trace la courbe qui a pour équation $dx = \frac{-dp}{pp+1}$, il eſt très aiſé de voir, en faiſant $ap = x$, $pm = p$, que cette courbe aura à l'infini la figure qu'on voit ici, dans laquelle ac, cb, bc', $c'd'$ etc. ſont égales à l'arc de 90°; & AQB, ao, ee', $d'o'$ etc. des aſymptotes paralleles, placées à toutes ces diſtances. Il eſt certain que l'aire $\int p\,dx$ de cette courbe eſt $= \int -\frac{p\,dp}{1+pp} = \log \frac{1}{\sqrt{(1+pp)}} + \infty$, en ſuppoſant $\int p\,dx = 0$ lorſque $x = 0$. Donc $apmro = \infty + \log. \frac{1}{\sqrt{(1+pp)}}$; or prenons $bp' = ap$, il eſt très évident, à cauſe de $acro = cfeb$, que l'aire $\int p\,dx$ répondante à ap' ſera $= bp'm'f'e' = apmro$; & comme pour lors $\frac{1}{\sqrt{(1+pp)}}$ ou $\sin x$ eſt négatif, il s'enſuit néceſſairement que les quantités $\frac{1}{\sqrt{(1+pp)}}$ & $-\frac{1}{\sqrt{(1+pp)}}$ ont le même logarithme, ſans quoi les aires $bp'm'f'e'$, $apmro$ ne ſeroient pas égales. Fig. 3. Fig. 4.

XXII. Voilà, Monſieur, les réflexions que m'a fait naitre la conſidération des cordes dans leſquelles X eſt $= \frac{\varepsilon (b+fx)^{\frac{-4r'}{2r'\pm 1}}}{b^{\frac{-4r'}{2r'+1}}}$; j'ai l'honneur de vous les expoſer dans l'ordre à peu près qu'elles ſe ſont pré-

 ſentées

sentées à mon esprit. Je viens maintenant à la supposition de $X = \frac{g^2 \varepsilon (b + fx + lx^2)^{-2}}{b^{-2}}$, g^2 étant = comme ci-dessus à $\frac{\lambda^2 \pi^2}{2aLe}$, & ε l'épaisseur de la corde quand $x = 0$. Cette supposition renferme comme un cas particulier une des deux de M. *Bernoulli*. Supposons pour abréger $dd\zeta + \frac{h^2 \zeta dx^2}{(b + fx + lx^2)^2} = 0$, & $\zeta = c^{\int p dx}$; M. *Euler* a fait voir dans le Tome VIII. des Mém. de Petersbourg, qu'une des valeurs de p qui satisfait à l'équation transformée $dp + pp dx + \frac{h^2 dx}{(b + fx + lx^2)^2} = 0$ est $p = \frac{k + lx}{b + fx + lxx}$; k étant $= \frac{1}{2}f \pm \sqrt{(\frac{1}{4}ff - bl - hh)}$. Soit cette valeur $= p'$, & $p =$ en général $p' + z$, on aura $dz + 2p'z dx + zz dx = 0$ & $\frac{1}{z} c^{-2\int p dx} - \int dx\, c^{-2\int p' dx} =$ à une constante H. Or, en faisant avec M. *Euler* $\pm \sqrt{(\frac{1}{4}ff - bl - hh)} = \frac{1}{2}n$, on aura $c^{-2\int p' dx} = \frac{1}{b + fx + lxx} c^{-\int \frac{n dx}{b + fx + lxx}}$; & $\int dx\, c^{-2\int p' dx} = -\frac{1}{n} c^{-\int \frac{n dx}{b + fx + lxx}}$; donc la valeur générale de p qui est $= p'z$, sera

$$\left(\frac{k + lx}{b + fx + lxx}\right) \times \frac{c^{-\int \frac{n dx}{b + fx + lxx}}}{b + fx + lxx} : \left(H - \frac{1}{n} c^{-\int \frac{n dx}{b + fx + lxx}}\right).$$

Je ne m'arrêterai point à montrer comment on peut faire disparoître les imaginaires de cette expression lorsque $n = m'\sqrt{-1}$, ce qui est le cas de M. *Bernoulli*, qui suppose $f = 0$. On peut voir là-dessus le Mémoire cité de M. *Euler*. Mais je remarquerai qu'afin que ζ ait deux valeurs $= 0$, il faut (art. VIII.) que la 1ere valeur de ζ qui répond à $x = 0$, soit $= 0$; auquel cas il y aura nécessairement deux points fixes dans la corde. Or pour que ζ soit $= 0$ lorsque $x = 0$, il faut que $\int p dx = -\infty$ lorsque $x = 0$; d'où l'on voit que p doit

doit être infini lorsque $x = 0$; prenons pour plus de simplicité, le cas où n est réel, & supposons $\int \frac{dx}{l+fx+lxx} = z' = 0$, lorsque $x = 0$, il faudra prendre pour la valeur de $c^{-\int \frac{n\,dx}{b+fx+lxx}}$ la quantité $c^{nA - nz}$, A étant une constante arbitraire, qui peut même être $= 0$, si on le veut, & supposer la constante $H = \frac{c^{nA}}{n}$; par ce moyen il est clair que p sera infini quand x sera $= 0$. Il en sera de même, *mutatis mutandis*, pour le cas où n est imaginaire.

XXIII. Si on fait $\zeta = \xi \sin \frac{\pi t}{T} + \xi' \sin \frac{2\pi t}{T} + \xi'' \sin \frac{3\pi t}{T}$ etc. & qu'on suppose les quantités ξ, ξ', ξ'', etc. telles qu'elles soient $= 0$ aux deux extrémités de la corde, ce qu'il est toujours possible de faire par les méthodes précédentes (ces quantités ξ, ξ', ξ'' etc. pouvant d'ailleurs être $= 0$ en d'autres points encore qu'aux deux extrémités,) il est évident qu'en supposant $\zeta = \alpha \xi \cos \frac{\pi t}{T} + \beta \xi' \cos \frac{2\pi t}{T} + \gamma \xi'' \cos \frac{3\pi t}{T}$ etc. & prenant pour α, β, γ, des quantités très petites quelconques, cette valeur de ζ satisfera encore à l'équation $dd\zeta + g^2 X \zeta dx^2 = 0$, & que la valeur de ζ sera encore nulle aux extrémités. Or supposant pour abréger $T = 1$, on verra par ce qui précede que la valeur de la vitesse ou de $\frac{d\zeta}{dt}$ peut être supposée (art. IV) $= \sin \pi t\,(\alpha \xi + \beta \xi' T' + \gamma \xi'' T''$ etc.) T', T'' etc. étant des fonctions finies, rationnelles & sans diviseur, de $\cos \pi t$. De là on prouvera aisément, comme ci-dessus, que β, γ etc. étant prises telles qu'on voudra, on pourra toujours déterminer α de telle maniere que la quantité renfermée entre deux crochets ne soit jamais $= 0$, d'où il s'ensuit que la corde ne fera que des vibrations simples & uni-

uniques, puisque la vitesse ne sera $=$ o que quand sin $\pi t = $ o, & qu'elle cessera à la fois dans tous les points. De plus si on fait $\zeta = \alpha \xi \cos \pi t + \beta \xi' \cos 3 \pi t + \gamma \xi'' \cos 5 \pi t$ etc. on prouvera encore, comme dans l'art. II. ci-dessus, que le coëfficient α peut-être tel par rapport aux autres que ζ ne soit $=$ o que quand $\cos \pi t = $ o, & que cette même supposition donne $\frac{d\zeta}{dt} =$ à un *maximum*. On voit donc que les cordes inégalement épaisses, d'où Mr. *Bernoulli* a cru tirer des preuves convaincantes en faveur des vibrations multiples, donnent en une infinité de cas des vibrations simples, régulieres, d'égale durée, & semblables des deux côtés de l'axe, ainsi que les cordes d'une épaisseur uniforme.

Je termine ici cette Lettre, Monsieur, qui n'est déjà que trop longue; & je me propose de vous envoyer dans quelque autre occasion la suite de ces réflexions, & quelques recherches sur d'autres sujets. etc.

A' Paris ce 11 Juin 1769.

Dans les Mém. de 1765. p. 388. lignes 3 & 6, avant $-\frac{1}{x}$, mettez $-\frac{d\lambda}{\lambda dx}$; & pag. 409. lig. 9, avant $+ \beta' du$, mettez $+ A\beta' dx$.

SUI

SUITE DE L'EXTRAIT DE DIFFÉRENTES LETTRES DE MR. D'ALEMBERT À MR. DE LA GRANGE.

I.

Je continue, Monsieur, à vous faire part de mes recherches sur les cordes vibrantes. Soit l'équation $dd\zeta + \frac{\zeta X \pi^2 dx^2}{2aLe} = 0$, trouvée dans ma Lettre précédente pour le cas des cordes vibrantes dont les points font leurs vibrations en même temps; je la mets d'abord sous cette forme $dd\zeta + \frac{\zeta \pi^2 dx^2 . X}{g^2} = 0$ & ensuite sous celle-ci, en supposant dx variable, $\frac{dd\zeta}{X dx^2} - \frac{d\zeta ddx}{X dx^3} + \frac{\zeta}{g^2} = 0$; je fais $dx \sqrt{X} = du$, & du constant; j'ai $\frac{dd\zeta}{du^2} + \frac{dX d\zeta}{2X du^2} + \frac{\zeta}{g^2} = 0$; & je vois que si $\frac{dX}{X} = k du$, k étant un nombre quelconque constant, l'équation en ζ sera intégrable. On aura donc, à cause de $dx \sqrt{X} = du$, l'équation $\frac{dX^2}{X^2} = k^2 X dx^2$, ou $\frac{dX}{X^{\frac{3}{2}}} = + dx \sqrt{k^2}$; (je laisse $\sqrt{k^2}$ sous cette forme à cause de l'équivoque du signe) ce qui fait voir d'abord que k^2 doit être positif afin que X soit réel; & de plus que $X = \frac{4}{(a + x\sqrt{k^2})^2}$, quantité toujours réel-

le

le & positive. L'équation $\frac{dd\zeta}{du^2} + \frac{k d\zeta}{du} + \frac{\zeta}{g^2} = 0$, étant intégrée dans cette hypothèse suivant les regles connues, donnera $\zeta = Ac^{fu} + Bc^{f'u}$, f & f' étant les deux racines de l'équation $ff + kf + \frac{1}{g^2} = 0$, c'est à dire $-\frac{k}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{k^2}{4} - \frac{1}{g^2}\right)}$; or pour que ζ puisse être $= 0$ aux deux extrémités de la corde, & qu'il soit outre cela très petit dans les autres points, il faut que $\frac{k^2}{4}$ soit $< \frac{1}{g^2}$, & on aura $\zeta = c^{-\frac{k}{2}u} \times \left(\alpha \sin u \sqrt{\left(\frac{1}{g^2} - \frac{k^2}{4}\right)} + \beta \cos u \sqrt{\left(\frac{1}{g^2} - \frac{k^2}{4}\right)}\right)$. Les quantités très petites α, & β, & la quantité $c^{-\frac{ku}{2}}$ qui va toujours en diminuant, puisque k est positif, montrent que la valeur de ζ est toujours très petite; & comme ζ doit être $= 0$ lorsque $x = 0$, il est clair que si $u = 0$ lorsque $x = 0$, (supposition permise puisque $dx\sqrt{X} = du$, donne $u = \int dx\sqrt{X} + C$, & que C peut être $= 0$) on aura en ce cas $\zeta = c^{-\frac{ku}{2}} \times \alpha \sin u \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{g^2} - \frac{k^2}{4}}\right)$.

II. On peut trouver par une méthode semblable la courbe vibrante, lorsque l'épaisseur est uniforme, & la résistance comme la vitesse; l'équation en ce cas sera de cette forme $\frac{dd\zeta}{dt^2} = \frac{A dd\zeta}{dx^2} - \frac{B d\zeta}{dt}$, A & B étant des constantes; & en faisant $\zeta = \xi\theta$, on aura $\frac{\xi dd\theta}{dt^2} = \frac{A\theta dd\xi}{dx^2} - \frac{B\xi d\theta}{dt}$, parce que ξ & θ sont des fonctions, l'une de x l'autre de t; donc supposant $\frac{dd\theta}{dt^2} + \frac{B d\theta}{dt} = -M\theta$,

&

& M étant une constante quelconque positive, on aura $-M\xi = \frac{Add\xi}{dx^2}$; d'où l'on tirera ξ & θ.

III. En général, si la résistance est comme une puissance quelconque de la vitesse, & l'épaisseur X, l'équation sera de cette forme $\frac{dd\zeta}{dt^2} = \frac{Add\zeta}{Xdx^2} - \frac{Bd\zeta^n}{Xdt^n}$. Soit $\zeta = \xi\theta$, on aura $\frac{\xi dd\theta}{dt^2} = \frac{A\theta dd\xi}{Xdx^2} - \frac{B\xi^n d\theta^n}{Xdt^n}$. Soit supposé $\frac{\xi^n}{X} = M.\xi$, & $\frac{dd\theta}{dt^2} + \frac{BMd\theta^n}{dt^n} = N.\theta$, on aura $N.\xi = \frac{Add\xi}{Xdx^2}$. Mais ces hypotheses étant très limitées, je ne m'y arrêterai pas.

IV. Je reviens à l'équation ci-dessus $\frac{dd\zeta}{du^2} + \frac{dXd\zeta}{2Xdu^2} + \frac{\zeta}{g^2} = 0$; en faisant $\frac{dX}{2Xdu} = 2V$, & $\zeta = c^{\int pdu}$, on aura $dp + ppdu + 2pVdu + \frac{du}{g^2} = 0$, & supposant $p + V = q$, on aura $dq + qqdu + du\left(\frac{1}{g^2} - V^2\right) - dV = 0$. Donc si $du\left(\frac{1}{g^2} - V^2\right) - dV$ est égal ou à zéro, ou à une constante adu, ou à $au^m du$, m étant $= \frac{-4r}{2r \pm 1}$, ou à $a(b + fu)^m du$ dans la même hypothese, ou enfin à $\frac{kdu}{(b + fu + guu)^2}$, on pourra dans tous ces cas (& dans plusieurs autres) trouver la valeur de ζ.

V. Si on suppose, comme vous avez fait dans les Mém. de Turin T. 3. p. 187, $\zeta = x' c^{\pm g' u \sqrt{-1}}$ (g' étant $= \frac{1}{g}$), & $\frac{dX}{2 X du} = 2V$, on aura la transformée $\frac{ddx'}{du^2} + \frac{dx'}{du} (\pm 2g' \sqrt{-1} + 2V) \pm 2g'x'V\sqrt{-1} = 0$, & supposant $x = c^{\int p du}$, on aura la transformée $dp + ppdu + 2p(\pm g'\sqrt{-1} + V) du \pm 2g'Vdu\sqrt{-1}$; donc faisant $p \pm g'\sqrt{-1} + V = q$, on aura $dq + qqdu + dV - VVdu \pm 2g'Vdu\sqrt{-1} = 0$; d'où l'on tirera la valeur de q, si $- dV - VVdu \pm 2g'Vdu \sqrt{-1}$ est ou zéro, ou adu ou etc. comme dans l'art. précédent.

VI. Voici un cas de la vibration des cordes, qui me paroit mériter quelque attention. Supposons deux cordes uniformes, de longueurs différentes l, l', tendues par le même poids $L.e$, & dont les épaisseurs soient ε, ε'; il n'est pas difficile de voir que ces deux cordes feront leurs vibrations en temps égal, si $l^2 \varepsilon = l'^2 \varepsilon'$; en sorte qu'à égale distance de l'axe, la force sollicitatrice $\frac{ddy \times Le}{\varepsilon dx^2}$ & $\frac{ddy' \times Le}{\varepsilon' dx'^2}$, sera la même de part & d'autre. Imaginons présentement une corde formée de la moitié de ces deux-là, dont la longueur soit $\frac{l + l'}{2}$, & dont la moitié $\frac{l}{2}$ ait l'épaisseur ε, & la moitié $\frac{l'}{2}$ l'épaisseur ε', en sorte que ces deux moitiés se réunissent & se touchent à l'extrémité de leur plus grande ordonnée commune, placée à la distance $\frac{l}{2}$ d'une des extrémités, & à la distance $\frac{l'}{2}$ de l'autre; cette corde unique aura des vibrations synchrones & isochrones comme les deux cordes séparées, & les mêmes que ces deux cordes, quoique la force motrice $\frac{ddy}{dx}$ & l'épaisseur ε, y fassent un saut dans l'endroit

où

où les deux cordes ſe réuniſſent. Ce phénomene n'eſt pourtant pas contraire à nos principes, parce que la vraie force accélératrice eſt ici, non $\frac{ddy}{dx^2}$, mais $\frac{ddy}{\varepsilon dx^2}$, quantité qui ne fait point de ſaut, quoique $\frac{ddy}{dx^2}$ & ε en faſſent un. Cette corde vibrante a pour équation $\zeta = \alpha \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi t}{T}$ depuis le point où $x = 0$ juſqu'à celui où $x = \frac{l}{2}$; enſuite elle a pour équation $\zeta = \alpha' \sin \pi \left(\frac{x + \frac{l' - l}{2}}{l'} \right) \cos \frac{\pi t}{T}$. Au point de réunion commun, qui eſt celui de la plus grande ordonnée & de $x = \frac{l}{2}$, on a $\alpha \sin \frac{\pi}{2} = \alpha' \sin \frac{\pi}{2}$; d'où il s'enſuit que $\alpha' = \alpha$.

VII. La même régularité de mouvement aura lieu dans une corde compoſée de tant d'autres cordes uniformes qu'on voudra, mais toutes d'une épaiſſeur différente, ou même dans une corde où la variable X, qui indique l'épaiſſeur, changeroit à chaque point, ſans être aſſujettie à aucune loi de continuité. Il ſuffit pour la régularité de ce mouvement, & pour le ſynchroniſme & l'iſochroniſme des parties, que la force accélératrice réelle $\frac{dd\zeta}{Xdx^2} \times Le$ ne faſſe de ſaut nulle part. Il faut ſeulement que $\frac{d\zeta}{dx}$ ne faſſe de ſaut en aucun endroit; car en ce cas la force accélératrice $\frac{dd\zeta}{Xdx^2}$ feroit réellement un ſaut au point où les deux parties de la corde formeroient un angle, indiqué ou donné par le ſaut de $\frac{dy}{dx}$. On remarquera auſſi que dans l'équation

$dp + ppdx + Xdx = 0$, à laquelle se réduit l'équation $dd\zeta + X\zeta dx^2 = 0$, il faut toujours supposer dx constant, quelque saut que fasse la quantité X; ce saut en fera faire un à dp; mais p n'en doit jamais faire, au moins de saut fini, puisqu'on vient de voir que $\frac{d\zeta}{dx}$ n'en doit point avoir.

VIII. Je passe maintenant, Monsieur, à quelques réflexions sur le probleme des Tautochrones, que nous avons traité l'un & l'autre dans les Mém. de 1765. Vous paroissez persuadé (p. 371) que la tautochrone dans le cas de la résistance $= \phi u + au$, est la même que dans le cas de la résistance $= \phi u$. Je crois cela vrai si la force accélératrice est représentée par la formule $p = \frac{u^2}{\xi}\left[\phi\left(\frac{u}{\xi}\right) - \frac{d\xi}{dx}\right]$ que nous avons trouvée l'un & l'autre; mais comme nous avons trouvé aussi (p. 379. & 396.) qu'on peut donner à p une expression beaucoup plus générale, dont la précédente n'est qu'un cas particulier, il me semble, comme je l'ai remarqué p. 408. & 409, que quand p aura cette expression générale, alors il n'est pas démontré que la tautochrone soit la même dans le cas de la résistance $= \phi u$, & dans celui de la résistance $= \phi u + au$. Je dis qu'*il n'est pas démontré*, car j'avoue que le cas des tautochrones lorsque la résistance est comme $uu + au$, comme $b + au$, & en général comme $b + cuu + au$, & celui des tautochrones dans un milieu peu résistant, donne lieu de croire qu'en effet les tautochrones sont les mêmes en général dans le cas ou la résistance est ϕu, & dans celui où elle est $\phi u + au$.

IX. Il me paroit nécessaire aussi que l'expression du temps soit non seulement $= 0$ quand $u = 0$, & constante quand $x = 0$, mais encore que cette valeur constante soit *finie*; car il ne s'agit pas, ce me semble, dans les tautochrones, d'un tems infini en durée; ces courbes mêmes ne seroient pas alors proprement tautochrones, puisque le temps de la descente n'y finiroit jamais. Vous avez, ce me sem-

ſemble, négligé cette condition que t ſoit fini quand $x = o$; condition qui demande cependant, comme je l'ai remarqué p. 391 & ſuiv. que la fonction de u & de x qu'on prend pour exprimer le temps, ſoit elle-même aſſujettie à de certaines conditions dépendantes de celle-là, & que j'ai déterminées.

X. Voici quelque choſe de plus général. Soit $t = \int dz \Delta z$, z étant une fonction de u & de x, il faut d'abord que t ſoit $= o$ lorſque $z = o$, c. à d. lorſque $u = o$. Il faut enſuite que lorſque $x = o$, on ait, ou bien $\Delta z = A z^{-n}$, n étant > 1, ou bien $z =$ à une conſtante b, qui ſera telle qu'on voudra. On doit donc dans ce dernier cas, avoir une telle équation entre z, u & x, 1°. qu'en faiſant $u = o$, on ait $z = o$; 2°. qu'en faiſant $x = o$, on ait $z = b$; or c'eſt à quoi il eſt aiſé de parvenir en ſuppoſant $z - b = y$, & en formant une équation entre y, z, u, x, telle 1°. qu'en y faiſant $u = o$, & $z = o$, tout ſe détruiſe; 2°. qu'en y faiſant $y = o$ & $x = o$, tout ſe détruiſe de même. Il faudra ſeulement avoir attention, 1°. que tout ne ſe détruiſe pas par la ſeule ſuppoſition de $u = o$, ni par celle de $x = o$, mais que les deux ſuppoſitions de $u = o$, & de $x = o$, ſoient néceſſaires l'une & l'autre à la fois pour faire évanouir tous les termes; par la raiſon qu'il eſt néceſſaire que la ſuppoſition de $u = o$ entraine celle de $z = o$, ce qui ne ſeroit pas, ſi la ſeule ſuppoſition de $u = o$ détruiſoit tout. 2°. Par la même raiſon il faut que les deux ſuppoſitions de $y = o$ & de $x = o$ ſoient néceſſaires à la fois pour détruire tous les termes. D'où il s'enſuit 1°. qu'il ne doit point y avoir dans cette équation en y, z, x, u de terme tout conſtant; 2°. qu'il ne doit point y avoir non plus de termes qui ne contienne que u, ou que x, ou que y, ou que z, puiſqu'en faiſant $y = o$ & $x = o$, ou $u = o$, & $z = o$, tous les termes ne diſparoitroient pas dans cette équation. 3°. Que u & z ne ſe trouvent pas à la fois dans tous les termes, au moins élevés à des puiſſances poſitives, puiſqu'autrement tous les termes s'évanouiroient par la ſeule ſuppoſition de $u = o$ ou de $z = o$;

 4°. que

4°. que par la même raison y & x ne se trouvent pas à la fois dans tous les termes. 5°. Enfin, qu'il se trouve dans tous les termes ou z, ou u; & qu'il s'y trouve aussi, ou y ou x. On sent qu'il est très aisé de former tant d'équations qu'on voudra, qui satisfassent à des conditions si simples. On sent aussi qu'on peut supposer $t = \int dz \Delta z + \int dz' \phi z' +$ etc. pourvu que z, z' etc. soient assujetties aux conditions susdites.

XI. On peut encore former immédiatement une équation entre t, x, u, qui soit assujettie aux mêmes conditions que l'équation en z, x, u dans l'art. précédent, c. à d. qui soit telle que $u = 0$ donne $t = 0$; & que $x = 0$ donne $t =$ à une quantité constante b. Il ne faudra pour cela que mettre t au lieu de z, & $t - b = t'$ au lieu de y dans les calculs de l'art. précédent.

XII. Soit une équation entre t, x, u, telle qu'elle résulte de l'art. précédent, & soit différentiée cette équation, on aura $A dt + B dx + C du = 0$, ou $- \frac{A dx}{u} + B dx + C du = 0$; or $p dx + u du = 0$ donne $dx = - \frac{u du}{p}$; donc $+ \frac{A}{p} - \frac{Bu}{p} = - C$. Cette équation ne contient plus que les quantités finies t, u, x, p; car il faut remarquer que t peut se trouver dans les quantités A, B, C, ce qui n'avoit pas lieu dans notre solution de 1765, où nous supposions t exprimée, par une équation linéaire, en fonction de x & de u; au lieu qu'ici t peut n'être pas linéaire dans l'équation supposée entre t, x, u. On emploîra donc les équations finies entre t, x, u, & entre t, x, u, p, l'une donnée, l'autre trouvée, à faire évanouir t, & on aura une équation finie entre p, x, u, où p pourra monter à de plus hautes puissances que l'unité. On mettra dans cette équation, au lieu de p, $\xi + V$, ξ étant une fonction inconnue de x, & V une fonction donnée de u, & on tâchera de déterminer ξ par la comparaison des termes de cette équation.

XIII.

XIII. Si on veut que dans l'équation en t, t ne monte qu'au 1er degré, l'équation aura cette forme $tX + (t - b) V = 0$, dans laquelle V est une fonction de u & de x, qui devient $= 0$ quand $u = 0$, mais non quand $x = 0$, & X une fonction des deux mêmes variables, qui devienne $= 0$ quand $x = 0$, mais non quand $u = 0$.

XIV. En général, supposons que le temps total de la descente $= X$, fonction donnée de x, & au lieu de prendre $dt = -\frac{dx}{u}$, prenons $dt = \frac{dx}{u}$, ce qui est permis, c. à d. prenons t pour le temps employé à parcourir l'arc x, en commençant du point le plus bas; il faudra donc 1°. que quand $x = 0$, t soit $= 0$, 2°. que quand $u = 0$, t soit $= X$; soit donc $t - X = t'$, il n'y aura qu'à former une équation entre t, x, u, t', qui soit telle que $x = 0$ rende $t = 0$, & que $u = 0$ rende $t' = 0$. C'est à quoi on parviendra facilement par les méthodes précédentes.

XV. Autrement. Soit supposée une fonction de u & de x qui devienne $= X$ quand $u = 0$, & qui soit $= 0$ quand $x = 0$; & soit σ cette fonction; je dis qu'en faisant $dt = - d\sigma$, on aura le temps total de la descente $= X$; car lorsque $u = 0$, on aura $t = X - \sigma$, en supposant ici $t = 0$, comme dans les Mém. de 1765, lorsque $u = 0$; & quand $x = 0$, on a $t = X$. Or pour avoir la fonction σ, il faut qu'en faisant $u = 0$, elle soit $= X$, & qu'en faisant $x = 0$, elle soit $= 0$. Donc il n'y a qu'à prendre une fonction de $\sigma - X$, de u, de σ & de x, qui soit telle qu'en faisant $\sigma - X = 0$, & $u = 0$, tout s'évanouisse, ainsi qu'en faisant $x = 0$, & $\sigma = 0$. Ce qui revient à la méthode de l'art. précédent, avec cette différence qu'ici $dt = -\frac{dx}{u}$.

XVI.

XVI. J'aurois, Monsieur, une autre réflexion à vous proposer sur nos solutions communes. Nous trouvons d'un côté $-\frac{dx}{u}$ ou $dt = d\phi(x, u) = Adx + Bdu = Adx - \frac{Bpdx}{u}$; & de l'autre l'équation $pdx + udu = 0$; & nous supposons pour la solution que les deux équations $-dx = Audx + Budu$, & $-pdx = udu$, soient *identiques*. Cette identité est-elle indispensablement nécessaire pour la solution, & ne pourroit-il pas se faire que les deux équations, sans être identiques, donnassent le même résultat, ou la même courbe? On peut très bien avoir, ce me semble, deux équations $dx + \alpha du = 0$, $dx + \beta du = 0$, qui appartiennent à la même courbe, quoique α ne soit pas identique à β. Il suffit que la courbe ait pour équation $\alpha = \beta$, ce qui donnera en différentiant $\frac{d\alpha}{dx}dx + \frac{d\alpha}{du}du = \frac{d\beta}{dx}dx + \frac{d\beta}{du}du$, ou (en mettant pour dx sa valeur $-\alpha du$) $-\frac{\alpha d\alpha}{dx} + \frac{d\alpha}{du} = -\frac{\alpha d\beta}{dx} + \frac{d\beta}{du}$. Soit donc pris α à volonté, α étant une fonction de x & de u, & soit cherchée une fonction β de x & de u qui satisfasse à l'équation $-\frac{\alpha d\alpha}{dx} + \frac{d\alpha}{du} = -\frac{\alpha d\beta}{dx} + \frac{d\beta}{du}$; il est clair qu'en supposant $\alpha = \beta$, on aura une équation finie entre x & u, de laquelle il résultera également $dx + \alpha du = 0$, & $dx + \beta du = 0$. J'ai donné dans le IV[e] Volume de mes Opuscules p. 236. art. 18, la méthode pour trouver β, α étant donné. L'équation $\alpha = \beta$, donne d'abord $\frac{d\alpha}{dx}dx + \frac{d\alpha du}{du} = \frac{d\beta}{dx}dx + \frac{d\beta}{du}du$; or (hyp.) on a l'équation identique $-\frac{\alpha d\alpha}{dx} + \frac{d\alpha}{du} = -\frac{\alpha d\beta}{dx} + \frac{d\beta}{du}$;

donc

donc $\frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\beta}{dx} = \frac{du}{dx} \times \left(-\frac{d\alpha}{du} + \frac{d\beta}{du}\right)$; Or $\frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\beta}{dx}$ est égal & identique (hyp.) à $-\frac{1}{\alpha}\left(-\frac{d\alpha}{du} + \frac{d\beta}{du}\right)$. Donc $\frac{dx}{du} = -\alpha = -\beta$.

XVII. En général puisque $dx = -\alpha du$ ou $-\beta du$, on aura $\alpha = \beta$ pour l'intégrale de ces équations, si en mettant dans l'équation $\frac{d\alpha}{dx}dx + \frac{d\alpha}{du}du = \frac{d\beta}{dx}dx + \frac{d\beta}{du}du$, au lieu de dx sa valeur $-\alpha du$ ou $-\beta du$, ou à l'une des quatre équations suivantes à volonté

$$-\frac{\alpha d\alpha}{dx} + \frac{d\alpha}{du}du + \frac{\alpha d\beta}{dx} - \frac{d\beta}{du}du = 0$$

$$-\frac{\beta d\alpha}{dx} + \frac{d\alpha}{dx}du + \frac{\alpha d\beta}{dx} - \frac{d\beta}{du}du = 0$$

$$-\frac{\alpha d\alpha}{dx} + \frac{d\alpha}{du}du + \frac{\beta d\beta}{dx} - \frac{d\beta}{du}du = 0$$

$$-\frac{\beta d\alpha}{dx} + \frac{d\alpha}{du}du + \frac{\beta d\beta}{dx} - \frac{d\beta}{du}du = 0.$$

XVIII. Supposant α une fonction quelconque de x & de u, & prenant β telle qu'elle satisfasse à l'une de ces quatre équations à volonté, on fera $\alpha = \beta$ & cette équation sera l'intégrale de l'une des deux équations $dx + \alpha du = 0$, $dx + \beta du = 0$. On peut trouver β dans les deux 1^{eres} Equations par les méthodes que j'ai expliquées Tome IV. de mes Opuscules, 26e Mémoire, art. 18 — 24. Il faudra dans la 4e Equation supposer pour plus de facilité β donnée au lieu de α, & on aura β en α; la 3e Equation est plus difficile à résoudre, mais il suffit que l'équation entre α & β qu'elle indique, soit une équation possible. Au reste il est à remarquer que les équations

$dx + \alpha du = o$, $dx + \beta du = o$ ne peuvent avoir lieu à la fois que dans certains cas & avec certaines limitations, puisque l'intégration générale de $dx + \alpha du = o$, renferme une constante arbitraire qui ne se trouve pas dans α ni dans β, & qu'il en est de même de l'équation $dx + \beta du = o$; ainsi l'équation $\alpha = \beta$ ne peut représenter généralement & dans tous les cas l'intégrale des deux équations $dx + \alpha du = o$, $dx + \beta du = o$, mais seulement dans certains cas particuliers. Je demande donc s'il ne pourroit pas se faire aussi qu'en certains cas particuliers, les deux équations $- dx = Audx + Budu$ & $- pdx = udu$ ne fussent pas nécessairement identiques? C'est un point qui me paroitroit digne d'être discuté.

XIX. J'ajouterai encore qu'il n'est pas nécessaire que les quatre équations de l'art. XVII. soient identiques; il suffit de former ou de supposer une telle équation entre la quantité $\alpha - \beta$ & le premier membre de l'une de ces quatre équations, qu'en supposant $\alpha - \beta = o$, ce 1er membre soit $= o$; c'est à dire qu'en nommant M ce premier membre, & faisant $\alpha - \beta = \gamma$, il suffit de former entre M & γ une équation telle qu'en faisant $M = o$, & $\gamma = o$, tout s'évanouisse. Car il est visible qu'alors la supposition de $\alpha = \beta$, donnera $M = o$; & par conséquent les deux équations $dx + \alpha du = o$, $dx + \beta du = o$. Je suis etc.

A Paris, le 16 Juin 1769.



b SUI-

SUITE DE L'EXTRAIT DE DIFFÉRENTES LETTRES

DE

Mr. D'ALEMBERT À Mr. DE LA GRANGE.

I.

A Peine ma derniere Lettre étoit-elle partie, Monsieur, que je me suis apperçu que les deux suites $Au^{r} + Bu^{r+1} + Cu^{r+2}$ etc. & $Au^{r} + Bu^{r-1} + Cu^{r-2}$ etc. qui donnent la valeur de x dans l'équation différentielle du 2d ordre $\frac{ddx}{du^2} + \left(2m + \frac{n}{u}\right)\frac{dx}{du} + \frac{nmx}{u} = 0$, & qui paroissent si différentes l'une de l'autre, reviennent néanmoins à la même, (au moins dans le cas où l'une & l'autre sont finies) & ne different qu'en ce que l'une est à *contresens* de l'autre, r étant dans la 1re $= 0$, ou $= 1 - n$, & dans la 2de $= -\frac{n}{2}$. Je me suis donc donné une peine inutile pour expliquer comment ces deux valeurs de x, qui ne renferment point d'exponentielles, sont contenues, lorsqu'elles sont finies, dans la valeur générale qui en renferme. Voici quelque chose de plus simple & de plus général en même temps.

II. Soit $dp + \sigma p du = o$, σ étant une fonction quelconque de u; & soit θ une valeur particuliere de p qui satisfasse à cette équation, je dis que l'intégrale générale & complette sera $p = A\theta$, A étant une constante arbitraire. Car soit $p = \theta z$, on aura $\theta dz + zd\theta + \sigma z\theta du = o$, & à cause de $d\theta + \theta\sigma du = o$, on aura $\theta dz = o$, donc $dz = o$, & $z = A$.

III. Donc si on a $dd\zeta + \sigma d\zeta du = o$, & qu'on ait une valeur particuliere ζ' de ζ qui satisfasse à cette équation, l'intégrale complette sera $A\zeta' + C$, A & C étant des constantes arbitraires. Car soit $d\zeta = pdu$, on aura $dp + p\sigma du = o$, & $\theta = \frac{d\zeta'}{du}$; donc en général $p = A\theta$; donc $d\zeta = A\theta du = Ad\zeta'$; donc $\zeta = A\zeta' + C$.

IV. Donc si on a $\frac{ddx}{du^2} + \xi\frac{dx}{du} + Xx = o$, & qu'on ait deux valeurs de x, savoir ζ' & ω, qui satisfassent à cette équation, l'intégrale générale & complette sera $A\omega + B\zeta'$, A & B étant des constantes arbitraires. Car soit $x = \zeta' k$, k' étant une variable indéterminée quelconque; on aura (à cause de $\frac{dd\zeta'}{du^2} + \xi\frac{d\zeta'}{du} + X\zeta' = o$) la transformée réduite $ddk + dkdu\left(\frac{2d\zeta'}{\zeta'} + \xi\right) = o$. Or puisque x a deux valeurs (hyp.), ζ', ω, donc une des valeurs de k est $\frac{\omega}{\zeta'}$. Donc en géneral (art. III.) $k = \frac{A\omega}{\zeta'} + B$; donc x ou $k\zeta' = A\omega + B\zeta'$.

V. L'équation différentielle $ddk + dk\left(\frac{2d\zeta'}{\zeta'} + \xi du\right) = o$ donne $\frac{dk}{du} = \frac{Ac^{-\int\xi du}}{\zeta'\zeta'}$ & $k = \int\frac{Aduc^{-\int\xi du}}{\zeta'\zeta'} + B$, donc

ω

$\frac{\omega}{\zeta'} = \int \frac{du\, c^{-\int \xi du}}{\zeta'\zeta'}$, plus une constante s'il est nécessaire. Donc si ni ω, ni ζ' ne renferment d'exponentielles, il ne doit point y en avoir non plus dans la valeur générale de k.

VI. Donc si $\xi = 2m + \frac{n}{u}$, comme il arrive dans le cas de l'art. I. ci-dessus, alors $c^{-\int \xi du}$ étant nécessairement égal à $u^n c^{-2mu}$, il est impossible qu'au moins l'une des deux valeurs ω, ζ' ne renferme l'exponentielle c^{-2mu}.

VII. C'est ainsi que je me suis d'abord assuré *a posteriori*, qu'il étoit impossible que dans aucun cas, x eût deux valeurs finies, & algébriques, qui ne renfermassent ni l'une ni l'autre des quantités exponentielles. D'où j'ai conclu d'abord qu'il falloit nécessairement que les deux suites de l'art. I. ne fussent qu'une seule & même suite, lorsqu'elles sont finies. Il ne m'a pas été difficile ensuite de m'en assurer directement & *a priori*. Mais avant que d'en venir à ce point, je remarquerai que l'équation $\frac{d^2z}{du^2} + \frac{ndz}{udu} + g^2z = 0$, donne en faisant $z = xc^{gu\sqrt{-1}}$ ou $x'c^{-gu\sqrt{-1}}$ la double équation $\frac{ddx}{du^2} + \left(2g\sqrt{-1} + \frac{n}{u}\right)\frac{dx}{u} + \frac{ng\sqrt{-1}.x}{u} = 0$ & $\frac{ddx'}{du^2} + \left(\frac{n}{u} - 2g\sqrt{-1}\right)\frac{dx'}{du} - \frac{ngx'\sqrt{-1}}{u} = 0$; que votre méthode, Monsieur, ou celle de M. *Euler* donnent $x = V$ & $x' = V'$, V & V' étant des suites composés de puissances de u, qui deviennent finies si $1 - n$ est égal à un nombre impair positif ou négatif, ainsi que vous l'avez trouvé; que par conséquent on a deux valeurs particulieres de z, savoir $Vc^{gu\sqrt{-1}}$ & $V'c^{-gu\sqrt{-1}}$; & qu'ainsi (art.

 IV.)

IV.) la valeur générale & complette est $A.Vc^{gu\sqrt{-1}} + B.V'c^{-gu\sqrt{-1}}$, donc puisque la valeur générale de x est $zc^{-gu\sqrt{-1}}$, & la valeur générale de x', $zc^{gu\sqrt{-1}}$, il s'ensuit que la valeur générale & complette de x, est $A.V + B.V'c^{-2gu\sqrt{-1}}$ & la valeur générale & complette de x', $A.Vc^{2gu\sqrt{-1}} + B.V'$. Donc puisque (art. IV. & V.) $x' =$ en général $k.V'$, & que $k = A\int \frac{duc^{-2mu}}{u^n.V'^2} + B$, il s'ensuit qu'on aura $A.Vc^{-2gu\sqrt{-1}} + B.V' = A.V'\int \frac{duc^{-2gu\sqrt{-1}}}{u^n V'^2} + B.V'$, & qu'ainsi $\int \frac{duc^{-2gu\sqrt{-1}}}{u^n.V'^2} = \frac{V}{V'}c^{-2gu\sqrt{-1}}$, plus une constante; intégrale qu'il eût peut-être été difficile de trouver directement.

VIII. De plus en faisant $2g\sqrt{-1} = 2k$, on aura par vos formules (Mém. de Turin. Tom. 3. p. 188) $V = Au^r(1 - ku + \alpha k^2u^2 - \beta k^3u^3 + \gamma k^4u^4$ etc.) & $V' = A'u^r(1 + ku + \alpha k^2u^2 + \beta k^3u^3 + \gamma k^4u^4$ etc.) A & A′ étant des constantes arbitraires, ou réelles ou imaginaires, ou mixtes. D'où il est aisé de voir que par l'art. précédent la valeur générale de z est $Au^rc^{gu\sqrt{-1}}(1 - ku + \alpha k^2u^2 - \beta k^3u^3 + \gamma k^4u^4$ etc.) $+ A'u^rc^{-gu\sqrt{-1}}(1 + ku + \alpha k^2u^2 + \beta k^3u^3 + \gamma k^4u^4$ etc.). Or $c^{gu\sqrt{-1}} = \cos gu + \sqrt{-1}\sin gu$, & $c^{-gu\sqrt{-1}} = \cos gu - \sqrt{-1}\sin gu$. Donc si on fait $A = M + N\sqrt{-1}$ & $A' = M' + N'\sqrt{-1}$, on aura à cause de $k = g\sqrt{-1}$, la valeur générale & complette de $z = u^r \cos gu\,(M + \alpha k^2Mu^2 + \gamma k^4Mu^4$ etc. $+ gNu + \beta g^3Nu^3$ etc. $+ M' + \alpha k^2M'u^2 + \gamma k^4M'u^4$ etc. $- gN'u - \beta g^3N'u^3$ etc.) $+ u^r \cos\sin gu\sqrt{-1}\,(N +$

αk^2

$\alpha k^2 N u^2 + \gamma k^4 N u^4$ etc. $- g M u - \beta g^3 M u^3$ etc. $+ N' + \alpha k^2 N' u^2 + \gamma k^4 N' u^4$ etc. $+ g M' u + \beta g^3 u^3 M'$ etc.) $+ u^r \sin u \sqrt{-1}\,(M + \alpha k^2 M u^2 + \gamma k^4 M u^4$ etc. $+ g N u + \beta g N u^3$ etc. $- M' - \alpha k^2 M' u^2 - \gamma k^4 M' u^4$ etc. $+ g N' u + \beta g N' u^3$ etc.) $+ u^r \sin u\,(- N - \alpha k^2 N u^2 - \gamma k^4 N u^4$ etc. $+ g M u + \beta g^3 M u^3$ etc. $+ N' - \alpha k^2 N' u^2 + g k^4 N' u^4$ etc. $+ g M' u + \beta g^3 M' u^3$ etc.). D'où il est évident que si $M' = M$ & $N' = - N$, l'intégrale sera délivrée d'imaginaires. Soit $M + M' = \delta \cos \omega$, $N - N' = \delta \sin \omega$, $M - M' = \delta' \cos \omega'$, $N + N' = \delta' \sin \omega'$, & on aura $z = u^r [\delta \cos (g u + \omega) + \delta' \sqrt{-1} \sin (g u + \omega')] (1 + \alpha k^2 u^2 + \gamma k^4 u^4$ etc.) $+ u^r [\delta \sin (g u + \omega) - \delta' \sqrt{-1} \times \cos (g u + \omega')] (g u + \beta g^3 u^3 +$ etc.). Cette intégrale complette renferme celle qu'a donnée M. *Euler* T. IX. des Mém. de Pétersb. p. 299. laquelle n'est complette que dans le cas où les imaginaires sont nuls, c. à d. où $\delta' = 0$.

IX. C'est ainsi qu'on aura l'intégrale générale & complette de l'équation $\frac{ddy}{dx^2} + g^2 y x^{2m} = 0$, dans le cas où $m = \frac{-2r'}{2r' \pm 1}$, r' étant un nombre entier positif; intégrale qui n'avoit point encore été donnée avec toute la généralité dont elle est susceptible. Il est clair qu'on auroit de même l'intégrale complette dans le cas où g^2 auroit le signe $-$, & qu'alors cette intégrale au lieu de $\sin g u$ & $\cos g u$, renfermeroit des exponentielles ordinaires c^{gu}.

X. Pour s'assurer maintenant *a priori* que les deux séries de l'art. I. reviennent à la même, & ne different qu'en ce qu'elles sont prises à contresens l'une de l'autre, il suffit de considérer 1°. que dans le cas de $r = 0$, on aura comme vous l'avez trouvé, $1 - n = 2r' + 1$, r' étant un nombre positif entier, à commencer par l'unité, d'où résulte $n = - 2r'$. Or dans ce cas la suite des expo-

sans

ſans dans l'autre ſérie eſt $-\frac{n}{2}$, $-\frac{n}{2}-1$, $-\frac{n}{2}-2$ etc.

d'où il eſt aiſé de voir que le dernier expoſant ſera $-\frac{n}{2}-r'=0$, que le précédent ſera $0+1$, le précédent $0+2$ etc. & que par conſéquent les expoſans des deux ſuites ſont les mêmes, pris à contre-ſens; d'où il réſulte que les coëfficiens doivent auſſi être les mêmes. 2°. Que dans le cas où $r=1-n$, on aura $1-n=-2r'+1$, r' étant un nombre entier poſitif à commencer de 1; que la ſuite des expoſans dans la 1re ſérie ſera $1-n$, $2-n$, $3-n$ etc. & dans la ſeconde $-\frac{n}{1}$, $-\frac{n}{2}-1, \ldots -\frac{n}{2}-r'+1$ $=-n+1$, qui eſt le 1er expoſant de la 1ere ſuite. Donc etc.

XI. Paſſons à d'autres objets. Je vous ai propoſé dans ma derniere Lettre un ſcrupule ſur l'identité ſuppoſée de deux équations dans le probleme des Tautochrones. Il ſemble que ce même ſcrupule peut avoir lieu dans d'autres cas, par exemple, dans l'équation de condition $-\frac{dA}{dy}+\frac{BdA}{dz}=-\frac{dB}{dx}+\frac{AdB}{dz}$, qui eſt, comme vous ſavez, néceſſaire pour rendre poſſible l'équation différentielle à 3 variables $dz+Adx+Bdy=0$. On ſuppoſe ordinairement que cette équation de condition eſt identique; mais eſt-il bien néceſſaire qu'elle le ſoit toujours & dans tous les cas? Ne ſuffiroit-il pas, & ne ſeroit-il pas poſſible (au moins en certains cas) qu'elle repréſentât l'équation finie entre x, y, z, dont l'équation $dz+Adx+Bdy=0$, repréſente la différentielle? Je ſais que l'intégrale abſolue & générale de cette équation renferme une conſtante arbitraire, & même deux, puiſqu'on peut ſuppoſer à y & à z telles valeurs initiales qu'on voudra lorſque $x=0$; je ſais que ces conſtantes arbitraires ne peuvent ſe trouver dans l'équation de condition $-\frac{dA}{dy}+$ etc.

&

& que par conséquent cette équation de condition ne peut être l'intégrale générale & absolue de l'équation différentielle proposée; mais je demande si en supposant une certaine valeur initiale à y, & à z, telles qu'elles doivent être pour que l'équation $-\frac{dA}{dy}+\frac{BdA}{dz}$ etc. ait lieu en supposant $x=0$; je demande, dis-je, s'il ne pourroit pas se faire que cette équation de condition donnât alors les autres points de la surface courbe, auquel cas il ne seroit pas nécessaire que cette équation fût identique?

XII. Je suppose d'abord pour plus de simplicité que A soit une fonction de x sans y ni z, & l'équation de condition se réduira à $\frac{dB}{dx}=\frac{AdB}{dz}$; donc 1°. supposant x constant ou $dx=0$, & mettant pour dz sa valeur $-Bdy$, on aura $\frac{ddB}{dxdy}-\frac{BddB}{dxdz}=\frac{AddB}{dzdy}-\frac{A.BddB}{dz^2}$; 2°. en supposant y constant ou $dy=0$, & mettant pour dz sa valeur $-Adx$, on aura $\frac{ddB}{dx^2}-\frac{AddB}{dxdz}=\frac{dAdB}{dxdz}+\frac{AddB}{dzdx}-\frac{AAddB}{dz^2}$. Ces deux équations doivent s'accorder l'une & l'autre avec l'équation de condition $\frac{dB}{dx}=\frac{AdB}{dz}$. Or cet accord ne me paroit pas impossible.

XIII. En effet supposons pour un moment $dA=0$, c'est à dire A constante, & de plus que B ne contienne point x; nous aurons en prenant x constant, $dz+Bdy=0$, équation qui appartient proprement à une ligne courbe; l'équation de condition sera $\frac{dB}{dz}=0$; que je ne regarde point ici comme une équation identi-

 que;

que; & en différentiant cette équation, on aura, après avoir mis pour dz sa valeur $-Bdy$, la nouvelle équation $\frac{BddB}{dz^2} - \frac{ddB}{dzdy} = 0$. Or, pour que cette équation s'accorde avec l'équation $\frac{dB}{dz} = 0$, soit imaginée en général une telle équation entre $\frac{dB}{dz}$ & $\frac{BddB}{dz^2} - \frac{ddB}{dzdy}$, qu'en supposant l'une de ces quantités $= 0$, l'autre soit aussi $= 0$, ce qui se peut faire très facilement en une infinité de manieres; & soit cherchée ensuite la valeur de B qui satisfait à cette équation; je dis que les deux équations $\frac{BddB}{dz^2} - \frac{ddB}{dzdy} = 0$ & $\frac{dB}{dz}$ s'accorderont ensemble; c'est ce qui arrivera, par exemple, si B est tel que $\frac{BddB}{dz^2} - \frac{ddB}{dzdy} = \frac{adB}{dz}$, a étant une constante quelconque, ou si $\frac{BddB}{dz^2} - \frac{ddB}{dzdy} = a\left(\frac{dB}{dz}\right)^m$, m étant un exposant positif quelconque, & ainsi du reste.

XIV. Je remarquerai en passant, quoique ceci n'ait point de rapport à la question présente, que l'équation $\frac{BddB}{dz^2} - \frac{ddB}{dzdy} = 0$ peut en général provenir de l'équation $\frac{dB}{dz} = a$, a étant une constante quelconque, & qu'ainsi l'équation $dz + Bdy = 0$ peut avoir pour intégrale $\frac{dB}{dz} - a = 0$ s'il y a entre $\frac{BddB}{dz^2} - \frac{ddB}{dzdy}$ & $\frac{dB}{dz} - a$ une telle équation que ces deux quantités puissent être

sup-

supposées zéro à la fois, & si on a une valeur de B qui satisfasse à cette équation.

XV. Je reviens aux équations à 3 variables, & à leur équation de condition, que je mets sous cette forme $\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx} + \frac{AdB - BdA}{dz} = o$; & supposant $A = Bu$, j'ai $\frac{d(Bu)}{dy} - \frac{dB}{dx} - \frac{BBdu}{dz} = o$. Si on différentie cette équation en faisant x constant, ou $dx = o$, & qu'on mette pour dz sa valeur $-Bdy$, on aura une équation qui contiendra deux inconnues B & u, avec leurs différences premieres & secondes, & que j'appelle (P). Si on différentie la même équation $\frac{d(Bu)}{dy}$ etc. $= o$ en supposant y constant, & en mettant au lieu de dz sa valeur $-Budx$, on aura de même une autre équation que j'appelle (Q). Il s'agit donc de savoir si les équations P & Q ne peuvent s'accorder, au moins en certains cas, avec l'équation $\frac{d(Bu)}{dy} - \frac{dB}{dx} - \frac{BBdu}{dz} = o$. Or comme il y a ici deux indéterminées B, & u, qui peuvent être des fonctions de x, y, z, & qu'il n'y a que deux équations, ou plutôt deux conditions à remplir, l'exemple de l'art. précédent où il n'y avoit qu'une condition & qu'une inconnue, me donne lieu de croire que l'accord dont il s'agit n'est pas impossible.

XVI. On pourroit demander s'il n'y a pas encore une autre condition à remplir, savoir qu'en faisant z constant, & mettant dans la différentielle de l'équation de condition $-udx$ au lieu de dy, la nouvelle équation qui en viendra, s'accorde avec l'équation de condition. Mais il est aisé de voir que cette nouvelle équation seroit la même qui résulteroit de l'addition des équations P, & Q, après avoir multiplié la 1ere par u. Ainsi il ne résulte réellement de là aucune condition nouvelle.

XVII. Au reste il est toujours facile de s'assurer dans chaque cas particulier si l'équation de condition entre x, y, z (supposée non identique) représente la surface courbe qui a pour équation différentielle $dz + Adx + Bdy = 0$. En effet qu'on différentie l'équation de condition, on aura $dz + A'dx + B'dy = 0$; il faudra donc qu'en faisant y constant, on ait $A' = A$, & par la même raison $B' = B$. Donc $A' - A = 0$ & $B' - B = 0$ doivent donner la même surface courbe que l'équation de condition; d'où il s'ensuit qu'en chassant une des inconnues (par exemple x) de l'équation $A' - A = 0$ & de l'équation de condition, on doit trouver une équation entre z & y, qui soit absolument identique; puisqu'autrement on auroit une équation à une ligne courbe, & non pas à une surface. Il ne faut pas même, quoique y soit supposée constante, que la résultante soit une simple équation en y, de laquelle z ait disparu, parce qu'il résulteroit de-là une valeur constante *particuliere* de y; au lieu qu'on suppose ici y constant & *quelconque*.

XVIII. Encore un mot sur le probleme des Tautochrones. J'ai supposé dans ma lettre précédente que l'équation entre t, u, x, étoit une équation algébrique & finie. Mais on peut supposer, pour plus de généralité, que ce soit une équation différentielle de cette forme $Adx + Bdt + Cdu = 0$, ou simplement $dt + Adx + Cdu = 0$. Or il faudra d'abord que cette équation soit assujettie à la condition qui rend de pareilles équations possibles. Il faudra, en 2^d lieu, qu'en faisant $u = 0$ & x telle qu'on voudra, on ait $t = 0$, & qu'en faisant $x = 0$ & u telle qu'on voudra, on ait $t =$ à une constante a, ou $t - a = 0$. Pour cela il faut qu'en faisant $u = 0$ dans l'équation $dt + Adx = 0$, on ait $t = 0$, quelle que soit x, & qu'en supposant $t - a = z$, & faisant $x = 0$ dans l'équation $dz + Cdu = 0$ (où l'on a substitué au lieu de t sa valeur $a + z$) on ait $z = 0$, quel que soit u. C'est ce qui aura lieu 1°. si en faisant $u = 0$ on a $A = 0$, & si en faisant $x = 0$, on a $C = 0$. 2°. Si en faisant $u = 0$, & $t = Bx^n$, & substituant pour t cette valeur, on trouve n négatif, & de même si en faisant x

$= 0$,

$= 0$, & $z = Bu^n$, & substituant pour z cette valeur, on a n négatif. En effet soit par exemple $dt + Ft^3 dx = 0$, je dis que si $t = 0$ lorsque $x = 0$, t sera $= 0$ quel que soit x; il n'en seroit pas de même si on avoit $dt + Fdx\sqrt{t} = 0$, car t pourroit être $= Ex^2$. On pourroit tirer de cette remarque beaucoup d'autres conséquences, dont je pourrai, Monsieur, vous faire part dans une autre occasion.

XIX. Soit maintenant substitué dans l'équation $dt + Adx + Cdu$, au lieu de dt sa valeur $-\frac{dx}{u}$ & au lieu de du sa valeur $-\frac{p\,dx}{u}$, nous aurons une équation algébrique & finie entre p, t, x, u, dans laquelle mettant pour p sa valeur $\xi + V$, (V étant une fonction donnée de u, & ξ une fonction inconnue de x,) on aura une équation entre t, x, u; différentions cette équation & mettons pour dt sa valeur $-\frac{dx}{u}$ & pour du sa valeur $-\frac{(\xi + V)\,dx}{u}$, nous aurons une nouvelle équation finie entre t, x, u, qui avec la précédente servira à chasser t; & on aura une équation entre x & u, qui étant supposée identique pourra servir en certains cas à déterminer ξ. Je dis, étant *supposée* identique; car, suivant ce que j'ai remarqué dans ma lettre précédente, il n'est pas démontré que cette identité soit absolument nécessaire dans tous les cas pour la solution. Je suis etc.

A Paris le 23 Juin 1769.

P. S. du 29 Juin 1769. En finissant cette Lettre, je reçois le I. Vol. de l'excellent Traité du *Calcul intégral* de M. *Euler*, & je vois que ce grand Géometre m'a déjà prévenu en partie sur les remarques que j'ai eu l'honneur de vous annoncer à la fin de l'art. XVIII. Je crois cependant qu'on peut encore à plusieurs égards étendre & perfectionner son travail sur ce sujet, & c'est en partie l'objet d'un Mémoire que je viens de donner à l'Académie des Sciences de Paris.



OBSERVATIONS

SUR LES

LES ÉQUATIONS D'UN DEGRÉ QUELCONQUE

PAR MR. LAMBERT.

§. 1.

Soit une équation d'un degré quelconque

$$0 = x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} \cdots\cdots\cdots + hx^2 + ix + k.$$

Qu'on fasse $x = y + z$

Et cette valeur étant substituée, on aura l'équation transformée

$$0 = y^m + my^{m-1}z + m.\frac{m-1}{2}y^{m-2}z^2 \cdots + m.\frac{m-1}{2}y^2z^{m-2} + myz^{m-1} + z^m$$

$$+ ay^{m-1} + (m-1)ay^{m-2}z \cdots + (m-1).\frac{m-2}{2}ay^2z^{m-3} + (m-1)ayz^{m-2} + az^{m-1}$$

$$+ by^{m-2} \cdots + (m-2)\frac{m-3}{2}by^2z^{m-4} + (m-2)byz^{m-3} + bz^{m-2}$$

etc. etc.

$$+ hy^2 + 2hyz + hz^2$$

$$+ iy + iz$$

$$+ k.$$

Cette équation mérite une théorie particuliere, qui devroit se trouver dans les Institutions élémentaires de l'Algebre, parce qu'elle offre des propriétés très remarquables, & qui valent la peine d'être exposées.

§. 2.

§. 2. Faisons pour cet effet

$$0 = y^m + Ay^{m-1} + By^{m-2} \cdots\cdots + Hy^2 + Iy + K,$$

& en comparant les termes, nous aurons les équations suivantes:

$$A = mz + a$$

$$B = m.\frac{m-1}{2}z^2 + (m-1)az + b$$

$$C = m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}z^3 + (m-1)\frac{(m-2)}{2}az^2 + (m-2)bz + c$$

etc.

$$H = m.\frac{m-1}{2}z^{m-2} + (m-1)\frac{m-2}{2}az^{m-3} + (m-2)\frac{(m-3)}{2}bz^{m-4} \cdots + h$$

$$I = mz^{m-1} + (m-1)az^{m-2} + (m-2)bz^{m-3} \cdots\cdots + 2hz + i$$

$$K = z^m + az^{m-1} + bz^{m-2} + \text{etc.} \cdots\cdots + hz^2 + iz + k.$$

§. 3. Toutes ces équations ont un certain nombre de facteurs simples de la forme

$$x + p$$

& ce nombre est égal au plus grand exposant de l'équation. Et comme on a le choix d'égaler à zéro un des coëfficiens A, B, C etc. quelconque, on voit que dans ce cas ces *facteurs* deviennent *racines*. C'est ce que j'observe ici, parce que je me servirai indifféremment de l'une & de l'autre de ces dénominations.

§. 4. C'est ainsi qu'en faisant $K = 0$, on aura l'équation

$$0 = z^m + az^{m-1} + bz^{m-2} \cdots\cdots + hz^2 + iz + k.$$

Et cette équation étant la même que celle que j'ai d'abord proposée, on voit qu'elle aura les mêmes racines. Et quand même on ne feroit pas $K = 0$, elle auroit ses facteurs $z + p$ semblables aux racines $x + p$ de l'équation proposée. La différence ne consiste qu'en ce qu'il est $x + p = 0$, au lieu qu'il ne sera $z + p = 0$, que lorsqu'on fait $K = 0$.

§. 5.

§. 5. Si donc il eſt

a = la ſomme des racines x,

b = la ſomme du produit des racines x priſes deux à deux,

c = la ſomme du produit des racines x priſes trois à trois,

etc.

je dirai de la même maniere à l'égard de l'équation K, qu'il eſt

a = la ſomme des facteurs p

b = la ſomme du produit de ces facteurs pris deux à deux,

c = la ſomme du produit de ces facteurs pris trois à trois.

etc.

Et je parlerai de la même façon des équations A, B, C .... H, I.

§. 6. Revenons donc à l'équation K: on ſait que

le nombre de ſes facteurs p eſt .... $= m$

le nombre des produits de ces facteurs pris deux à deux $= m . \frac{m-1}{2}$

le nombre des produits de ces fact. pris trois à trois $= m . \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3}$

etc.

Mais l'équation I qui précede immédiatement, étant inférieure d'un degré, tous ces nombres ſeront plus petits. Car

le nombre de ſes facteurs p' ſera .... $= (m-1)$

celui des produits de ces fact. pris deux à deux -- $= (m-1) . \frac{(m-2)}{2}$

celui des produits de ces fact. pris trois à trois -- $= (m-1) . \frac{m-2}{2} . \frac{m-3}{3}$

etc.

Or

Or il est dans l'équation . . . . K I

la somme des facteurs . . . . . . $= a$ . . . . . . $= \frac{m-1}{m} . a$

la somme des produits de deux à deux $= b$ . . . . . . $= \frac{m-2}{m} b$

la somme des produits de trois à trois $= c$ . . . . . . $= \frac{m-3}{m} c$

etc.

De là il suit que, dans l'équation I, ces sommes sont moins grandes que les sommes analogues dans l'équation K, & qu'elles sont moins grandes dans le même rapport que ne le sont les nombres des facteurs & des produits analogues dans les deux équations. Car il est

$$m : (m - 1) = a : \frac{m-1}{m} a$$

$$m . \frac{m-1}{2} : (m-1) . \frac{m-2}{2} = b : \frac{m-2}{m} b$$

$$m . \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3} : (m-1) \frac{m-2}{2} . \frac{m-3}{3} = c : \frac{m-3}{m} c$$

etc.

§. 7. Or les équations précédentes se forment chacune de celle qu'elle précede immédiatement, de la même maniere que l'équation I se forme de l'équation K. Donc ce que nous venons de faire voir à l'égard de ces deux dernieres équations s'étend généralement à toutes. C'est à dire:

1°. Dans chacune de ces équations, la somme de ses facteurs est en raison simple & directe du nombre de ces facteurs.

2°. La somme des produits des facteurs pris deux à deux est en raison simple & directe du nombre de ces produits.

3°. La somme des produits des facteurs pris trois à trois, quatre à quatre etc. est en raison simple & directe du nombre de ces produits.

§. 8. Ainsi, l'équation K étant mise pour base, comme aiant le plus de facteurs, & le plus de produits, les facteurs & les produits des autres équations se trouvent diminués dans le même rapport dans lequel il faudroit le faire si on vouloit prendre les termes moyens. Car il est clair que, pour prendre ces termes moyens, il faudroit diminuer la somme des racines dans le rapport du nombre des racines, & la somme de leurs produits pris deux à deux, trois à trois etc. dans le rapport du nombre de ces produits etc. Il auroit été difficile à prévoir, que toutes ces réductions se trouvent comme d'elles-mêmes en faisant pour une équation quelconque $x = y + z$.

§. 9. Mais il doit s'ensuivre encore que toutes ces racines elles-mêmes sont des termes moyens, de sorte p. ex. qu'en prenant les racines de l'équation K, dans l'ordre où elles sont successivement plus grandes, il doit tomber entre chacune des deux qui se suivent immédiatement une racine de l'équation I. Mais c'est encore peu de chose, tandis qu'il s'agira de faire voir que la possibilité des racines de la derniere équation K dépend de la possibilité des racines de toutes les équations précédentes, de sorte que si p. ex. la seconde équation $B = o$, a des racines imaginaires, les racines de $K = o$ ne sauroient plus être toutes réelles. Cela va même jusqu'au point que la solution générale de l'équation K dépend de la solution des équations de tous les degrés inférieurs, & nommément des équations B, C, D - - - H, I. C'est ce que je ferai voir dans la suite.

§. 10. Reprenons pour cet effet l'équation transformée

$$o = y^m + Ay^{m-1} + By^{m-2} \cdots\cdots + Hy^2 + Iy + K.$$

On sait que le dernier terme K est le produit de toutes les racines, & que le coëfficient I du pénultieme terme est la somme des produits de $m-1$ à $m-1$ racines. Si donc cette équation a deux racines éga-

égales, il s'enſuit qu'au moins une de ces racines entre dans chacun de ces produits, & que par conſéquent leur ſomme I ſera encore diviſible par une de ces racines. Or, K étant diviſible par l'une & l'autre, il eſt clair que cette racine ſera le commun diviſeur de K & I. De là il ſuit que les équations

$$K = z^m + az^{m-1} + \text{etc.} \cdots + hz^2 + iz + k$$
$$I = mz^{m-1} + (m-1)az^{m-2} \cdots + 2hz + i$$

doivent avoir un même facteur $Z + p$, lequel par conſéquent pourra être trouvé en poſant $K = I = 0$, & en procédant de la même maniere qu'on trouve les diviſeurs communs des nombres. Suppoſons p. ex.

$$0 = x^4 - 7x^3 + 21x^2 - 32x + 20,$$

& il s'agit de voir ſi cette équation a deux racines égales. Qu'on faſſe

$$x = y + z$$

& il ſera

$$\begin{aligned} 0 = y^4 &+ 4y^3z + 6y^2z^2 + 4yz^3 + z^4 \\ &- 7y^3 - 21y^2z - 21yz^2 - 7z^3 \\ &\qquad + 21y^2 + 42yz + 21z^2 \\ &\qquad\qquad - 32y - 32z \\ &\qquad\qquad\qquad + 20. \end{aligned}$$

Faiſant donc

$$K = 0 = z^4 - 7z^3 + 21z^2 - 32z + 20$$
$$I = 0 = 4z^3 - 21z^2 + 42z - 32$$

& on aura

$$Q = 4K - Iz = 0 = -7z^3 + 42z^2 - 96z + 80.$$

De plus

$$R = 7I + 4Q = 0 = 21z^2 - 90z + 96.$$

De là

$$S = 21I - 4Rz = 0 = -81z^2 + 498z - 672.$$

Et enfin

$$27R + 7S = 0 = 1056z - 2112$$

ce qui donne

$$0 = z - 2$$

qui est le facteur cherché, & en même tems la racine qui se trouve deux fois dans l'équation proposée

$$0 = x^4 - 7x^3 + 21x^2 - 32x + 20.$$

§. 11. On trouvera de même que, si l'équation

$$0 = x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} \cdots\cdots + hx^2 + ix + k$$

a n racines égales, l'équation K aura n facteurs égaux, & que l'équation I en aura $n - 1$, l'équation H en aura $n - 2$, que chaque équation antécédente en aura un de moins, & que cela continue jusqu'à l'équation qui n'en a plus qu'un seul. Il en sera de même si dans l'équation

$$0 = x^m + ax^{m-1} + \text{etc.}$$

il se trouve des racines égales de différente valeur. Ces racines pourront toujours être trouvées, & par là on pourra rabaisser l'équation jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de racines égales. Et si des racines égales de différentes valeurs il y a une même quantité, alors on trouve une équation qui les renferme toutes seules, & cette équation sera encore un facteur de l'équation proposée. Mais je ne m'arrêterai pas à cette recherche. Il suffit pour le présent d'avoir fait voir un usage assez considérable de l'équation transformée

$$0 = y^m - Ay^{m-1} + \text{etc.}$$

§. 12. Considérons maintenant l'équation

$$0 = x^m + ax^{m-1} + \text{etc.}$$

ou,

ou, ce qui revient au même, l'équation

$$K = 0 = z^m + az^{m-1} + \cdots + hz^2 + iz + k,$$

& supposons que toutes ses racines soient réelles & positives. Que ces racines soient z', z'', z''' etc. z^m, rangées en sorte que chacune soit plus grande que celle qui la précede. Il est clair que chacune de ces racines étant substituée dans l'équation, la rendra égale à zéro, mais que cela n'arrivera pas, toutes les fois qu'on substitue une quantité différente de ces racines, & qu'en retenant tous les coëfficiens de z, il faudra augmenter ou diminuer le dernier terme k. Nous supposerons donc généralement que ce dernier terme soit $= v$. Voyons ce qui résultera en augmentant successivement la valeur de z depuis o jusqu'à ce qu'il surpasse la plus grande d'entre les racines z^m. On voit donc d'abord, qu'en faisant $z = 0$, il sera $v = 0$, & par conséquent $v < k$. Et comme z' est supposée la plus petite d'entre les racines, on voit aussi qu'on pourra donner à z toutes les valeurs moindres que z', sans que v devienne $= k$, mais que pour toutes ces valeurs il sera $v < k$. Or, en faisant $z = z'$, on obtient $v = k$, & cela arrive de même en faisant $z = z''$, qui est la seconde des racines, de sorte qu'entre z' & z'' il n'y en a point d'autre. Il s'ensuit donc qu'en donnant à z une valeur quelconque intermédiaire entre z' & z'', on n'obtiendra pas $v = k$, mais qu'il sera $v > k$. Car, v aiant commencé à croitre jusqu'à $z = z'$, ce ne sera qu'après que z aura passé z', que v pourra recommencer à décroitre. Nous verrons d'abord sous quelle condition cela pourra arriver dans le cas même où $z = z'$. Or, comme pour chaque valeur de $z = z'$, z'', z''', z^{IV} etc. on obtient $v = 0$, on voit sans peine que

z tombant entre o	& z'	on aura	$v < k$
z'	- - z''	- - - -	$v > k$
z''	- - z'''	- - - -	$v < k$
z'''	- - z^{IV}	- - - -	$v > k$
etc.			

& que cela continue alternativement jusqu'à ce que z passera la plus grande racine z^m, où cette alternative cesse.

§. 13. Comme donc, en donnant à z toutes les valeurs qui tombent entre deux racines z^n, z^{n+1} qui se suivent immédiatement, la valeur de v croît & décroît, il s'ensuit qu'une même valeur de v répond toujours à deux valeurs de z, dont l'une est plus proche de z^n tandis que l'autre est plus proche de z^{n+1}. Il s'ensuit encore que ces deux valeurs coïncident, lorsque v après avoir crû recommence à décroitre, c'est à dire, lorsque v aura atteint la plus grande valeur qui soit possible entre $z = z^n$, & $z = z^{n+1}$, ou la plus petite dans le cas où v commence à décroitre. Ainsi chacune de ces plus grandes ou de ces plus petites valeurs de v, entre deux racines z^n, z^{n+1} quelconques, répond à deux valeurs de z coïncidentes.

§. 14. Or il se peut que, dans certains cas, une de ces plus grandes ou de ces plus petites valeurs de v se trouve égale à k. Car, pour avoir une semblable équation, on n'a qu'à donner à k une de ces valeurs. Mais, dans tous ces cas où une des plus grandes ou des plus petites valeurs de v est égale à k, les deux valeurs de z qui y répondent, & qui sont coïncidentes, seront des racines de l'équation proposée. D'où il suit que, dans ce cas, cette équation aura deux racines coïncidentes ou égales.

§. 15. Mais le nombre des plus grandes & des plus petites valeurs de v est $= - 1$, c'est à dire, égal au nombre d'intervalles qui se trouvent entre les racines z', z'', z''' - - - z^m. Donc c'est en $m - 1$ manieres que les plus grandes & les plus petites valeurs de v peuvent être $= k$, ou bien il y a $m - 1$ valeurs de k possibles, qui rendent deux racines de l'équation égales. Or nous avons vu (§. 10.) que toutes les fois que l'équation $K = 0$ a deux racines égales, une de ces racines se trouve encore dans l'équation $I = 0$. Et comme cela a lieu pour toutes les $m - 1$ valeurs de k, & que cette valeur n'entre point dans l'équation I, il s'ensuit que l'équation I renfer-

me

me toutes les valeurs de z, qui dans ces $(m - 1)$ cas peuvent dans l'équation K devenir des racines égales. Et comme l'équation I ne monte qu'au $(m - 1)$ degré, & que par conséquent elle n'a que $(m - 1)$ racines, il s'ensuit qu'elle n'offre ni plus ni moins que ces $(m - 1)$ valeurs de z, qui dans l'équation $K = 0$ répondent aux $(m - 1)$ plus grandes & plus petites valeurs de v.

§. 16. Or, toutes les fois que les racines z', z'', z''' etc. sont réelles, & qu'il n'y en a point d'égales, il y aura $(m - 1)$ cas réels, où la valeur de v devient la plus grande & la plus petite qu'elle puisse être entre deux racines z^n, z^{n+1}. Donc, toutes les fois que les racines z', z'', z''' etc. z^m sont toutes réelles, & qu'il n'y en a point d'égales, les racines de l'équation $I = 0$ seront nécessairement aussi réelles & différentes les unes des autres. Mais, si dans l'équation $K = 0$, il y a des racines égales, nous avons vu comment il y en aura aussi dans l'équation $I = 0$, & comment l'une & l'autre équation peut en être affranchie, & rabaissée à des degrés inférieurs. Ici il suffit qu'elles soient réelles dans l'équation $K = 0$, pour que nous en inférions qu'elles le sont aussi dans l'équation $I = 0$.

§. 17. Si donc, dans l'équation $I = 0$, il y a des racines imaginaires, il y en aura également dans l'équation $K = 0$. Car, si celles-ci étoient toutes réelles, celles-là le seroient également.

§. 18. Or les équations B, C, D - - - - H, dépendent chacune de celle qui la suit, de la même maniere que l'équation I dépend de l'équation K. Donc toutes leurs racines seront réelles dès que toutes les racines de l'équation K le sont. Et réciproquement, si dans une des équations B, C, D etc. - - H, quelconque il y a des racines imaginaires, il y en aura dans toutes celles qui la suivent.

§. 19. On voit de là comment dans l'équation proposée

$$0 = x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} - - - - - hx^2 + ix + k$$

la possibilité des racines dépend successivement des coëfficiens a, b, c, etc. C'est ainsi p. ex. que le coëfficient a peut être pris à volonté, puis-

puisque l'équation A est du premier degré. Mais, dès qu'on a donné à ce coëfficient une certaine valeur, on ne pourra plus donner au second coëfficient b une valeur quelconque. Car l'équation

$$B = 0 = m.\frac{m-1}{2}z^2 + (m-1)az + b$$

étant du second degré, on voit que b y peut avoir une valeur qui rende ses deux racines imaginaires, & alors il y aura des racines imaginaires dans toutes les équations suivantes C, D - - - - K. Mais, si on fait b négative, ou qu'on lui donne une valeur positive qui rende les racines de $B = 0$ possibles, on se trouvera de la même façon restreint à ne donner aux coëfficiens c, d - - - h, i, k que des valeurs qui se trouvent entre certaines limites. Car on voit aisément que, quand même toutes les racines de l'équation $I = 0$ sont réelles, elles ne donnent encore que les valeurs de z répondantes aux plus grandes & aux plus petites valeurs de v. Or il est très possible que le dernier terme k de l'équation K surpasse quelques unes des plus grandes, ou soit plus petit que quelques unes des plus petites valeurs de v, & il est clair qu'alors il y aura autant de paires de racines imaginaires, & cela indépendamment de la possibilité des racines de l'équation $I = 0$.

§. 20. Supposons maintenant qu'il s'agisse d'une formule qui exprime généralement toutes les racines de l'équation $K = 0$, il est clair qu'il faudra que cette formule renferme toutes les limites entre lesquelles doivent se trouver les coëfficiens b, c, d - - - h, i, k, pour que toutes les racines de $K = 0$ soient possibles, en sorte que lorsqu'entre ces racines il y en a d'impossibles, cette formule fasse voir combien il y en a, & pourquoi elles sont impossibles. Il faut qu'elle fasse voir, si elles ne dépendent que du coëfficient k; ou si elles dépendent de l'équation $I = 0$, ou de quelcune des équations antécédentes. Et voilà comment la solution générale d'une équation quelconque dépend de celles des équations de tous les degrés inférieurs, & comment la formule dont je viens de parler, doit tirer des

équa-

équations B, C, D - - - - H, I, les marques charactéristiques de la possibilité des racines de K = o.

§. 21. Comme dans l'équation K = o, il y a $(m-1)$ plus grandes & plus petites valeurs de v, il est question de savoir comment elles peuvent être trouvées. On voit bien que la voie qui s'offre le plus naturellement, seroit de résoudre l'équation I = o, afin d'avoir toutes les valeurs de z répondantes. Ces valeurs ensuite devroient être substituées chacune dans l'équation K = o, afin de trouver les valeurs de v. Cette voie n'est pas peu prolixe, mais il y a moyen de trouver une équation qui les renferme toutes. Car, en substituant v à la place du dernier terme k de l'équation K = o, cette équation aura deux racines égales, dont l'une se trouvera encore dans l'équation I = o. On n'aura donc qu'à traiter ces deux équations comme lorsqu'on cherche un facteur commun ,& on poussera l'opération jusqu'au résidu qui doit être = o. Ce résidu ne renfermera plus que les coëfficiens a, b, c - - - - i & l'inconnue v. Et toute réduction faite, on aura une équation du $(m-1)$ degré, laquelle par conséquent renfermera toutes les valeurs v qu'il s'agissoit de chercher.

§. 22. Soit p. ex. l'équation du troisieme degré

$$K = 0 = Z^3 + az^2 + bz + k$$

& il sera

$$I = 0 = 3z^2 + 2az + b.$$

Or, en posant v au lieu de k, ces deux équations auront une racine commune. Il sera donc

$$R = 3K - Iz = az^2 + 2bz + 3v = 0.$$

D'où il suit

$$S = 3R - aI = (6b - 2aa)z + (9v - ab) = 0$$

$$T = 3Sz - (6b-2aa)I = [3(9v-ab) - 2a(6b-2aa)]z - b(6b - 2aa) = 0.$$

Or, ces deux équations renfermant le même facteur, il doit être

$$z = \frac{9v - ab}{6b - 2aa} = \frac{b(6b - 2aa)}{3(9v - ab) - 2a(6b - 2aa)}.$$

D'où l'on obtient

$$(9v - ab)^2 - \frac{2a}{3}(6b - 2aa)(9v - ab) = \tfrac{1}{3}b(6b - 2aa)$$

équation qui renferme les deux valeurs de v qu'il s'agissoit de chercher.

§. 23. Voici encore une autre méthode. En retenant l'équation

$$I = o = z^2 + \tfrac{2}{3}az + \tfrac{1}{3}b$$

transposons l'équation K en sorte qu'il soit

$$v = z^3 + az^2 + bz.$$

Et comme pour une équation du 3e degré il n'y a que deux valeurs de v, faisons

$$o = v^2 + Av + B.$$

Or, en substituant dans cette équation la valeur de v, il sera

$$\begin{aligned} o = z^6 + 2az^5 &+ 2bz^4 \\ &+ aaz^4 + 2abz^3 + bbz^2 \\ &\quad + Az^3 + Aaz^2 + Abz + B. \end{aligned}$$

De cete équation on pourra soustraire les multiples suivans de l'équation $I = o$.

$$\begin{aligned} -Iz^4 &= -z^6 - \tfrac{2}{3}az^5 - \tfrac{1}{3}bz^4 \\ -CIz^3 &= \quad - Cz^5 - \tfrac{2}{3}Caz^4 - \tfrac{1}{3}bCz^3 \\ -DIz^2 &= \quad\quad - Dz^4 - \tfrac{2}{3}Daz^3 - \tfrac{1}{3}Dbz^2 \\ -EIz &= \quad\quad\quad - Ez^3 - \tfrac{2}{3}Eaz^2 - \tfrac{1}{3}Ebz \\ -FI &= \quad\quad\quad\quad - Fz^2 - \tfrac{2}{3}Faz - \tfrac{1}{3}Fb. \end{aligned}$$

Et

Et tous les termes pourront être faits = o. Par là on parviendra à déterminer les coëfficiens A, B, C, D, E, F, & l'équation

$$o = v^2 + Av + B$$

sera trouvée.

§. 24. On procédera de la même maniere pour une équation K = o d'un degré quelconque, & on parviendra à une équation

$$o = v^n + \alpha v^{n-1} + \mathfrak{G} v^{n-2} \text{ - - - - - - - - } + k.$$

Or cette équation se trouve à l'égard de la possibilité des racines dans le même cas que l'équation I = o. L'une & l'autre ont dans chaque cas particulier un même nombre de racines possibles ou impossibles. Et quel que soit le nombre des racines impossibles dans l'une ou l'autre de ces deux équations, l'équation K = o en aura tout au moins autant. Mais, lors même que toutes les racines v sont possibles, on n'aura qu'à en chercher la plus grande & la plus petite, pour voir si dans l'équation K il y a des racines impossibles qui dépendent de son dernier terme k. Car, toutes les fois que k ne tombe pas entre la plus grande & la plus petite racine v, on est assuré que l'équation K = o n'a qu'une seule racine possible, lorsqu'elle est d'une dimension impaire, & qu'elle n'en a que deux ou n'en a point, lorsqu'elle est d'une dimension paire. Mais, si k se trouve entre les limites de la plus grande & de la plus petite racine v, alors l'équation K = o aura tout au moins deux racines possibles de plus.



OBSERVATIONS

SUR

LES DIVISEURS DES ÉQUATIONS D'UN DEGRÉ QUELCONQUE

QUI PEUVENT ETRE TROUVÉS INDÉPENDAMMENT DE LA SOLUTION DES ÉQUATIONS.

PAR MR. LAMBERT.

§. 1.

La difficulté & le peu d'espérance de résoudre des équations d'un degré quelconque a porté les Analystes à examiner du moins la nature des équations & à rechercher différens moyens pour trouver les racines, lorsque certaines conditions en facilitoient le chemin. Tel étoit le cas où on peut présumer que quelque racine est rationelle, ou qu'il y en a deux ou plusieurs d'égales. Et encore, quand on ne peut pas savoir d'avance, si dans une équation qu'on se propose de résoudre, il se trouve de ces sortes de racines, on ne laisse pas du moins de faire une tentative, & il y a des cas où elle réussit. J'ai observé que surtout cette opportunité se rencontre dans les équations qui sont le résultat d'un *maximum* & d'un *minimum* qu'on cherche, & qu'il s'en présente aussi dans la théorie des combinaisons & dans différentes opérations qu'on fait à l'égard des suites infinies. Mais il s'en faut de beaucoup que les racines rationelles, & celles qui sont égales, soient les seules qui puissent être trouvées sans résoudre toute l'équation. Il y en a bien d'autres. Et comme dans les Institutions élémentaires de l'Algebre qui me sont connues, je ne me rappelle pas d'avoir rien vu, je vais exposer ici ce que j'ai trouvé en faisant là-dessus des re-

cher-

cherches. Je commencerai même par les racines rationelles. On sait qu'on ne les a cherchées qu'en tâtonnant, & que toutes les fois que l'équation en avoit plus d'une, il falloit trouver chacune séparément.

§. 2. Il y a cependant moien de remédier à ce double inconvénient. Pour cet effet il n'y a qu'à résoudre le dernier terme de l'équation en ses diviseurs. Ensuite on regarde chacun de ces diviseurs comme une racine d'une équation, qui sera d'un degré égal au nombre de ces diviseurs. Cette équation se formera sans peine. Or je dis que si l'équation proposée a une ou plusieurs racines rationelles, elle aura un diviseur commun avec l'équation formée des diviseurs de son dernier terme. Ce diviseur commun peut être trouvé sans peine, & il sera d'un degré égal au nombre des racines rationelles de l'équation proposée. Soit p. ex. l'équation

$$0 = x^5 - 8x^4 + 20x^3 - 22x^2 + 15x - 6.$$

Or les diviseurs du dernier terme sont 1, 2, 3, 6. Formant donc les racines

$$0 = x - 1 \qquad 0 = x - 3$$
$$0 = x + 1 \qquad 0 = x + 3$$
$$0 = x - 2 \qquad 0 = x - 6$$
$$0 = x + 2 \qquad 0 = x + 6$$

qui donnent

$$0 = x^2 - 1$$
$$0 = x^2 - 4$$
$$0 = x^2 - 9$$
$$0 = x^2 - 36,$$

on aura l'équation

$$0 = x^8 - 50x^6 + 553x^4 - 1800x^2 + 1296.$$

Cette équation se trouve avoir avec l'équation proposée le diviseur commun $0 = x^2 - 3x + 2$

dont les deux racines, pour être rationelles, doivent être 1, 2.

§. 3. Lorſque dans ce procédé on ſait d'avance que toutes les racines ſont poſitives, alors on n'a pas beſoin de prendre les diviſeurs du dernier terme négatifs. C'eſt ainſi que, dans l'exemple que je viens de propoſer, il eût ſuffi de prendre les diviſeurs poſitifs 1, 2, 3, 6, & d'en former l'équation

$$0 = x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 72x + 36.$$

§. 4. Lorſqu'il arrive que le dernier terme a un grand nombre de diviſeurs, on ſait qu'en augmentant ou en diminuant ſes racines d'une ou de pluſieurs unités, on peut réduire l'équation à une autre dont le dernier terme a le moins de diviſeurs qu'il ſera poſſible, juſques-là même que ſi l'équation propoſée n'a point de facteur rationel, on peut la changer de plus d'une maniere en ſorte que ſon dernier terme devient un nombre premier; ce qui n'arrivera pas toutes les fois que l'équation a un ou plus d'un facteur rationel, à moins qu'à l'exception d'un ſeul tous les autres ne ſoient égaux, ou qu'ils n'ayent au moins le dernier terme égal. Et même dans ce cas il eſt requis qu'en rabaiſſant ce terme à l'unité, le terme de l'autre facteur devienne nombre premier.

§. 5. J'obſerve encore qu'avant d'employer la méthode que je viens d'indiquer, on fait bien de voir ſi l'équation qu'on ſe propoſe n'a point de racines égales. Car, outre que ces racines peuvent être trouvées d'elles-mêmes, il eſt clair qu'elles augmenteroient le nombre des diviſeurs du dernier terme ſans néceſſité.

§. 6. Outre les cas où une ou pluſieurs racines ſont rationelles, il arrive fort ſouvent qu'une racine eſt la ſomme ou la différence d'une quantité rationelle, & d'une autre qui eſt ou irrationelle ou même imaginaire. C'eſt ce qui arrive toutes les fois que l'équation eſt diviſible par un facteur rationel du ſecond degré, mais dont les racines ne ſont point rationelles. Mais, lors même que ces racines ſont rationelles, ce facteur du ſecond degré pourra toujours être trouvé. Soit p. ex. l'équation

$$0 = x^3 - 5x^2 + 11x - 7.$$

Fai-

Faiſons $x = y + z$, & on aura

$$\begin{aligned} 0 = \; & y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 \\ & - 5y^2 - 10yz - 5z^2 \\ & + 11y + 11z \\ & - 7. \end{aligned}$$

Or, comme z peut également être priſe négative, cette équation ſe diviſe en deux parties

$$0 = y^3 - 5y^2 + 11y - 7 + (3y - 5)z^2$$
$$0 = (3y^2 - 10y + 11 + z^2)z.$$

La ſeconde de ces équations donne

$$- z^2 = 3y^2 - 10y + 11.$$

Et cette valeur étant ſubſtituée dans la premiere, on aura

$$0 = y^3 - 5y^2 + 9y - 6.$$

Or cette équation a la racine rationelle

$$0 = y - 2.$$

Et cette valeur étant ſubſtituée dans l'équation

$$- z^2 = 3y^2 - 10y + 11$$

donne

$$- z^3 = 3$$

d'où l'on tire

$$x = y + z = 2 \pm \sqrt{-3}.$$

On voit bien que dans ce procédé y ſignifie la moitié de la ſomme, & z la moitié de la différence de deux racines quelconques d'une équation. Si donc l'équation x eſt du m degré, on parviendra à une équation y du $m.(m-1):2$ degré, qui aura tout autant de racines rationelles, que l'équation x a de facteurs de la forme

$$0 = x^2 - px + q,$$

où il ſuffit que p ſoit rationel.

§. 7. Voici une autre maniere de résoudre ce probleme. Soit l'équation

$$o = x^m - a x^{m-1} + b x^{m-2} - \text{etc.}$$

Et en dénotant par $\int x^n$ la somme des puissances n des racines, on sait qu'il est

$$\int x = a$$
$$\int x^2 = a \int x - 2b$$
$$\int x^3 = a \int x^2 - b \int x + 3c$$
$$\int x^4 = a \int x^3 - b \int x^2 + c \int x - d$$

etc.

Or, en désignant par y la somme de deux racines quelconques, on aura l'équation

$$o = y^{m(m-1):2} - A y^{m(m-1):2-1} + \text{etc.}$$

Et il sera de même

$$\int y = A$$
$$\int y^2 = A \int y - 2B$$
$$\int y^3 = A \int y^2 - B \int y - 3C$$

etc.

& réciproquement

$$A = \int y$$
$$2B = A \int y - \int y^2$$
$$3C = B \int y - A \int y^2 + \int y^3$$
$$4D = C \int y - B \int y^2 - A \int y^3 - \int y^4$$

etc.

Or j'ai trouvé, en posant pour plus de briéveté

$$m . \frac{m-1}{2} = n$$

qu'il

qu'il est

$$\int y = (n-1)\int x$$
$$\int y^2 = (n-2)\int x^2 + \tfrac{2}{2}\int x . \int x$$
$$\int y^3 = (n-4)\int x^3 + 3\int x^2 . \int x$$
$$\int y^4 = (n-8)\int x^4 + 4\int x^3 . \int x + \tfrac{6}{2}\int x^2 . \int x^2$$
$$\int y^5 = (n-16)\int x^5 + 5\int x^4 . \int x + 10\int x^3 . \int x^2$$
$$\int y^6 = (n-32)\int x^6 + 6\int x^5 . \int x + 15\int x^4 . \int x^2 + \tfrac{20}{2}\int x^3 . \int x^3$$

etc.

& en général

$$\int y^p = -2^{p-1}\int x^p + \frac{n}{2}\int x^p + \frac{p}{2}\int x^{p-1}\int x + \frac{p}{2} . \frac{p-1}{2}\int x^{p-2}\int x^2$$
$$+ \frac{p}{2} . \frac{p-1}{2} . \frac{p-2}{3}\int x^{p-3}\int x^3 + \text{etc.}$$

Soit p. ex. l'équation

$$0 = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 18x + 9$$

on aura d'abord

$$\int x = 6 \qquad \int x^4 = 68$$
$$\int x^2 = 8 \qquad \int x^5 = 246$$
$$\int x^3 = 18 \qquad \int x^6 = 776.$$

Par là on trouve

$$\int y = 18 \qquad \int y^4 = 352$$
$$\int y^2 = 52 \qquad \int y^5 = 528$$
$$\int y^3 = 144 \qquad \int y^6 = 1472.$$

Et par là enfin

$$A = 18 \qquad D = 1276$$
$$B = 136 \qquad E = 1608$$
$$C = 552 \qquad F = 864;$$

ce qui donne

$$0 = y^6 - 18y^5 + 136y^4 - 552y^3 + 1276y^2 - 1608y + 864.$$

Cette équation se trouve avoir deux racines rationelles

$$0 = y - 2.$$

$$0 = y - 4,$$

ce qui pour l'équation proposée donne les deux facteurs

$$0 = x^2 - 2x + \mathrm{M}.$$

$$0 = x^2 - 4x + \mathrm{N}.$$

Or, pour trouver les derniers termes M, N, on n'a qu'à diviser l'équation

$$0 = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 18x + 9$$

par l'un de ces facteurs. Ainsi p. ex. en divisant

$$\begin{array}{c|l|c}
x^2 - 2x + \mathrm{M} & x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 18x + 9 & x^2 - 4x + 6 \\
\text{Diviseur} & -x^4 + 2x^3 - \mathrm{M}x^2 & -\mathrm{M} \\
\cline{2-2}
 & \quad -4x^3 + 14x^2 - 18x & \text{Quotient} \\
 & \qquad\quad -\mathrm{M}x^2 & \\
 & \quad +4x^3 - 8x^2 + 4\mathrm{M}x & \\
\cline{2-2}
 & \qquad +6x^2 - 18x + 9 & \\
 & \qquad -\mathrm{M}x^2 + 4\mathrm{M}x & \\
 & \qquad -6x^2 + 12x - 6\mathrm{M} & \\
 & \qquad +\mathrm{M}x^2 - 2\mathrm{M}x + \mathrm{M}2 & \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad -6x + 9 & \\
\text{Résidu} & \qquad\qquad +2\mathrm{M}x - 6\mathrm{M} & \\
 & \qquad\qquad\qquad + \mathrm{M}^2. &
\end{array}$$

Or chaque terme de ce résidu doit être $= 0$. De là on obtient

$$\mathrm{M} = 3.$$

Et

Et partant on aura en substituant cette valeur

le diviseur $o = x^2 - 2x + 3$,

le quotient $o = x^2 - 4x + 3$.

Et voilà les deux facteurs de l'équation proposée, qu'il s'agissoit de trouver. Le premier n'a point de racines rationelles. Le second en a deux, qui auroient pu être trouvées indépendamment de ce procédé. Mais ici je ne me suis servi de cette équation qu'en forme d'exemple.

§. 8. Comme de la façon que je viens d'indiquer on peut, de chaque équation x, en tirer une autre y telle que chaque racine y est la somme de deux racines x, je reprendrai l'équation

$$o = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 18x + 9.$$

Soient ses racines

$$o = x - \alpha$$
$$o = x - \beta$$
$$o = x - \gamma$$
$$o = x - \delta;$$

& il est clair qu'on aura pour y les six équations

$o = y - \alpha - \beta$ $o = y - \alpha - \gamma$ $o = y - \alpha - \delta$

$o = y - \gamma - \delta$ $o = y - \beta - \delta$ $o = y - \beta - \gamma$,

& partant les facteurs du second degré

$$o = y^2 - \alpha y + (\alpha + \beta) . (\gamma - \delta)$$
$$- \beta \ldots$$
$$- \gamma \ldots$$
$$- \delta \ldots$$

$$o = y^2 - \alpha y + (\alpha + \gamma) (\beta + \delta)$$
$$- \beta \ldots$$
$$- \gamma \ldots$$
$$- \delta \ldots$$

$$0 = y^2 - \alpha y + (\alpha + \delta)(\beta + \gamma)$$
$$- \beta \ldots$$
$$- \gamma \ldots$$
$$- \delta \ldots$$

Or le second terme de chacun de ces facteurs est la somme des racines de l'équation proposée, & partant $= 6$. De la sorte nous avons les trois facteurs

$$0 = y^2 - 6y + M'$$
$$0 = y^2 - 6y + M''$$
$$0 = y^2 - 6y + M'''$$

dont le produit doit être égal à l'équation

$$0 = y^6 - 18y^5 + 136y^4 - 552y^3 + 1276y^2 - 1608y + 864.$$

Or on voit aisément que les derniers termes M', M'', M''' peuvent être regardés comme des racines d'une équation cubique

$$0 = M^3 - \lambda M^2 + \mu M - \nu.$$

En multipliant donc les trois facteurs ensemble, le produit sera

$$\begin{aligned}0 = y^6 - 18y^5 + 108y^4 - 216\ y^3 + 36M'y^2 - 6M'M''.y + M'M''M''' \\ + M' \ldots - 12M' \ldots + 36M'' \ldots - 6M'M''' \ldots \\ + M'' \ldots - 12M'' \ldots + 36M''' \ldots - 6M''M''' \ldots \\ + M''' \ldots - 12M''' \ldots + M'M'' \ldots \\ + M'M''' \ldots \\ + M''M''' \ldots\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}0 = y^6 - 18y^5 + 108y^4 - 216y^3 + 36\lambda y^2 - 6\mu y + \nu \\ - \lambda \ldots - 12\lambda \ldots + \mu \ldots\end{aligned}$$

Donc

Donc en comparant les termes on aura

$$108 + \lambda = 136$$
$$216 + 12\lambda = 552$$
$$36\lambda + \mu = 1276$$
$$6\mu = 1608$$
$$\nu = 864.$$

D'entre ces égalités chacune des deux premieres donne $\lambda = 28$. La cinquieme $\nu = 864$, la quatrieme $\mu = 268$, & ces valeurs conviennent encore à la troisieme. Il sera donc

$$0 = M^3 - 28M^2 + 268M - 864.$$

Cette équation se trouve avoir la racine rationelle

$$0 = M - 8,$$

& encore les deux racines imaginaires

$$0 = M - 10 - \sqrt{} -$$
$$0 = M - 10 + \sqrt{} - 8,$$

de sorte que les trois facteurs sont

$$0 = y^2 - 6y + 8$$
$$0 = y^2 - 6y + 10 + \sqrt{} - 8$$
$$0 = y^2 - 6y + 10 - \sqrt{} - 8.$$

De là on tire les 6 valeurs de y

$$y = 2$$
$$y = 4$$
$$y = 3 \pm \sqrt{(-1 \pm \sqrt{-8})}$$

ou bien, toute réduction faite,

$$y = 2 \; \text{- - - -} = \alpha + \beta$$
$$y = 4 \; \text{- - - -} = \gamma + \delta$$
$$y = 2 + \sqrt{-2} = \alpha + \gamma$$
$$y = 4 - \sqrt{-2} = \beta + \delta$$
$$y = 4 + \sqrt{-2} = \alpha + \delta$$
$$y = 2 - \sqrt{-2} = \beta + \gamma.$$

D'où il suit

$$\gamma = 1$$
$$\delta = 3$$
$$\alpha = 1 + \sqrt{-2}$$
$$\beta = 1 - \sqrt{-2}.$$

Voilà donc les quatre racines qu'il s'agissoit de trouver.

§. 9. Lorsque l'équation x proposée est du 6[me] degré, l'équation y sera du 15[me]. Soient les racines

$$0 = x - \alpha \qquad 0 = x - \delta$$
$$0 = x - \beta \qquad 0 = x - \varepsilon$$
$$0 = x - \gamma \qquad 0 = x - \zeta,$$

on aura pour y les valeurs suivantes

$\alpha + \beta$	$\alpha + \gamma$	$\alpha + \delta$	$\alpha + \varepsilon$	$\alpha + \zeta$
$\gamma + \delta$	$\beta + \varepsilon$	$\beta + \zeta$	$\beta + \delta$	$\beta + \gamma$
$\varepsilon + \zeta$	$\delta + \zeta$	$\gamma + \varepsilon$	$\gamma + \zeta$	$\varepsilon + \delta$

Or la somme de celles de chaque colonne est la somme de toutes les racines x. Cela fait que l'équation y est résoluble en cinq facteurs du troisieme degré

o =

$$0 = y^3 - ay^2 + M'y - N'$$
$$0 = y^3 - ay^2 + M''y - N''$$
$$0 = y^3 - ay^2 + M'''y - N'''$$
$$0 = y^3 - ay^2 + M^{IV}y - N^{IV}$$
$$0 = y^3 - ay^2 + M^{V}y - N^{V}.$$

dont le ſecond terme eſt le même que celui de l'équation propoſée

$$0 = x^6 - ax^5 + bx^4 - \text{etc.}$$

§. 10. On trouvera de la même maniere, qu'une équation du 8me degré étant propoſée, l'équation y qui en réſulte, ſera réſoluble en 7 facteurs du quatrieme degré, qui auront au ſecond terme le même coëfficient que l'équation propoſée. Mais il s'en faut de beaucoup que les coëfficiens des autres termes ſe déterminent auſſi aiſément que je viens de le faire à l'égard de l'équation du 4me degré. Je paſſerai donc à conſidérer des facteurs d'une autre eſpece, & qu'on rencontre aſſez fréquemment.

§. 11. Lorſqu'une équation quelconque

$$0 = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

peut être diviſée par un facteur de la forme

$$0 = m + nx^2 + px^4 + qx^6 + \text{etc.}$$

où tous les expoſans ſont des nombres pairs, je dis que ce facteur peut toujours être trouvé. Pour cet effet on n'a qu'à partager l'équation en deux parties

$$0 = A + Cx^2 + Ex^4 + \text{etc.}$$
$$0 = Bx + Dx^3 + Fx^5 + \text{etc.}$$

& le facteur

$$0 = m + nx^2 + px^4 + qx^6 + \text{etc.}$$

ſera

ſera le diviſeur commun de chacune de ces deux parties. Car en regardant l'équation

$$o = A + Bx + Cx^2 + \text{etc.}$$

comme le produit de

$$o = m + nx^2 + px^4 + \text{etc.}$$

$$o = a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}$$

ce produit ſera la ſomme des deux produits ſuivans:

$$o = (a + cx^2 + ex^4 + \text{etc.}) \cdot (m + nx^2 + px^4 + \text{etc.})$$
$$+ x(b + dx^2 + fx^4 + \text{etc.}) \cdot (m + nx^2 + px^4 + \text{etc.}),$$

Or le premier de ces produits donne tous les expoſans pairs

$$A + Cx^2 + Ex^4 + \text{etc.}$$

& le ſecond tous les expoſans impairs

$$Bx + Dx^3 + Fx^5 + \text{etc.}$$

Et chacun eſt ſéparément $= o$, en ce qu'il a

$$o = m + nx^2 + px^4 + \text{etc.}$$

pour facteur.

§. 12. Ainſi p. ex. l'équation

$$o = x^6 - 5x^5 + 2x^4 + 20x^3 - 22x^2 - 10x + 12,$$

qu'on ſuppoſe avoir un facteur de dimenſions paires, ſe réſoud en

$$o = x^6 + 2x^4 - 22x^2 + 12$$

$$o = 5x^5 + 20x^3 - 10x.$$

Et ces deux équations aiant

$$o = x^4 - 4x^2 + 2$$

pour facteur commun, il eſt clair que ce facteur diviſera encore toute l'équation.

§. 13.

§. 13. Si donc une équation a deux racines égales, mais dont l'une est positive tandis que l'autre est négative, elles seront

$$0 = x + a$$
$$0 = x - a$$

Et le produit étant

$$0 = x^2 - a^2$$

& par conséquent un facteur de dimension paire, il est clair que, par la méthode que je viens d'indiquer, il peut être trouvé.

§. 14. Cette méthode s'étend encore à tous les facteurs de la forme

$$0 = m + nx^{\lambda} + px^{2\lambda} + qx^{3\lambda} + \text{etc.}$$

Soit p. ex. l'équation

$$0 = x^{10} - 2x^9 + 3x^8 - 7x^7 + 11x^6 - 9x^5 + 14x^4 - 19x^3 + 6x^2 - 8x + 10.$$

Qu'on la suppose avoir un facteur de la forme

$$0 = m + nx^3 + px^6 + \text{etc.}$$

Je dis qu'elle se partagera en trois parties

$$0 = x^{10} - 7x^7 + 14x^4 - 8x$$
$$0 = 2x^9 + 11x^6 - 19x^3 + 10$$
$$0 = 3x^8 - 9x^5 + 6x^2$$

qui auront ce facteur pour diviseur commun. Or ce diviseur commun se trouve être

$$0 = x^6 - 3x^3 + 2.$$

Il est donc clair qu'il divisera aussi toute l'équation.

§. 15. On pourra aussi se servir de cette méthode pour changer une équation en sorte qu'elle ait une racine positive égale à une racine négative. Soit p. ex. une équation du 4me degré

$$0 = x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d.$$

Qu'on ſuppoſe la ſomme de deux de ſes racines $= 2q$, & en faiſant

$$x = y + q$$

on aura

$$\begin{array}{llllll} 0 = y^4 & + 4qy^3 & + 6q^2y^2 & + 4q^3y & + q^4 \\ & - a \ldots & - 3aq \ldots & - 3aq^2 \ldots & - aq^3 \\ & & + b \ldots & + 2bq \ldots & + bq^2 \\ & & & - c \ldots & - cq \\ & & & & + d. \end{array}$$

Cette équation aura une racine poſitive égale à une négative. Il ne s'agit donc que de trouver la valeur de q. Or on voit bien que l'équation propoſée étant du quatrieme degré, ce ſera de 6 manieres différentes que ſes racines peuvent être priſes deux à deux, & que par conſéquent q ayant ſix valeurs, on parviendra à une équation du 6me degré. Pour la trouver, nous n'aurons qu'à partager l'équation y en deux parties conformément à ce que j'ai dit au §. 11. Il ſera donc

$$\begin{array}{lll} 0 = y^4 & + 6q^2.y^2 & + q^4 \\ & - 3aq \ldots & - aq^3 \\ & + b & + bq^2 \\ & & - cq \\ & & + d \end{array} = -y \left(\begin{array}{ll} 4qy^2 & + 4q^3 \\ -a \ldots & - 3aq^2 \\ & + 2bq \\ & - c \end{array} \right]$$

D'où l'on tire

$$-y^2 = \frac{4q^3 - 3aq^2 + 2bq - c}{4q - a}$$

& en ſubſtituant cette valeur, il ſera

$$0 = \left(\frac{4q^3 - 3aq^2 + 2bq - c}{4q - a}\right)^2 - (6q^2 - 3aq + b)\left(\frac{4q^3 - 3aq^2 + 2bq - c}{4q - a}\right) + q^4 - aq^3 + bq^2 - cq + d.$$

Ce

Ce qui, toute réduction faite, donne

$$\begin{array}{lllllllll} 0 = & 64q^6 & -96aq^5 & +48a^2q^4 & -32abq^3 & +8a^2bq^2 & -2a^2cq & +abc \\ & & & +32b\,.. & -8a^3\,.. & +4ac\,.. & +2ab^2\,.. & -c^2 \\ & & & & & +4bb\,.. & +8ad\,.. & -a^2d \\ & & & & & -16d\,.. & & \end{array}$$

Cette équation est assez singuliere en ce qu'en posant $a = 0$, elle se réduit à la forme cubique

$$\begin{array}{lllllll} 0 = 64q^6 & * & +32bq^4 & * & +4bbq^2 & * & -c^2 \\ & & & & -16d\,.. & & \end{array}$$

Or a étant le second terme de l'équation proposée, il est clair qu'il peut toujours être fait $= 0$. Et voilà ce qui rend les équations du quatrieme degré réduisibles à une équation du troisieme. J'observe ensuite qu'on peut faire $2q = r$, & il sera

$$\begin{array}{llllllll} 0 = & r^6 & -3ar^5 & +3a^2r^4 & -a^3r^3 & +acr^2 & -aacr & +abc \\ & & & +2b\,.. & -4ab\,.. & +2a^2b\,.. & +abb\,.. & -cc \\ & & & & & +bb\,.. & +4ad\,.. & -a^2d \\ & & & & & -4d\,.. & & \end{array}$$

ou en faisant $a = 0$

$$\begin{array}{lllll} 0 = r^6 & +2br^4 & +bbr^2 & -c^2 \\ & & -4d\,.. & \end{array}$$

Or r est la somme de deux racines de l'équation proposée. Si donc toutes les racines x sont réelles, il est clair que les six valeurs de r le seront aussi. Et s'il y a deux valeurs de x imaginaires, il y en aura quatre de r. Il en sera de même lorsque toutes les racines x sont imaginaires. Mais dans ce cas les quarrés de r auront des valeurs réelles. Car faisant

$$x = a \pm \sqrt{(a^2 - b)}$$

$$x = a \pm \sqrt{(a^2 - c)}$$

 on

on aura pour r les valeurs suivantes

$$r = + 2a$$
$$r = - 2a$$
$$r = + \sqrt{(a^2 - b)} + \sqrt{(a^2 - c)}$$
$$r = + \sqrt{(a^2 - b)} - \sqrt{(a^2 - c)}$$
$$r = - \sqrt{(a^2 - b)} + \sqrt{(a^2 - c)}$$
$$r = - \sqrt{(a^2 - b)} - \sqrt{(a^2 - c)}.$$

Or, en multipliant $\sqrt{-1} . \sqrt{+1}$, on a $\sqrt{-1}$

$$\sqrt{-1} . \sqrt{-1} \quad ---- \sqrt{+1}$$
$$\sqrt{+1} . \sqrt{+1} \quad ---- \sqrt{+1}.$$

Et par-là ce que je viens de dire s'établit sans difficulté. Donc, en faisant

$$rr = v,$$

l'équation

$$0 = v^3 + 2bv^2 + bbv - c^2$$
$$- 4dv$$

aura trois racines réelles, soit que toutes les racines x soient réelles, soit qu'il n'y en ait aucune qui le soit.

§. 16. Il y a encore une méthode fort générale pour toutes les équations qui ont un facteur d'un degré inférieur quelconque, mais dont tous les coëfficiens sont rationels. Ces sortes de facteurs peuvent toujours être trouvés. Pour indiquer cette méthode je me contenterai d'en faire l'application à une équation du quatrieme degré. Car pour les degrés plus élevés la méthode ne differe qu'en ce qu'elle devient plus prolixe. Soit donc p. ex. l'équation

$$0 = x^4 - 9x^3 + 25x^2 - 22x + 6;$$

il s'agit de voir si elle a un diviseur de la forme

$$x^2 - ax + b$$

de

de sorte que les coëfficiens a, b soient rationels. Pour cet effet on n'aura qu'à diviser l'équation par cette formule, & on trouvera le quotient

$$= x^2 - 9x + 25 \\ + ax - b \\ - 9a \\ + aa$$

& le résidu sera

$$= - 22x + 6 \\ + 9bx - 25b \\ - 2abx + bb \\ + 25ax + 9ab \\ - 9a^2x - a^2b \\ + a^3x.$$

Or, comme ce résidu doit être $= 0$, pour chacune des racines x, il est clair que l'un & l'autre terme devient séparément $= 0$. De là on aura

$$b = \frac{22 - 25a + 9a^2 - a^3}{9 - 2a}$$

&

$$0 = b^2 - b(25 - 9a + a^2) + 6$$

d'où l'on tire

$$0 = a^6 - 27a^5 + 293a^4 - 1629a^3 + 4873a^2 - 7407a + 4460$$

On n'aura donc qu'à voir si cette équation a une ou plus d'une racine rationelle. Or elle se trouve avoir les deux racines

$$0 = a - 4$$
$$0 = a - 5.$$

Et par là on trouve les valeurs répondantes de b

$$0 = b - 2$$
$$0 = b - 3.$$

Donc les facteurs feront

$$0 = x^2 - 4x + 2$$
$$0 = x^2 - 5x + 3.$$



DU

DU MOUVEMENT DES ABSIDES DES SATELLITES DE JUPITER.

PAR MR. L. EULER.

I.

En comparant le mouvement des Satellites de Jupiter avec celui de la Lune, il ſemble d'abord que celui-ci doit être aſſujetti à de plus grandes irrégularités que celui-là. La force du Soleil, qui agit ſur la Lune & en trouble le mouvement, qu'elle pourſuivroit en vertu de la force de la Terre, y tient un beaucoup plus grand rapport, que celui de la force dont le Soleil agit ſur les Satellites de Jupiter à celle de Jupiter même. Trois raiſons concourent à nous perſuader que le mouvement des Satellites de Jupiter doit être moins irrégulier que le mouvement de la Lune. La premiere eſt la grande maſſe du corps de Jupiter, laquelle ſurpaſſe environ 200 fois celle de la Terre; ſi donc les autres circonſtances étoient ſemblables, les dérangemens cauſés par la force du Soleil devroient être autant de fois plus petits dans les Satellites de Jupiter que dans la Lune. La ſeconde raiſon eſt la diſtance plus grande de Jupiter au Soleil; & il eſt certain que ſi la Terre ſe trouvoit à la diſtance de Jupiter, les inégalités dans le mouvement de la Lune ſeroient presque imperceptibles. La troiſieme raiſon eſt que la diſtance des Satellites au centre de Jupiter eſt plus petite que celle de la Lune au centre de la Terre, au moins par rapport à la groſſeur de cette planete; puiſque le quatrieme Satellite n'en eſt éloigné que de 25 demi-diametres de Jupiter, pendant que la diſtance de la Lune égale environ ſoixante demi-diametres de la Terre; & le premier Satellite n'en étant éloigné que de $5\frac{2}{3}$ demi-diametres de Jupiter, ſe trouve

ve même à une distance moindre que celle de la Lune à la Terre. D'où il s'ensuit que, selon le système commun d'attraction, le mouvement des Satellites de Jupiter devroit être beaucoup moins irrégulier que le mouvement de la Lune.

2. Aiant donc assez heureusement déterminé par la Théorie les inégalités du mouvement de la Lune, il semble que la même Théorie nous devroit découvrir les inégalités dans le mouvement des Satellites de Jupiter. Pour cet effet, nous n'aurions qu'à supposer 1°. la masse de la Terre environ 200 fois plus grande qu'elle n'est effectivement, 2°. sa distance au Soleil égale à celle de Jupiter, & 3°. la distance de la Lune à la Terre égale à celle de quelque Satellite au centre de Jupiter; alors le calcul tiré de la Théorie devroit donner toutes les inégalités du mouvement des Satellites. Or, en faisant cette application du calcul, on s'appercevra aisément que toutes les inégalités se réduiroient presque à rien, de sorte qu'il en faudroit conclure que le mouvement des Satellites, & surtout du premier, seroit presque entierement conforme aux loix découvertes par *Képler*. Le mouvement des absides, dont la détermination a été si embarassante pour la Lune, n'auroit presque plus de difficultés en faisant l'application aux Satellites de Jupiter, & le calcul montrera presque immobiles les lignes des absides de chaque Satellite, pendant que l'apogée de la Lune avance par an d'environ 40°. Il est vrai que les Satellites de Jupiter, entant qu'ils s'attirent mutuellement, doivent causer quelque dérangement dans leur mouvement, dont les lignes des absides se ressentent le plus sensiblement; mais, puisque les masses des Satellites sont fort petites par rapport à celle de Jupiter, & qu'ils ne s'approchent jamais tant entr'eux, que leur distance devienne assez petite par rapport à celle de Jupiter même, pour qu'il en résulte un effet considérable, il s'ensuit que l'action mutuelle ne sauroit être regardée comme une source considérable d'inégalité.

3. Nonobstant toutes ces raisons, je crois qu'on se tromperoit beaucoup, si l'on vouloit assurer que le mouvement des Satellites

tes

tes de Jupiter fût à peu près régulier, & que les anomalies qu'on y observe ne provinssent que de l'excentricité de leurs orbites & d'un petit mouvement de leurs absides. Les observations semblent plutôt prouver que le mouvement des Satellites, & particulierement du premier, qui, par les raisons alléguées, devroit être le plus régulier, est assujetti à quelques inégalités très considérables, qui se découvrent surtout dans un mouvement extrèmement rapide de la ligne des absides, qui surpasse même de beaucoup celui de l'apogée de la Lune. Cette circonstance, qui paroit d'abord contraire à l'hypothese de la gravitation universelle, en est plutôt une conséquence aussi nécessaire que remarquable, comme je le prouverai incontestablement par les recherches suivantes. En effet, il doit paroitre fort étrange que ce mouvement rapide des absides dans les orbites des Satellites de Jupiter se trouve en contradiction avec la Théorie sur laquelle le mouvement de la Lune est fondé, & qu'il soit néanmoins une suite nécessaire de la gravitation universelle: mais une seule considération levera tous les doutes. En déterminant le mouvement de la Lune on suppose que les corps célestes s'attirent mutuellement en raison réciproque du quarré de leurs distances, conformément à la loi générale suivant laquelle toutes les parties de la matiere agissent les unes sur les autres. Mais cette même loi ne sauroit avoir lieu dans les corps finis, qu'entant qu'ils sont sphériques, ou qu'ils ont leurs momens d'inertie égaux entr'eux. Donc le corps de la Terre n'étant pas parfaitement sphérique, la loi supposée en souffre bien quelque altération, mais qui n'est d'aucune conséquence dans le mouvement de la Lune. Or on sait que le corps de Jupiter differe très considérablement de la figure sphérique, & je ferai voir que cette circonstance altere la raison réciproque doublée des distances, au point que le phénomene mentionné en doit être produit.

4. Il faut donc bien remarquer que les corps célestes ne s'attirent mutuellement en raison réciproque quarrée des distances qu'entant que leurs corps peuvent être regardés comme sphériques, ou que leurs distances sont plusieurs fois plus grandes que leurs diametres.

C'est la raiſon pour laquelle, quoique la Terre ne ſoit pas ſphérique, il n'en réſulte aucune altération ſenſible à la diſtance de la Lune, qui ſurpaſſe trente fois le diametre de la Terre: or, ſi la Lune n'en étoit éloignée que de deux ou trois diametres, l'altération dans la loi d'attraction cauſeroit un mouvement aſſez ſenſible dans la ligne des abſides, bien que la figure de la Terre differe fort peu d'une ſphere parfaite. Mais le cas de Jupiter avec ſes Satellites eſt bien différent, le diametre de ſon équateur étant à l'axe de rotation comme 9 à 8, pendant que dans la Terre ce rapport n'eſt que de 201 à 200; d'où la loi d'attraction de Jupiter doit différer beaucoup plus conſidérablement de la raiſon réciproque quarrée des diſtances, & cela d'autant plus que la diſtance ſera plus petite. Outre cela, les diſtances des Satellites au centre de Jupiter ſont à proportion beaucoup plus petites que celle de la Lune à la Terre, attendu que le premier Satellite n'eſt éloigné du centre de Jupiter que de trois de ſes diametres, & le quatrieme encore moins que de treize. Ces deux circonſtances jointes enſemble cauſeront une aſſez grande altération dans la force attractive de Jupiter pour en produire une très conſidérable dans le mouvement de la ligne des abſides, ſurtout pour le premier Satellite, dont le mouvement devroit être le plus régulier, ſi le corps de Jupiter étoit ſphérique. Voilà donc une nouvelle ſource d'inégalités qu'on découvre dans le mouvement des corps céleſtes, & qu'on ne ſauroit expliquer par l'hypotheſe commune, où l'on ſuppoſe les forces réciproquement proportionelles aux quarrés des diſtances: mais cette même circonſtance ſert à porter le principe de l'attraction univerſelle au plus haut degré de certitude.

5. Pour mettre cela dans tout ſon jour, il faut commencer par chercher la force dont un corps non ſphérique agit ſur un autre corps ſitué à un endroit quelconque, en ſuppoſant que tous les élémens de matiere s'attirent mutuellement en raiſon réciproque quarrée des diſtances. J'ai déjà donné autrefois la ſolution de ce probleme, & ainſi je me contenterai d'en rapporter ici le réſultat. Soit donc I le centre d'inertie du corps dont nous cherchons la force attractive, & que les lignes Aa, Bb, Cc ſoient ſes trois axes principaux, ſelon les principes

Planche IX. Fig. 5.

pes de la connoissance mécanique des corps, que j'ai établis dans un Mémoire particulier. Que la lettre M exprime la masse entiere de ce corps, & que les momens d'inertie par rapport aux trois axes principaux respectivement soient Maa, Mbb, Mcc. Soit maintenant une molécule de matiere dans un lieu quelconque Z, où au lieu d'une molécule il est permis de supposer un corps sphérique quelconque, dont le centre soit en Z; & même une autre figure quelconque n'influeroit pas sensiblement sur la force dont ce corps est attiré vers le premier, de sorte que dans la suite ce corps nous puisse représenter les Satellites de Jupiter, pendant que le premier est pris pour le corps de Jupiter. Pour tenir compte du lieu de ce corps, qu'on abaisse de Z au plan formé par les deux axes principaux Aa, Bb la perpendiculaire ZY, & de Y à l'axe Aa prolongé à angles droits la droite YX. Qu'on nomme alors ces trois coordonnées $TX = x$, $XY = y$, & $YZ = z$, & outre cela la distance $IZ = v$, de sorte que $v = \sqrt{(xx + yy + zz)}$. Cela posé, la force dont le corps en I agit sur le corps en Z, se réduit à trois forces appliquées au point Z selon les directions $Z\alpha$, $Z\beta$, $Z\gamma$ paralleles aux trois axes principaux Aa, Bb, Cc, & posant N la masse du corps en Z, ces trois forces ont été trouvées

$$\text{force selon } Z\alpha = \frac{MNx}{v^5}\left(1 + \frac{3aa}{2vv}\left(3 - \frac{5xx}{vv}\right) + \frac{3bb}{2vv}\left(1 - \frac{5yy}{vv}\right) + \frac{3cc}{2vv}\left(1 - \frac{5zz}{vv}\right)\right)$$

$$\text{force selon } Z\beta = \frac{MNy}{v^3}\left(1 + \frac{3bb}{2vv}\left(3 - \frac{5yy}{vv}\right) + \frac{3cc}{2vv}\left(1 - \frac{5zz}{vv}\right) + \frac{3aa}{2vv}\left(1 - \frac{5xx}{vv}\right)\right)$$

$$\text{force selon } Z\gamma = \frac{MNz}{v^3}\left(1 + \frac{3cc}{2vv}\left(3 - \frac{5zz}{vv}\right) + \frac{3aa}{2vv}\left(1 - \frac{5xx}{vv}\right) + \frac{3bb}{2vv}\left(1 - \frac{5yy}{vv}\right)\right).$$

6. Dans

6. Dans ces formules, qu'une approximation a fournies, on suppose que la distance v est considérablement plus grande que les quantités a, b, c, de sorte que les termes négligés, qui sont divisés par de plus hautes puissances de v, ne soient d'aucune conséquence, d'où il semble que ces formules pourroient être défectueuses quand il s'agit des Satellites de Jupiter & surtout du premier où la distance v n'excede les quantités a, b, c qu'environ $9\frac{1}{2}$ fois. Mais il faut aussi remarquer que ces mêmes formules seroient tout à fait exactes, si les trois momens d'inertie Maa, Mbb, Mcc, étoient égaux entr'eux, d'où l'on comprend que plus ces momens approchent de l'égalité, moins ils s'écarteront de la vérité, quand même la distance v ne seroit pas assez considérable. Donc, puisque dans le corps de Jupiter les quantités a, b, c, ne s'écartent pas beaucoup de la raison d'égalité, l'erreur de nos formules deviendra tout à fait insensible, de sorte que quand même la distance v excéderoit moins de 9 fois les quantités a, b, c, il n'y auroit rien à craindre pour la justesse du calcul.

7. Si tous les trois momens principaux d'inertie du corps de Jupiter étoient inégaux entr'eux, il faudroit pour chaque instant connoitre la situation des trois axes pricipaux pour y rapporter le lieu du Satellite Z, & partant le mouvement de rotation de Jupiter entreroit dans le calcul. Mais, puisque l'inégalité de ces momens est causée par le mouvement de rotation, si nous supposons que Jupiter tourne autour de l'axe CIc, les deux autres axes Aa & Bb se trouveront dans le plan de son équateur où la force centrifuge étant partout la même, il faut conclure que les momens d'inertie par rapport à ces deux axes Aa & Bb sont égaux entr'eux, & la même égalité de momens aura aussi lieu pour tous les axes pris dans le plan de l'équateur. Il n'y aura donc plus de distinction entre les axes tirés dans le plan de l'équateur; & partant, pourvu que l'axe de rotation Cc conserve toujours la même direction, comme on peut le supposer, le plan de l'équateur déterminé par les axes Aa, Bb sera fixe, & les lignes Aa & Bb pourront être regardées comme fixes & indépendantes du mouvement de

de rotation; ce qui nous procure la commodité de rapporter le lieu des Satellites de Jupiter au plan de son équateur, en y prenant à volonté une ligne IA pour fixe, sans aucun égard au mouvement de rotation.

8. Ayant donc pour le corps de Jupiter $aa = bb$, les trois forces dont le Satellite en Z est sollicité seront exprimées ainsi:

$$\text{force selon } Z\alpha = \frac{MNx}{v^3}\left(1 + \frac{3aa}{2vv}\left(4 - \frac{5xx - 5yy}{vv}\right) + \frac{3cc}{2vv}\left(1 - \frac{5zz}{vv}\right)\right)$$

$$\text{force selon } Z\beta = \frac{MNy}{v^3}\left(1 + \frac{3aa}{2vv}\left(4 - \frac{5xx - 5yy}{vv}\right) + \frac{3cc}{2vv}\left(1 - \frac{5zz}{vv}\right)\right)$$

$$\text{force selon } Z\gamma = \frac{MNz}{v^3}\left(1 + \frac{3aa}{2vv}\left(2 - \frac{5xx - 5yy}{vv}\right) + \frac{3cc}{2vv}\left(3 - \frac{5zz}{vv}\right)\right).$$

Or, puisque $xx + yy = vv - zz$, ces formules se réduisent aux suivantes:

$$\text{force selon } Z\alpha = \frac{MNx}{v^3}\left(1 + \frac{3(cc-aa)}{2vv}\left(1 - \frac{5zz}{vv}\right)\right)$$

$$\text{force selon } Z\beta = \frac{MNy}{v^3}\left(1 + \frac{3(cc-aa)}{2vv}\left(1 - \frac{5zz}{vv}\right)\right)$$

$$\text{force selon } Z\gamma = \frac{MNz}{v^3}\left(1 + \frac{3(cc-aa)}{2vv}\left(3 - \frac{5zz}{vv}\right)\right)$$

d'où l'on voit que, si le corps de Jupiter étoit sphérique, ou $cc = aa$, ces

ces trois forces se réuniroient dans une seule suivant la direction ZI qui seroit $= \frac{MN}{uu}$, ou réciproquement proportionelle au quarré de la distance, comme on le suppose ordinairement. Mais il est aussi clair qu'entant que le corps de Jupiter n'est pas sphérique, la force dont il agit sur les Satellites s'écarte un peu de la raison réciproque du quarré des distances, & cela d'autant plus que le Satellite en est moins éloigné. Or, pour de grandes distances, cette aberration s'évanouit entierement.

9. Puisque cette aberration dépend de l'inégalité des quantités aa & cc, voyons à combien elle peut monter effectivement. Considérons donc le corps de Jupiter comme un sphéroïde applati, & soit f la moitié de son axe IC, & h le demi-diametre de son équateur IA $=$ IB. Cela posé, *Newton* a conclu par la rapidité du mouvement de rotation que $f : h = 8 : 9$, ou bien $f = \frac{8}{9}h$, en supposant le corps de Jupiter composé d'une matiere homogene. De là, si nous cherchons les momens d'inertie, nous trouvons

$$cc = \tfrac{2}{5}hh \quad \& \quad aa = bb = \tfrac{1}{5}(ff + hh)$$

donc $$cc - aa = \tfrac{1}{5}(hh - ff)$$

& partant $cc - aa = \frac{17}{405}hh$ ou $cc - aa = \frac{1}{24}hh$ à peu près. Or, puisque h est le demi-diametre de l'équateur de Jupiter, il est en même tems la mesure des distances moyennes des Satellites, & les Astronomes ont déterminé ces distances de cette sorte.

Distances moyennes au centre de Jupiter:

du premier Satellite	$=$	$5\frac{2}{3}h$
du second Satellite	$=$	$9\,h$
du troisieme Satellite	$=$	$14\frac{1}{3}h$
du quatrieme Satellite	$=$	$25\frac{1}{4}h$.

10. Je

10. Je n'ai pas ici dessein de déterminer exactement le mouvement des Satellites de Jupiter, mais je me propose uniquement d'en rechercher les inégalités qui doivent résulter de la figure non sphérique du corps de Jupiter. Dans cette vue je ne tiendrai compte, ni de la force du Soleil, ni de celle dont les Satellites agissent mutuellement les uns sur les autres: & partant je ne considérerai que les trois forces selon $Z\alpha$, $Z\beta$ & $Z\gamma$, dont chaque Satellite est sollicité par l'attraction de Jupiter. Supposons donc un Satellite quelconque en Z, dont le lieu est déterminé par les trois coordonnées $IX = x$, $XY = y$ & $XZ = z$.

Prenant l'élément du tems dt constant, le mouvement du Satellite sera déterminé par les trois équations suivantes

$$ddx = \frac{-2Mgx\,dt^2}{v^3}\left(1 + \frac{3(cc-aa)}{2vv}\left(1 - \frac{5zz}{vv}\right)\right)$$

$$ddy = \frac{-2Mgy\,dt^2}{v^3}\left(1 + \frac{3(cc-aa)}{2vv}\left(1 - \frac{5zz}{vv}\right)\right)$$

$$ddz = \frac{-2Mgz\,dt^2}{v^3}\left(1 + \frac{3(cc-aa)}{2vv}\left(3 - \frac{5zz}{vv}\right)\right)$$

où il faut remarquer que g est une telle constante que, si nous supposons la masse du Soleil $= L$, la distance moyenne de la Terre au Soleil $= e$, & l'angle que la Terre décrit autour du Soleil pendant le tems dt par son mouvement moyen $= d\zeta$, on aura $2g\,dt^2 = \frac{e^3 d\zeta^2}{L}$.

11. Donc, si au lieu de l'élément du tems dt, nous introduisons dans le calcul le mouvement moyen du Soleil $d\zeta$ qui répond à ce tems, & que nous posions le rapport de la masse de Jupiter M à celle du Soleil L comme 1 à n, nous aurons $M = nL$ & $2Mg\,dt^2 = ne^3 d\zeta^2$; nos équations différentio-différentielles pour le mouvement du Satellite seront:

ddx

$$ddx = \frac{-ne^3xd\zeta^2}{v^3}\left(1 + \frac{3(cc-aa)}{2vv}\left(1 - \frac{5zz}{vv}\right)\right)$$

$$ddy = \frac{-ne^3yd\zeta^2}{v^3}\left(1 + \frac{3(cc-aa)}{2vv}\left(1 - \frac{5zz}{vv}\right)\right)$$

$$ddz = \frac{-ne^3zd\zeta^2}{v^3}\left(1 + \frac{3(cc-aa)}{2vv}\left(3 - \frac{5zz}{vv}\right)\right).$$

Ou bien on pourra auſſi réduire ces déterminations au mouvement moyen du même Satellite, en poſant $n = 1$, & prenant e égale à la diſtance moyenne du Satellite au centre de Jupiter: alors ζ marquera l'angle décrit par le mouvement moyen, pendant un tems propoſé: & il faut ſe ſouvenir que le tems périodique de chaque Satellite qui répond à $\zeta = 360°$ eſt

pour le I. Satellite $= 1^j,\ 18^h,\ 27',\ 34''$
pour le II. Satellite $= 3^j,\ 13^h,\ 13',\ 42''$
pour le III. Satellite $= 7^j,\ 3^h,\ 42',\ 36''$
pour le IV. Satellite $= 16^j,\ 16^h,\ 32',\ 9''$.

12. Le cas le plus aiſé à réſoudre eſt ſans doute lorſque le Satellite ſe meut dans le plan de l'équateur de Jupiter, ou qu'il ſe trouve en Y. Alors, puiſque $z = 0$, nous aurons ces deux équations:

$$ddx = \frac{-ne^3xd\zeta^2}{v^3}\left(1 + \frac{3(cc-aa)}{2vv}\right)$$

$$ddy = \frac{-ne^3yd\zeta^2}{v^3}\left(1 + \frac{3(cc-aa)}{2vv}\right)$$

où $vv = xx + yy$. De là nous tirons premierement

$yddx - xddy = 0$ & partant $ydx + xdy = -Cd\zeta$.

Enſuite, à cauſe de $xdx + ydy = vdv$,

$$2dxddx + 2dyddy = \frac{-2ne^3dvd\zeta^2}{vv}\left(1 + \frac{3(cc-aa)}{2vv}\right)$$

dont

dont l'intégration fournit

$$dx^2 + dy^2 = 2ne^3 d\zeta^2 \left(D + \frac{1}{v} + \frac{(cc - aa)}{2v^3}\right).$$

Soit l'angle XIY $= \phi$ pour avoir $x = v \cos \phi$ & $y = v \sin \phi$ & partant $dx = dv \cos \phi - v d\phi \sin \phi$ & $dy = dv \sin \phi + v d\phi \cos \phi$; cette substitution nous conduit à ces deux équations

$$-vv d\phi = -C d\zeta \text{ \& } dv^2 + vv d\phi^2 = 2ne^3 d\zeta^2 \left(D + \frac{1}{v} + \frac{cc-aa}{2v^3}\right).$$

Posons $C = \sqrt{2ne^3 E}$ pour avoir $d\zeta = \frac{vv d\phi}{\sqrt{2ne^3 E}}$, & de là

$$dv^2 + vv d\phi^2 = \frac{v^4 d\phi^2}{E}\left(D + \frac{1}{v} + \frac{cc - aa}{2v^3}\right), \text{ ou}$$

$$\frac{dv^2}{v^4} = \frac{d\phi^2}{E}\left(D + \frac{1}{v} - \frac{E}{vv} + \frac{cc - aa}{2v^3}\right).$$

13. Introduisons l'anomalie vraie, qui soit $= s$, & posons $v = \frac{p}{1 + q \cos s}$, où par la nature de l'anomalie l'élément dv doit s'évanouir en posant tant $s = 0$ que $s = 180°$. Cette double condition donne

$$D + \frac{1 + q}{p} - \frac{E(1 + q)^2}{pp} + \frac{(cc - aa)(1+q)^3}{2p^3} = 0 \text{ \&}$$

$$D + \frac{1 - q}{p} - \frac{E(1 + q)^2}{pp} + \frac{(cc - aa)(1-q)^3}{2p^3} = 0$$

& en prenant tant la différence que la somme

$$\frac{2q}{p} - \frac{4Eq}{pp} + \frac{(cc - aa)(6q + 2q^3)}{2p^3} = 0$$

$$2D + \frac{2}{p} - \frac{2E(1+qq)}{pp} + \frac{(cc-aa)(1+3qq)}{p^3} = 0.$$

Au lieu de chercher de là les quantités p & q, déterminons en plutôt les constantes D & E, que nous trouverons

$$E = \tfrac{1}{2}p + \frac{(cc-aa)(3+qq)}{4p} \quad \&$$

$$D = -\frac{1+qq}{2p} + \frac{(cc-aa)(1-qq)^2}{4p^3}.$$

Par ces substitutions notre équation prendra cette forme

$$\frac{dv^2}{v^4} = \frac{d\Phi^2}{E} \cdot \frac{qq \sin s^2}{2p}\left(1 + \frac{cc-aa}{2pp}(-3 - 2q\cos s + qq)\right)$$

$$\text{donc } \frac{dv}{vv} = \frac{q\,d\Phi \sin s}{\sqrt{2Ep}} \sqrt{\left(1 - \frac{(cc-aa)(3+2q\cos s - qq)}{2pp}\right)}$$

$$\& \quad d\zeta = \frac{vv\,d\Phi}{\sqrt{2ne^3E}} \quad \text{ou} \quad d\Phi = \frac{d\zeta\sqrt{2ne^3E}}{vv}.$$

14. De là il est clair que les quantités p & q sont constantes, dont celle-là marque le demi-parametre de l'orbite & celle-ci l'excentricité. Donc, puisque $\frac{dv}{vv} = \frac{q\,ds \sin s}{p}$, nous aurons

$$ds = \frac{p\,d\Phi}{\sqrt{2Ep}} \sqrt{\left(1 - \frac{(cc-aa)(3+2q\cos s - qq)}{2pp}\right)}, \quad \text{ou bien}$$

$$d\Phi = \frac{ds\sqrt{(pp + \frac{1}{2}(cc-aa)(3+qq))}}{\sqrt{(pp - \frac{1}{2}(cc-aa)(3+2q\cos s - qq))}}.$$

Or nous avons vu que $cc - aa = \frac{1}{24}hh$, prenant h pour le demi-diametre de l'équateur de Jupiter, & partant nous aurons assez exactement

$$d\Phi = ds\left(1 + \frac{(cc-aa)(3+q\cos s)}{2pp}\right).$$

d'où

d'où nous tirons par l'intégration

$$\Phi = \text{Conft.} + \left(1 + \frac{3(cc - aa)}{2pp}\right)s + \frac{(cc - aa)\, q \,\text{fin}\, s}{2pp}.$$

Suppofons que le Satellite ait paffé par l'endroit où il eft le plus proche de Jupiter; il s'en éloignera le plus qu'il eft poffible après avoir parcouru l'angle $\Phi = \left(1 + \frac{3(cc - aa)}{2pp}\right) 180°$, & il ne retournera à l'endroit le plus proche qu'après avoir parcouru l'angle $= \left(1 + \frac{3(cc - aa)}{2pp}\right) 360°$.

15. Ici il faut confidérer que $\Phi - s$ exprime la longitude de la ligne des abfides, de forte que nous ayons en regardant feulement le mouvement moyen

$$\Phi - s = \text{Conft.} + \frac{3(cc - aa)}{2pp}\, s$$

ou $\Phi - s = \text{Conft.} + \frac{3(cc - aa)}{2pp + 3(cc - aa)}\, \Phi.$

Donc, pendant une révolution entiere du Satellite, où $\Phi = 360°$, les abfides avanceront par un angle

qui eft $= \frac{3(cc - aa)}{2pp + 3(cc - aa)}\, 360°$,

& pofant maintenant $cc - aa = \frac{1}{24} hh$, cet avancement périodique fera $= \frac{hh}{8pp + hh} \cdot 360°$, où p exprime à peu près la diftance moyenne du Satellite au centre de Jupiter.

16. Appliquons cette formule à chaque Satellite féparément, & pour le premier Satellite ayant $p = 5\frac{2}{3} h$ & partant $8pp =$

$$2D + \frac{2}{p} - \frac{2E(1+qq)}{pp} + \frac{(cc-aa)(1+3qq)}{p^3} = 0.$$

Au lieu de chercher de là les quantités p & q, déterminons en plutôt les constantes D & E, que nous trouverons

$$E = \tfrac{1}{2}p + \frac{(cc-aa)(3+qq)}{4p} \quad \&$$

$$D = -\frac{1+qq}{2p} + \frac{(cc-aa)(1-qq)^2}{4p^3}.$$

Par ces substitutions notre équation prendra cette forme

$$\frac{dv^2}{v^4} = \frac{d\Phi^2}{E} \cdot \frac{qq \sin s^2}{2p}\left(1 + \frac{cc-aa}{2pp}(-3-2q\cos s+qq)\right)$$

donc $\dfrac{dv}{vv} = \dfrac{q\,d\Phi \sin s}{\sqrt{2Ep}}\sqrt{\left(1 - \dfrac{(cc-aa)(3+2q\cos s-qq)}{2pp}\right)}$

& $d\zeta = \dfrac{vv\,d\Phi}{\sqrt{2ne^3E}}$ ou $d\Phi = \dfrac{d\zeta\sqrt{2ne^3E}}{vv}$.

14. De là il est clair que les quantités p & q sont constantes, dont celle-là marque le demi-parametre de l'orbite & celle-ci l'excentricité. Donc, puisque $\dfrac{dv}{vv} = \dfrac{q\,ds \sin s}{p}$, nous aurons

$$ds = \frac{p\,d\Phi}{\sqrt{2Ep}}\sqrt{\left(1 - \frac{(cc-aa)(3+2q\cos s-qq)}{2pp}\right)}, \quad \text{ou bien}$$

$$d\Phi = \frac{ds\sqrt{(pp + \tfrac{1}{2}(cc-aa)(3+qq))}}{\sqrt{(pp - \tfrac{1}{2}(cc-aa)(3+2q\cos s-qq))}}.$$

Or nous avons vu que $cc-aa = \frac{1}{24}hh$, prenant h pour le demi-diametre de l'équateur de Jupiter, & partant nous aurons assez exactement

$$d\Phi = ds\left(1 + \frac{(cc-aa)(3+q\cos s)}{2pp}\right).$$

d'où

d'où nous tirons par l'intégration

$$\phi = \text{Conſt.} + \left(1 + \frac{3(cc - aa)}{2pp}\right)s + \frac{(cc - aa)\, q \sin s}{2pp}.$$

Suppoſons que le Satellite ait paſſé par l'endroit où il eſt le plus proche de Jupiter; il s'en éloignera le plus qu'il eſt poſſible après avoir parcouru l'angle $\phi = \left(1 + \frac{3(cc - aa)}{2pp}\right)180°$, & il ne retournera à l'endroit le plus proche qu'après avoir parcouru l'angle $= \left(1 + \frac{3(cc - aa)}{2pp}\right)360°$.

15. Ici il faut conſidérer que $\phi - s$ exprime la longitude de la ligne des abſides, de ſorte que nous ayons en regardant ſeulement le mouvement moyen

$$\phi - s = \text{Conſt.} + \frac{3(cc - aa)}{2pp}\, s$$

ou $\phi - s = \text{Conſt.} + \frac{3(cc - aa)}{2pp + 3(cc - aa)}\, \phi.$

Donc, pendant une révolution entiere du Satellite, où $\phi = 360°$, les abſides avanceront par un angle

qui eſt $= \frac{3(cc - aa)}{2pp + 3(cc - aa)}\, 360°$,

& poſant maintenant $cc - aa = \frac{1}{24}hh$, cet avancement periodique ſera $= \frac{hh}{8pp + hh} \cdot 360°$, où p exprime à peu près la diſtance moyenne du Satellite au centre de Jupiter.

16. Appliquons cette formule à chaque Satellite ſéparément, & pour le premier Satellite ayant $p = 5\frac{2}{3}h$ & partant $8pp =$

257hh, ses absides avanceront pendant chaque révolution ou dans l'espace de 1^j. 18^h, 27$'$, 34$''$, par l'angle

$$\tfrac{1}{338} \cdot 360^\circ = 1^\circ.\ 23',\ 48''$$

d'où l'on conclut le mouvement pour un an entier de 288°.

Pour le second Satellite ayant $p = 9h$ & $8pp = 648hh$, ses absides avanceront pendant chaque révolution, ou dans l'espace de 3^j. 13^h, 13$'$, 42$''$, par l'angle

$$\tfrac{1}{649} \cdot 360^\circ = 33',\ 17''$$

& partant pendant un an entier par 57°, 3$'$.

Pour le troisieme Satellite nous avons $p = 14\tfrac{1}{3}h$, donc $8pp = 1643$, & partant ses absides avanceront pendant chaque révolution, qui est de 7^j, 3^h, 42$'$, 36$''$, par l'angle

$$\tfrac{1}{1644} \cdot 360^\circ = 13',\ 8''$$

& partant pendant un an entier par 11°. 10$'$.

Pour le quatrieme Satellite ayant $p = 25\tfrac{1}{4}h$, & $8pp = 5100$, ses absides avanceront pendant chaque révolution, qui est de 16^j, 16^h, 32$'$, 9$''$, par l'angle

$$\tfrac{1}{5101} \cdot 360^\circ = 4',\ 14''$$

donc pendant un an entier par 1°, 32$'$, 40$''$.

17. Quoique nous n'ayons pas assez de certitude sur le degré d'applatissement du corps de Jupiter, & qu'une petite erreur puisse très considérablement altérer ces déterminations, il est toujours certain que le mouvement des absides, qui est produit par cette cause, doit être très rapide, surtout pour le premier Satellite, dont les absides avancent chaque année par 288°. Cette rapidité devroit produire un effet bien étrange, si l'orbite de ce Satellite n'étoit pas à peu près circulaire, car, dans le cas où l'orbite est circulaire, ou $q = 0$, le mouvement ne laisse pas d'être uniforme, tout comme dans l'hypothese ordi-

ordinaire, & l'applatissement du corps de Jupiter n'y produira aucun dérangement. Mais dès que l'orbite d'un Satellite a une excentricité assez considérable, ce mouvement des absides doit causer de grandes irrégularités dans le mouvement du Satellite, & on n'en sauroit calculer les apparitions, à moins qu'on n'ait une exacte connoissance de cet élément. Il est aussi bien remarquable que ce mouvement des absides diminue si subitement pour de plus grandes distances, de sorte que s'il y avoit un Satellite éloigné du centre de Jupiter de 60 demi-diametres, le mouvement des absides seroit presque imperceptible, au lieu que les autres causes qui font avancer les absides produisent un effet tout à fait contraire.

18. Mais voyons aussi comment le vrai lieu du Satellite peut être déterminé; pour cet effet on n'a qu'à chercher l'anomalie vraie s pour un tems proposé quelconque, & indiqué par l'angle ζ qui lui est proportionnel. Or ayant trouvé

$$d\Phi = \frac{d\zeta\sqrt{2ne^3E}}{vv} = \frac{d\zeta(1+q\cos s)^2\sqrt{ne^3}(pp+\frac{1}{2}(cc-aa)(3+qq))}{pp\sqrt{p}}$$

& aussi $d\Phi = \dfrac{ds\sqrt{(pp+\frac{1}{2}(cc-aa)(3+qq))}}{\sqrt{(pp-\frac{1}{2}(cc-aa)(3+2q\cos s-qq))}}$

le rapport entre ζ & s sera exprimé par cette équation

$$d\zeta = \frac{pp\sqrt{p}}{\sqrt{ne^3}} \cdot \frac{ds}{(1+q\cos s)^2\sqrt{(pp-\frac{1}{2}(cc-aa)(3+2q\cos s-qq))}}$$

laquelle, à cause de $cc-aa$ très petit par rapport à pp, se réduit à

$$d\zeta = \frac{\sqrt{p^3}}{\sqrt{ne^3}} \cdot \frac{ds}{(1+q\cos s)^2}\left(1+\frac{(cc-aa)(3+2q\cos s-qq)}{4pp}\right)$$

pour l'équation de laquelle on a

$$\int\frac{ds}{(1+q\cos s)^2} = \frac{1}{(1-qq)^{\frac{3}{2}}}A\,n\cos\frac{q+\cos s}{1+q\cos s} - \frac{q\sin s}{(1+qq)(1+q\cos s)} \;\&$$

$$\int \frac{ds \cos s}{(1+q\cos s)^2} = \frac{\sin s}{(1-qq)(1+q\cos s)} - \frac{q}{(1-qq)^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{A}n\cos\frac{q+\cos s}{1+q\cos s}$$

d'où l'on trouve

$$\zeta\sqrt{\frac{ne^3}{p^3}} = \mathrm{Const.} + \frac{1}{(1-qq)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{A}n\cos\frac{q+\cos s}{1+q\cos s} - \frac{q\sin s}{(1-qq)(1+q\,\mathrm{c}.\,s)}$$

$$+ \frac{3(cc-aa)}{4pp\sqrt{(1-qq)}}\,\mathrm{A}n\cos\frac{q+\cos s}{1+q\cos s} - \frac{(cc-aa)q\sin s}{\mathrm{A}pp(1+q\,\mathrm{c}.\,s)}.$$

Ensuite posant la longitude de l'abside pour le tems proposé $= \eta$, on aura la longitude du Satellite

$$\phi = \eta + s + \frac{(cc-aa)\,q\sin s}{2pp}.$$

19. Puisque l'excentricité q est très petite, le calcul se fait plus commodément par approximation. Ayant donc

$$\frac{1}{(1+q\cos s)^2} = \frac{1}{(1-qq)^{\frac{3}{2}}}\left(1 - 2q\cos s + \tfrac{3}{2}qq\cos 2s - q^3\cos 3s\right).$$

Si nous posons $\frac{p}{1-qq} = r$, de sorte que r signifie le demi-axe de l'orbite, & pour abréger $\frac{cc-aa}{4pp} = m$, nous aurons

$$d\zeta = \frac{\sqrt{r^3}}{\sqrt{ne^3}}\cdot ds\left\{\begin{array}{l} 1 - 2q\cos s + \tfrac{3}{2}qq\cos 2s - q^3\cos 3s \\ + m(3-qq) - 2mq(3-qq)\,\mathrm{c}.\,s + \tfrac{3}{2}mqq\,\mathrm{c}.\,2s - 3mq^3\,\mathrm{c}.\,3s \\ - 2mqq + 2mq\cos s - 2mqq\,\mathrm{c}.\,2s + \tfrac{3}{2}mq^3\,\mathrm{c}.\,3s \\ + \tfrac{3}{2}mq^3\cos s \end{array}\right.$$

ou bien

$$d\zeta\sqrt{\frac{ne^3}{r^3}} = ds\left(\begin{array}{l} 1 + 3m(1-qq) - 2q\cos s + \tfrac{3}{2}qq\cos 2s - q^3\cos 3s \\ - 4mq(1-\tfrac{7}{8}qq)\,\mathrm{c}.\,s + \tfrac{1}{2}mqq\,\mathrm{c}.\,2s - \tfrac{3}{2}mq^3\,\mathrm{c}.\,3s \end{array}\right)$$

donc

donc prenant les intégrales

$$\zeta\sqrt{\frac{ne^3}{r^3}} = s(1+3m(1-qq)) - 2q\sin s + \tfrac{3}{4}qq\sin 2s - \tfrac{1}{3}q^3\sin 3s$$
$$-4mq\sin s + \tfrac{3}{4}mqq\sin 2s - \tfrac{1}{2}mq^3\sin 3s$$

ou bien à peu près

$$\frac{\zeta}{1+3m}\sqrt{\frac{ne^3}{r^3}} = s - \frac{2(1+2m)}{1+3m}q\sin s + \frac{(3+5m)}{4(1+3m)}qq\sin 2s - \frac{(2+3m)}{6(1+3m)}q^3\sin 3s$$

ou $\frac{\zeta}{1+3m}\sqrt{\frac{ne^3}{r^3}}$ peut être regardée comme l'anomalie moyenne, qui croît uniformément avec le tems; si nous la posons $= \tau$ nous aurons:

$$\tau = s - \frac{2(1+2m)}{1+3m}q\sin s + \frac{(3+5m)}{4(1+3m)}qq\sin 2s - \frac{(2+3m)}{6(1+3m)}q^3\sin 3s$$

d'où l'on connoit l'anomalie vraie s, qui convient à la moyenne τ, l'équation du centre étant

$$\frac{2(1+2m)}{1+3m}q\sin s - \frac{(3+5m)}{4(1+3m)}qq\sin 2s + \frac{(2+3m)}{6(1+3m)}q^3\sin 3s$$

& $s = \tau +$ Equation du centre.

Ensuite on aura

$$\Phi = \eta + \tau + \text{Equation du centre} + 2mq\sin s$$

où $\eta + \tau$ marque la longitude moyenne & Φ la vraie. Enfin la distance du Satellite au centre de Jupiter est $v = \frac{p}{1+q\cos s}$.

20. Jusqu'ici j'ai supposé que le Satellite se meuve exactement dans le plan de l'équateur de Jupiter; je m'en vai donc aussi déterminer les dérangemens qui proviennent de la figure applatie du corps

corps de Jupiter, lorſque l'orbite du Satellite eſt inclinée au plan de l'équateur de Jupiter, ou lorſque la coordonnée z n'eſt pas évanouiſſante. Pour ce cas nous n'avons qu'à conſidérer les trois équations différentio-différentielles rapportées au §. 11. d'où nous tirons dabord en les combinant ces équations:

$$\text{I.}\quad y\,ddx - x\,ddy = 0;$$

$$\text{II.}\quad z\,ddy - y\,ddz = \frac{3n(cc-aa)e^3 d\zeta^2}{v^5}\,.\,yz;$$

$$\text{III.}\quad z\,ddx - x\,ddz = \frac{3n(cc-aa)e^3 d\zeta^2}{v^5}\,.\,xz,$$

& encore celle-ci:

$$2dx\,ddx + 2dy\,ddy + 2dz\,ddz = -2ne^3 d\zeta^2\left(\frac{dv}{vv} + \frac{3(cc-aa)dv}{2v^4} + \tfrac{3}{4}(cc-aa)\left(\frac{2z\,dz}{v^5} - \frac{5zz\,dv}{v^6}\right)\right),$$

qui donne par l'intégration:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 2ne^3 d\zeta^2\left(C + \frac{1}{v} + \frac{cc-aa}{2v^3} - \frac{3(cc-aa)zz}{2v^5}\right).$$

21. Pour ramener ces quantités aux élémens dont on ſe ſert en Aſtronomie, ſoit Zz l'eſpace que le Satellite parcourt dans le tems dt, auquel répond l'angle $d\zeta$, & on aura $Zz^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Or ayant $Iz = v + dv$, ſi nous poſons l'angle élémentaire $ZIz = d\Phi$, nous aurons auſſi $Zz^2 = dv^2 + vv\,d\Phi^2$, d'où notre derniere équation prendra cette forme:

Fig. 6.

$$dv^2 + vv\,d\Phi^2 = 2ne^3 d\zeta^2\left(C + \frac{1}{v} + \frac{cc-aa}{2v^3} - \frac{3(cc-aa)zz}{2v^5}\right).$$

Que le plan ZIz, dans lequel le Satellite ſe meut actuellement, coupe le plan de l'équateur de Jupiter par la droite IN qui ſera la ligne des nœuds, dont la longitude ſoit ou l'angle $XIN = \psi$, l'inclinaiſon

$= \omega$,

$= \omega$, & l'angle NIZ $= u$, qui sera l'argument de latitude. Qu'on tire de Z & Y à la ligne IN les perpendiculaires ZN & YN, & l'angle ZNY sera égal à l'inclinaison ω. Donc, ayant tiré du triangle ZIN les lignes IN $= v \cos u$, & ZN $= v \sin u$, nous aurons YN $= v \sin u \cos \omega$ & ZY $= v \sin u \sin \omega = z$. Ensuite l'angle XIN $= \psi =$ XYN fournit

$$IX = x = v \cos u \cos \psi - v \sin u \cos \omega \sin \psi \quad \&$$
$$XY = y = v \cos u \sin \psi + v \sin u \cos \omega \cos \psi.$$

22. Puisque la différentiation transporte le point Z en z, il est clair qu'on doit trouver les mêmes valeurs des différentiels dx, dy & dz, soit qu'on regarde la ligne des nœuds IN avec l'inclinaison comme constantes, soit qu'on tienne compte de leur variabilité. Or, en considérant les angles ψ & ω comme constans, l'angle NIZ $= u$ croit de l'angle ZIz $= d\phi$, de sorte que dans ce cas il faut mettre $du = d\phi$, & partant nous aurons:

$$dz = dv \sin u \sin \omega + v d\phi \cos u \sin \omega = \frac{z dv}{v} + v d\phi \cos u \sin \omega$$

$$dx = \frac{x dv}{v} - v d\phi (\sin u \cos \psi - \cos u \cos \omega \sin \psi)$$

$$dy = \frac{y dv}{v} - v d\phi (\sin u \sin \psi - \cos u \cos \omega \cos \psi).$$

De là nous tirons

$$y dx - x dy = - vv d\phi \cos \omega \quad \text{ou} \quad x dy - y dx = vv d\phi \cos \omega$$
$$z dy - y dz = - vv d\phi \sin \omega \sin \psi \quad \text{ou} \quad y dz - z dy = vv d\phi \sin \omega \sin \psi$$
$$z dx - x dz = - vv d\phi \sin \omega \cos \psi \quad \text{ou} \quad x dz - z dx = vv d\phi \sin \omega \cos \psi.$$

23. Si nous substituons ces valeurs dans nos équations précédentes, nous trouverons:

I. $d.(vv d\phi \cos \omega) = 0$

II. $d.(vv\,d\Phi \sin\omega \sin\psi) = \dfrac{-3n(cc-aa)e^3 d\zeta^2}{v^3} \sin u\, \mathrm{ſ}\omega (\cos u\, \mathrm{ſ}\psi +$
$\sin u \cos\omega \cos\psi)$

III. $d.(vv\,d\Phi \sin\omega \cos\psi) = \dfrac{-3n(cc-aa)e^3 d\zeta^2}{v^3} \sin u\, \mathrm{ſ}\omega (\cos u\, c.\psi -$
$\sin u \cos\omega \sin\psi)$

dont les deux dernieres donnent par leur combinaiſon

$$d.(vv\,d\Phi \sin\omega) = \frac{-3n(cc-aa)e^3 d\zeta^2}{v^3} \sin u \cos u\, \mathrm{ſ}\omega$$

$$\&\quad vv\,d\Phi\, d\psi \sin\omega = \frac{-3n(cc-aa)e^3 d\zeta^2}{v^3} \sin u^2 \sin\omega \cos\omega.$$

Or celle-là étant combinée avec la premiere donne

$$d.(vv\,d\Phi) = \frac{-3n(cc-aa)e^3 d\zeta^2}{v^3} \sin u \cos u \sin\omega^2$$

$$\&\quad vv\,d\Phi\, d\omega = \frac{-3n(cc-aa)e^3 d\zeta^2}{v^3} \sin u \cos u \sin\omega \cos\omega$$

de ſorte que

$$d\psi = \frac{-3n(cc-aa)e^3 d\zeta^2 \sin u^2 \cos\omega}{v^3 d\Phi}$$

$$\&\quad d\omega = \frac{-3n(cc-aa)e^3 d\zeta^2 \sin u \cos u \sin\omega \cos\omega}{v^5 d\Phi}$$

Mais l'équation déjà une fois intégrée fournit

$$dv^2 + vv\,d\Phi^2 = 2ne^3 d\zeta^2 \left(C + \frac{1}{v} + \frac{cc-aa}{2v^3}(1 - 3\,\mathrm{ſ}u^2\,\mathrm{ſ}\omega^2)\right).$$

24. Or, ſi nous tenons compte de la variabilité des angles ψ & & ω, où du n'eſt plus égal à $d\Phi$, il faut que les mêmes valeurs pour dx, dy & dz en réſultent. Trouvant donc

$$dz = dv\,\mathrm{ſ}u\,\mathrm{ſ}\omega + v\,du \cos u\,\mathrm{ſ}\omega + v\,d\omega\,\mathrm{ſ}u \cos\omega$$

puiſ-

puiſque $dz = dv\,\text{ſ}u\,\text{ſ}\omega + v\,d\Phi\,\cos u\,\text{ſ}\omega$, nous en concluons

$$d\Phi = du + \frac{d\omega \sin u \cos\omega}{\cos u \sin\omega}.$$

En comparant de la même maniere les différentiels dx & dy avec les valeurs précédentes, nous obtiendrons

$$(d\Phi - du)(\text{ſ}u\cos\psi + \cos u\cos\omega\,\text{ſ}\psi) - d\psi(\cos u\,\text{ſ}\psi + \text{ſ}u\cos\omega\, c.\psi) + d\omega \sin u \sin\omega \sin\psi = 0$$

$$(d\Phi - du)(\sin u\,\text{ſ}\psi - \cos u\cos\omega\, c.\psi) - d\psi(\cos u\, c.\psi - \text{ſ}u\cos\omega\,\text{ſ}\psi) - d\omega \sin u \sin\omega \cos\psi = 0.$$

Donc, puiſque $d\Phi - du = \frac{d\omega\,\text{ſ}u\cos\omega}{\cos u\,\text{ſ}\omega}$, l'une & l'autre donne

$$d\psi = \frac{d\omega \sin u}{\cos u\,\text{ſ}\omega}, \quad \text{donc } d\Phi = du + d\psi\cos\omega$$

& c'eſt le même rapport qui a été trouvé dans l'article précédent.

25. Conſidérons l'équation $d.(vv\,d\Phi) = \cdots$ qui étant multipliée par $2vv\,d\Phi$ & intégrée donne:

$$v^4 d\Phi^2 = 2ne^3 d\zeta^2 \left(D - 3(cc - aa)\int \frac{d\Phi}{v} \sin u \cos u \sin\omega^2\right)$$

ou poſant pour abréger $\int \frac{d\Phi}{v} \sin u \cos u \sin\omega^2 = P$, & $cc - aa = mhh$, où la valeur de m eſt environ $\frac{1}{24}$, prenant h pour le demi-diametre de l'équateur de Jupiter, nous aurons

$$v^4 d\Phi^2 = 2ne^3 d\zeta^2 (D - 3mhhP)$$

& partant l'équation intégrale:

$$dv^2 = 2ne^3 d\zeta^2 \left(C + \frac{1}{v} - \frac{(D - 3mhhP)}{vv} + \frac{mhh(1 - 3\,\text{ſ}u^2\,\text{ſ}\omega^2)}{2v^3}\right).$$

 Poſons

Posons maintenant $v = \frac{p}{1 + q\cos s}$, de sorte que s soit l'anomalie vraie, & cette circonstance nous fournit ces deux équations

$$C + \frac{1+q}{p} - \frac{(D - 3mhhP)(1+q)^2}{pp} + \frac{mhh(1 - 3\,\mathrm{f}u^2\,\mathrm{f}\omega^2)(1+q)^3}{2p^3} = 0$$

$$C + \frac{1-q}{p} - \frac{(D - 3mhhP)(1-q)^2}{pp} + \frac{mhh(1 - 3\,\mathrm{f}u^2\,\mathrm{f}\omega^2)(1-q)^3}{2p^3} = 0$$

d'où nous tirons:

$$\frac{2q}{p} - \frac{4q(D - 3mhhP)}{pp} + \frac{mhh(1 - 3\,\mathrm{f}u^2\,\mathrm{f}\omega^2)\,q\,(3+qq)}{p^3} = 0$$

& partant $D - 3mhhP = \frac{1}{2}p + \frac{mhh(1 - 3\,\mathrm{f}u^2\,\mathrm{f}\omega^2)(3+qq)}{4p}$.

Ensuite, puisque

$$C + \frac{1}{p} - \frac{(D - 3mhhP)(1+qq)}{pp} + \frac{mhh(1 - 3\,\mathrm{f}u^2\,\mathrm{f}\omega^2)(1+3qq)}{2p^3} = 0$$

nous aurons

$$C = \frac{-(1-qq)}{2p} + \frac{mhh(1-qq)^2(1 - 3\,\mathrm{fin}\,u^2\,\mathrm{fin}\,\omega^2)}{4p^3}.$$

26. Ces valeurs étant substituées produisent

$$dv^2 = 2ne^3d\zeta^2\left(\frac{qq\,\mathrm{f}s^2}{2p} - \frac{mhh(1 - 3\,\mathrm{f}u^2\,\mathrm{f}\omega^2)}{4p^3}(3qq\,\mathrm{f}s^2 + 2q^3\,\mathrm{f}s^2\cos s - q^4\,\mathrm{f}s^2)\right)$$

ou bien

$$dv^2 = \frac{ne^3qq\,d\zeta^2\,\mathrm{f}s^2}{p}\left(1 - \frac{mhh(1 - 3\,\mathrm{f}u^2\,\mathrm{f}\omega^2)}{2pp}(3 + 2q\,\mathrm{c}.s - qq)\right)$$

& par ce que j'ai montré ci-dessus:

$$d\Phi^2 = \frac{ne^3d\zeta^2}{v^4}\left(p + \frac{mhh(1 - 3\,\mathrm{f}u^2\,\mathrm{f}\omega^2)(3+qq)}{2p}\right)$$

donc:

donc:

$$dv = \frac{q\,d\zeta\,\mathrm{s}\,s}{p}\sqrt{ne^3}\left(p - \frac{mhh(1-3\,\mathrm{s}\,u^2\,\mathrm{s}\,\omega^2)(3+2q\,\mathrm{c}.s-qq)}{2p}\right) \text{ ou}$$

$$\frac{dv}{vv} = \frac{q\,d\Phi\,\mathrm{s}\,s}{p}\sqrt{\frac{2pp-mhh(1-3\,\mathrm{s}\,u^2\,\mathrm{s}\,\omega^2)(3+2q\cos s-qq)}{2pp+mhh(1-3\,\mathrm{s}\,u^2\,\mathrm{s}\,\omega^2)(3+qq)}} \quad \&$$

$$d\zeta\sqrt{ne^3} = \frac{vv\,d\Phi\sqrt{2p}}{\sqrt{(2pp+mhh(1-3\,\mathrm{s}\,u^2\,\mathrm{s}\,\omega^2)(3+qq))}}.$$

27. La différentiation des quantités constantes D & C donne:

$$-\frac{3mhh\,d\Phi\,\mathrm{s}\,u\cos u\,\mathrm{s}\,\omega^2}{v} = \tfrac{1}{2}dp + \tfrac{1}{4}mhh(1-3\,\mathrm{s}\,u^2\,\mathrm{s}\,\omega^2)d.\frac{3+qq}{p} - \frac{3mhh\,d\Phi\,\mathrm{s}\,u\cos u\,\mathrm{s}\,\omega^2}{2p}(3+qq)$$

ou bien

$$3mhh\,d\Phi\,\mathrm{s}\,u\cos u\,\mathrm{s}\,\omega^2.\frac{1-2q\cos s+qq}{p} = dp + \tfrac{1}{2}mhh\,(1 - 3\sin u^2\sin\omega^2)\,d.\frac{3+qq}{p}$$

& ensuite celle de C:

$$-d.\frac{1-qq}{p} + \tfrac{1}{2}mhh(1-3\,\mathrm{s}\,u^2\,\mathrm{s}\,\omega^2)d.\frac{(1-qq)^2}{p^2} - \frac{3mhh(1-qq)^2\,d\Phi\,\mathrm{s}\,u\cos u\,\mathrm{s}\,\omega^2}{p^3} = 0$$

d'où l'on pourroit déterminer tant dp que dq par l'élément dΦ. Mais, puisque les quantités p & q sont fort peu variables, devenant même constantes si $\omega = 0$, on aura assez exactement:

$$p\,dp = 3mhh\,d\Phi(1-2q\cos s+qq)\sin u\cos u\sin\omega^2$$

 &

& posant le demi-axe $\dfrac{p}{} = r$

$$\frac{dr}{rr} = \frac{3mhh\,d\phi \sin u \cos u \sin \omega^2}{prr}$$ ou bien

$$p\,dr = 3mhh\,d\phi \sin u \cos u \sin \omega^2.$$

Or $2rq\,dq = dr(1 - qq) - dp$, d'où nous trouverons

$$pr\,dq = 3mhh\,d\phi\,(\cos s - q) \sin u \cos u \sin \omega^2.$$

28. Ensuite, puisque $\dfrac{1}{v} = \dfrac{1 + q \cos s}{p}$, nous aurons

$$\frac{dv}{vv} = \frac{dp(1 + q \cos s)}{pp} - \frac{dq \cos s}{p} + \frac{q\,ds\,\text{ſ}s}{p},$$ & partant

$$\frac{dv}{vv} = \frac{q\,ds \sin s}{p} + \frac{3mhh\,d\phi\,(1 + qq)\,\text{ſ}u \cos u\,\text{ſ}\omega^2\,\text{ſ}s^2}{p^3}.$$

Or la valeur de $\dfrac{dv}{vv}$ trouvée ci-dessus se réduit à cette forme

$$\frac{dv}{vv} = \frac{q\,d\phi \sin s}{p}\left(1 - \frac{mhh(3 + q \cos s)(1 - 3\,\text{ſ}u^2\,\text{ſ}\omega^2)}{2pp}\right)$$

ce qui donne

$$-ds = d\phi - \frac{mhh(3 + q \cos s)(1 - 3 \sin u^2\,\text{ſ}\omega^2)}{2pp}\,d\phi - \frac{3mhh(1 + qq) \sin u \cos u\,\text{ſ}\omega^2\,\text{ſ}s}{ppq}\,d\phi.$$

Enfin, en négligeant les petits termes, & en substituant pour $ne^3\,d\zeta^2$ sa valeur, nous aurons

$$d\psi = \frac{-3mhh(1 + q \cos s)}{pp}\,d\phi \sin u^2 \cos \omega$$ &

dω

$$d\omega = \frac{+ d\psi\, \mathrm{f}\omega}{\mathrm{tag}\, u} \pm \frac{-3mhh(1+q\cos s)}{pp} d\phi\, \mathrm{f}u \cos u\, \mathrm{f}\omega \cos\omega$$

& $du = d\phi + d\psi \cos\omega$

de forte que les différentiels de tous nos élémens font déterminés par $d\phi$.

29. On peut parvenir à d'autres folutions dont la plus fimple paroit être celle qu'on tire de l'équation

$d.(vvd\phi\cos\omega) = 0$, qui donne $v^4 d\phi^2 \cos\omega^2 = 2ne^3 E d\zeta^2$

& partant $vvd\phi^2 = \frac{2ne^3 E d\zeta^2}{vv\cos\omega^2}$, fans qu'on ait befoin d'une quantité intégrale. Or cette formule ne fauroit avoir lieu quand l'inclinaifon ω approche fort d'un angle droit. De là nous aurons:

$$dv^2 = 2ne^3 d\zeta^2 \left(C + \frac{1}{v} - \frac{E}{vv\, \mathrm{c}.\,\omega^2} + \frac{mhh(1-3\,\mathrm{f}u^2\,\mathrm{f}\omega^2)}{2v^3}\right)$$

& pofant comme ci-deffus $v = \frac{p}{1+q\cos s}$,

$$\frac{E}{\cos\omega^2} = \tfrac{1}{2}p + \frac{mhh(1-3\,\mathrm{f}u^2\,\mathrm{f}\omega^2)(3+qq)}{4p} \quad \&$$

$$C = \frac{-(1-qq)}{2p} + \frac{mhh(1-qq)^2(1-3\,\mathrm{f}u^2\,\mathrm{f}\omega^2)}{4p^3}$$

d'où l'on déduit enfuite comme ci-deffus:

$$\frac{dv}{vv} = \frac{q\,d\phi\,\mathrm{f}s}{p} \sqrt{\frac{2pp - mhh(3+2q\cos s - qq)(1-3\,\mathrm{f}u^2\,\mathrm{f}\omega^2)}{2pp + mhh(3+qq)(1-3\sin u^2 \sin\omega^2)}}$$

&

$$d\zeta\sqrt{ne^3} = \frac{vvd\phi\sqrt{2p}}{\sqrt{(2pp + mhh(3+qq)(1-3\,\mathrm{f}u^2\,\mathrm{f}\omega^2))}}$$

$d\psi$

$$d\psi = \frac{-3mhh\,(1 + q\cos s)}{pp}\,d\phi \sin u^2 \cos\omega$$

$$d\omega = \frac{d\psi \sin\omega}{\mathrm{tag}\, u}, \quad \& \quad du = d\phi + d\psi \cos\omega.$$

30. De là on peut d'abord déterminer les quantités p & q, & puisque leur variabilité est très petite, nous les pourrons regarder comme constantes dans les petits termes affectés par mhh. Donc, si nous posons pour abréger $\frac{mhh\,(1 - 3\,\text{ſ}u^2\,\text{ſ}\omega^2)}{2pp} = U$, nous aurons:

$$p\cos\omega^2 + p\,(3 + qq)\,U\cos\omega^2 = f\cos\varepsilon^2 \quad \&$$

$$\frac{1 - qq}{p} - \frac{(1 - qq)^3\,U}{p} = \frac{1 - kk}{f} \quad \text{ou}$$

$$1 - qq = \frac{(1 - kk)\,p}{f} + (1 - qq)^3\,U$$

où f, k & ε sont presque les valeurs moyennes de p, q, & ω, & puisque U est une quantité très petite, il sera permis d'y mettre au lieu de p, q & ω, leurs valeurs moyennes, & en passant aux différentiels nous aurons:

$$dU = \frac{-3mhh\,d\phi \sin u \cos u \sin\omega^2}{pp}$$

$$\& \quad d\omega = \frac{-3mhh\,(1 + q\cos s)\,d\phi\,\text{ſ}u \cos u\,\text{ſ}\omega \cos\omega}{pp}$$

& partant

$$dp\cos\omega^2 + \frac{6mhh\,(1 + q\cos s)\,d\phi\,\text{ſ}u\cos u\,\text{ſ}\omega^2\cos\omega^2}{p} - \frac{3mhh\,(3 + qq)\,d\phi\,\text{ſ}u\cos u\,\text{ſ}\omega^2\cos\omega^2}{p} = 0$$

$$\text{ou} \quad d\phi = \frac{3mhh\,(1 - 2q\cos s + qq)\,d\phi\,\text{ſ}u\cos u\,\text{ſ}\omega^2}{p}$$

&

& $2q\,dq = \frac{3mhh(1-qq)^2\, d\Phi\, \sin u \cos u \sin\omega^2}{pp} - \frac{(1-kk)\,dp}{f}$

donc, à cause de $\frac{dv}{vv} = \frac{dp(1+q\cos s)}{pp} - \frac{dq\cos s}{p} + \frac{q\,ds\sin s}{p}$.

Or $\frac{dv}{vu} = \frac{q\,d\Phi\sin s}{p}\sqrt{\frac{1-U(3+2q\cos s-qq)}{1+U(3+qq)}} = \frac{q\,d\Phi\sin s}{p}(1-U(3+q\,c.\,s))$

d'où l'on tire

$\frac{q\,d\Phi\sin s}{p}(1-U(3+q\cos s)) = \frac{q\,ds\sin s}{p} + \frac{3mhh(1+qq)\,d\Phi\sin u\,c.\,u\sin\omega^2\sin s^2}{p^3}$

ou bien

$ds = d\Phi - U\,d\Phi(3+q\cos s) - \frac{3mhh(1+qq)\,d\Phi\sin u\cos u\sin\omega^2\sin s}{ppq}$

comme ci-dessus, & enfin: $vv\,d\Phi^2 = \frac{ne^3 f\,d\zeta^2 \sin s^2}{vv\cos\omega^2}$ ou

$$d\zeta\sqrt{ne^3 f} = \frac{vv\,d\Phi\cos\omega}{\sin s}.$$

31. Comme je me borne ici à déterminer le mouvement de la ligne des absides, dont la longitude dans l'orbite est $= \Phi = s$, je pourrai considérer dans les petits termes les quantités p, q & ω comme constantes, & $du = d\Phi$. Donc, puisque $U = \frac{mhh}{2pp}(1-\frac{3}{2}\sin\omega^2 + \frac{3}{2}\cos 2u\sin\omega^2)$, nous aurons pour le mouvement moyen:

$$ds = d\Phi - \frac{3mhh\,d\Phi}{2pp}(1-\tfrac{3}{2}\sin\omega^2)$$

donc $$\Phi - s = \frac{3mhh}{2pp}(1-\tfrac{3}{2}\sin\omega^2)\Phi$$

d'où nous voyons que, pendant chaque révolution du Satellite, la ligne des absides avance par un angle $= \frac{3mhh}{2pp}(1-\frac{3}{2}\sin\omega^2)360° = \frac{mhh}{pp}$

 (1 —

$(1 - \frac{3}{2} \sin \omega^2)$ 540°. Ce mouvement est donc plus lent, si l'orbite du Satellite est inclinée à l'équateur de Jupiter, que si elle est située dans le même plan: & si l'inclinaison ω étoit $= 54°,44'$, la ligne des absides perdroit tout son mouvement, qui iroit même en arriere si $\omega > 54°,44'$.

Donc, si l'orbite d'un Satellite est inclinée au plan de l'équateur de Jupiter d'un angle $= \varepsilon$, le mouvement de sa ligne des absides, déterminé ci-dessus, doit être diminué dans la raison de 1 à $1 - \frac{3}{2} \sin \varepsilon^2$.

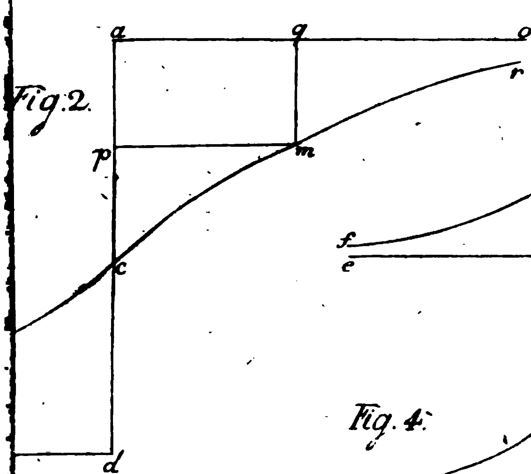
32. Au reste il est aussi évident que dans ce cas la ligne des nœuds doit avoir un mouvement en arriere. Car, ayant

$$d\psi = \frac{-3mhh(1 + q \operatorname{cos} s)}{pp} d\Phi (1 - \frac{1}{2} \operatorname{cos} 2u) \operatorname{cos} \omega,$$

son mouvement moyen sera $d\psi = \frac{-3mhh}{pp} d\Phi \operatorname{cos} \omega$, & partant, pendant chaque révolution où $\Phi = 360°$, la ligne des nœuds reculera par un angle $= \frac{3mhh \operatorname{cos} \omega}{pp} . 360°$. Donc, si l'inclinaison ω est fort petite, le mouvement de la ligne des nœuds est deux fois plus rapide que celui de la ligne des absides. Il sera donc bien utile de déterminer exactement la position des orbites de chaque Satellite à l'égard de l'équateur de Jupiter, pour s'assurer combien ces déterminations sont d'accord avec les observations, & si en effet l'applatissement du corps de Jupiter a une si grande influence dans le mouvement de ses Satellites. Ce sera le plus sûr moyen de connoitre jusqu'à quel point la théorie de l'attraction universelle s'accorde avec les vrais mouvemens des corps célestes.



Mé-



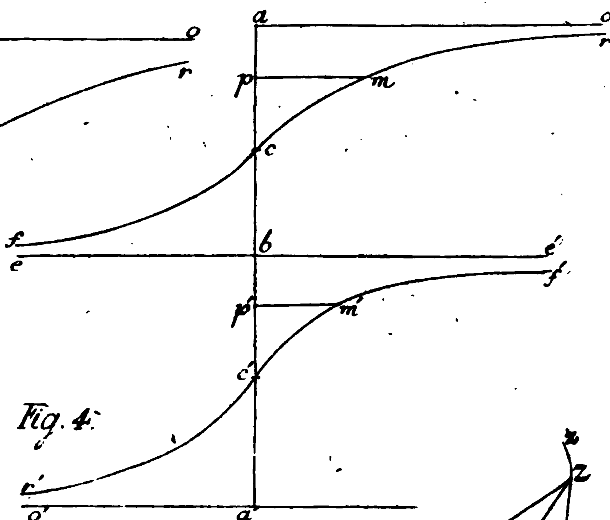


Fig. 6.

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

CLASSE
DE PHILOSOPHIE SPÉCULATIVE.



ESSAI
SUR
L'AMOUR PROPRE
ENVISAGÉ
COMME PRINCIPE DE MORALE. (*)

La Vertu est le lien le plus ferme de la Société, & la source de la tranquillité publique. Sans elle les hommes, semblables aux bêtes féroces, seroient plus sanguinaires que les Lions, plus cruels & plus perfides que les Tigres; ou des especes de monstres dont il faudroit éviter la fréquentation. Ce fut pour adoucir des Mœurs aussi barbares, que les Législateurs promulguerent des Loix, que les Sages enseignerent la Morale, & en démontrant les avantages de la Vertu, firent connoître le prix qu'il y falloit attacher.

Les Sectes de Philosophes, chez les Nations Orientales ainsi que chez les Grecs, en s'accordant en général sur le fond de la Doctrine, ne différoient proprement que par les motifs que chacune d'elles

Vv 3 ad-

(*) Lû dans l'Assemblée publique du 11 Janvier, 1770. On n'a pas cru devoir renvoyer jusqu'au Volume de cette année-là un Mémoire aussi intéressant.

adoptoit pour déterminer leurs disciples à mener une vie vertueuse. Les Stoïciens, selon leurs principes, insistoient sur la beauté inhérente à la Vertu; d'où ils concluoient qu'il falloit l'aimer pour elle-même, & plaçoient le souverain bonheur de l'homme à la posséder inaltérablement. Les Platoniciens disoient que c'étoit approcher des Dieux immortels, que c'étoit leur ressembler, que de pratiquer les Vertus à leur exemple. Les Epicuriens attribuoient une volupté supérieure à l'accomplissement des devoirs moraux: leurs principes bien entendus trouvoient, dans la jouissance de la Vertu la plus pure, le sentiment d'un délice & d'une félicité ineffable. Moïse, pour encourager ses Juifs à des actions bonnes & louables, leur annonça des bénédictions ou des peines temporelles. La Religion Chrétienne, qui s'éleva sur les ruines de la Judaïque, attèra les crimes par des punitions éternelles, & encouragea à la Vertu par l'espérance d'une béatitude infinie: non contente de ces ressorts, se proposant d'atteindre au dernier degré de perfection possible, elle prétendit que l'amour de Dieu devoit seul servir de principe aux bonnes actions des hommes, quand même il n'y auroit ni peines ni récompenses à attendre dans une autre vie.

Nous devons convenir que les Sectes des Philosophes ont formé des hommes du plus grand mérite: nous convenons de même que du sein du Christianisme il est sorti des ames pures & remplies de sainteté. Néanmoins, par une suite du rélachement des Philosophes & des Théologiens, & par la perversité du cœur humain, il est arrivé que ces différents motifs d'encouragement à la Vertu n'ont pas continué de produire les bons effets auxquels on s'attendoit. Combien de Philosophes qui ne l'étoient que de nom chez les Païens! Il n'y a qu'à jeter les yeux sur Lucien, pour se convaincre du peu de réputation où ils étoient de son temps. Que de Chrétiens qui dégénérerent, & qui corrompirent l'ancienne pureté des mœurs! La cupidité, l'ambition, le fanatisme remplirent des cœurs qui faisoient profession de renoncer au monde, & pervertirent ce que la simple Vertu avoit établi. De pareils exemples fourmillent dans l'Histoire. Enfin, si l'on en excepte quelques reclus, aussi pieux qu'inutiles à la Société, les Chrétiens de

nos

nos jours ne sont pas préférables aux Romains du temps des Marius & des Sylla; bien entendu que je borne uniquement ce parallele à la comparaison des mœurs.

Ces réflexions & de semblables m'ont conduit à rechercher les causes qui ont influé sur cette étrange dépravation du genre humain. Je ne sais s'il m'est permis de hazarder mes conjectures sur des matieres aussi importantes; mais il me paroît qu'on s'est peut-être trompé dans le choix des motifs qui devoient porter les hommes à la Vertu. Ces motifs, ce me semble, avoient le défaut de n'être point à la portée du Vulgaire. Les Stoïciens ne s'apperçurent pas que l'admiration est un sentiment forcé, dont l'impression s'efface bien vîte; l'amour propre n'applaudit qu'avec répugnance. L'on convient sans peine de la beauté de la Vertu, parce que cet aveu ne coûte rien; mais cet acte de complaisance plutôt que de conviction, ne détermine point à se corriger soi-même, à vaincre ses mauvais penchants, à dompter ses passions. Les Platoniciens auroient dû se rappeller l'espace immense qu'il y a entre l'Etre des Etres & la Créature fragile. Comment proposer à cette Créature d'imiter son Créateur, dont, par son état circonscrit & borné, elle ne peut se former qu'une idée vague & indéterminée? Notre esprit est assujetti à l'empire des sens; notre raison n'agit que sur les choses où notre expérience nous éclaire; lui proposer des matieres abstraites, c'est l'égarer dans un Labyrinthe dont elle ne trouvera jamais l'issue: mais lui présenter des objets palpables de la nature, c'est le moyen de la frapper & de la convaincre. Il est peu de grands génies capables de conserver le bon-sens en se précipitant dans les ténebres de la Métaphisique. L'homme en général est né plus sensible que raisonnable. Les Epicuriens abusant du terme de volupté, énerverent, sans y penser, la bonté de leurs principes, & fournirent, par cette équivoque même, des armes à leurs Disciples pour dénaturer leur doctrine.

La Religion Chrétienne, (en respectant ce qu'on y suppose de divin, & n'en parlant que philosophiquement;) la Religion Chrétienne,

me, dis-je, présentoit à l'esprit des idées si abstraites, qu'il auroit fallu changer chaque Catéchumene en Métaphisicien pour les concevoir, & ne choisir que des hommes nés avec une imagination forte pour s'en pénétrer; peu d'hommes sont nés avec des têtes ainsi organisées. L'expérience prouve que, chez le vulgaire, l'objet présent l'emporte parce qu'il frappe ses sens, sur l'objet éloigné qui l'affecte plus foiblement; & par conséquent les biens de ce monde, à la jouissance desquels il touche, auront sans contredit la préférence sur des biens imaginaires, dont il se représente confusément la possession dans une perspective éloignée. Mais que dirons-nous des motifs qu'on tire de l'amour de Dieu pour rendre l'homme vertueux; de cet amour que les Quiétistes exigent dégagé des craintes de l'Enfer & des espérances du Paradis? Cet amour est-il dans la possibilité des choses? Le fini ne peut concevoir l'infini; par conséquent nous ne pouvons nous former aucune idée exacte de la Divinité; nous pouvons nous convaincre en général de son existence, & voilà tout. Comment exiger d'une ame agreste qu'elle aime un Etre qu'elle ne peut connoître en aucune façon? Contentons-nous d'adorer dans le silence, & de borner les mouvements de nos cœurs aux sentiments d'une profonde reconnoissance pour l'Etre des Etres, en qui & par lequel tous les Etres existent.

Plus on examine cette matiere, plus on la discute, & plus il paroît évident qu'il faudroit employer un principe plus général & plus simple pour rendre les hommes vertueux. Ceux qui se sont appliqués à la connoissance du cœur humain, auront sans doute découvert le ressort qu'il faudroit mettre en jeu. Ce ressort si puissant, c'est l'amour propre, ce gardien de notre conservation, cet artisan de notre bonheur, cette source intarissable de nos vices & de nos vertus, ce principe caché de toutes les actions des hommes. Il se trouve en un dégré éminent dans l'homme d'esprit, & il éclaire le plus stupide sur ses intérêts. Qu'y a-t-il de plus beau & de plus admirable que de tirer, même d'un principe qui peut mener au vice, la source du bien, du bonheur, & de la félicité publique? Cela arriveroit si cette matiere

étoit

étoit maniée par les mains d'un profond philosophe; il régleroit l'amour-propre, il le dirigeroit au bien, il sauroit opposer les passions aux passions; & en démontrant aux hommes que leur intérêt est d'être vertueux, il les rendroit tels.

Le Duc *de la Rochefoucault* qui, en fouillant dans le cœur humain, a si bien dévoilé ce ressort de l'amour-propre, s'en est servi pour calomnier nos vertus dont il n'admet que l'apparence. Je voudrois qu'on employât ce ressort pour prouver aux hommes que leur véritable intérêt est d'être bons citoïens, bons peres, bons amis, en un mot de posséder toutes les vertus morales; & comme effectivement cela est véritable, il ne seroit pas difficile de les en convaincre.

Pourquoi tâche-t-on de prendre les hommes par leur intérêt, quand on veut les engager à suivre de certains partis; si ce n'est que l'intérêt propre est de tous les arguments, le plus fort & le plus convaincant? Servons-nous donc de ce même argument pour la morale: qu'on représente aux hommes les malheurs qu'ils s'attireront par une conduite vicieuse, & les biens qui sont inséparables des bonnes actions. Lorsque les Crétois (*) maudissoient leurs ennemis, ils leur souhaitoient de se livrer à des passions vicieuses; c'étoit leur souhaiter qu'ils se précipitassent eux mêmes dans des malheurs & dans l'opprobre. Ces vérités aisées sont susceptibles de démonstration, & se trouvent également à la portée des Sages, des gens d'esprit, & de la plus vile populace.

On m'objectera sans doute que mon hypothese trouvera quelque difficulté à concilier, avec le bonheur que j'attache aux bonnes actions, ces persécutions qu'éprouve la Vertu, & ces especes de prospérités dont jouissent tant d'ames perverses. Cette difficulté est facile à lever, si nous voulons nous borner à n'entendre par le mot de bonheur qu'une parfaite tranquillité de l'ame. Cette tranquillité de l'ame

(*) *Valere Maxime* Liv. VII. Chap. II.

l'ame ſe fonde ſur le contentement de nous-mêmes, ſur ce que notre conſcience nous permet d'applaudir à nos actions, & ſur ce que nous n'avons point de reproches à nous faire. Or il eſt clair que ce ſentiment peut exiſter dans une perſonne d'ailleurs malheureuſe; mais jamais il n'exiſtera dans un cœur barbare & atroce, qui ne peut que ſe déteſter lui-même s'il ſe conſidere, quelles que ſoient les proſpérités apparentes dont il paroît environné.

Nous ne combattons point l'expérience, nous avouons qu'il y a une multitude d'exemples de crimes impunis, & de ſcélérats qui jouiſſent de ces grandeurs que les idiots admirent; mais ces criminels ne craignent-ils pas que le tems ne dévoile enfin cette vérité ſi terrible pour eux, & ne découvre leur turpitude & leur opprobre? Et ces monſtres couronnés, un *Néron*, un *Caligula*, un *Domitien*, un *Louis XI.*, les grandeurs vaines dont ils jouiſſoient, les empêchoient-elles d'entendre la voix ſecrete de la conſcience qui les condamnoit, d'être dévorés de remords, & de ſentir ce fouet vengeur qui, quoiqu'inviſible, les déchiroit en les fuſtigeant? Quelle ame peut être tranquille dans une telle ſituation? N'éprouve-t-elle pas plutôt dans cette vie tout ce que les tourments des Enfers peuvent avoir de plus affreux? D'ailleurs, c'eſt mal raiſonner que de juger du bonheur des autres par les apparences. Ce bonheur ne peut être évalué que ſur la façon de penſer de celui qui l'éprouve; cette façon de penſer varie ſi fort, que l'un aime la gloire, cet autre des objets de plaiſir; celui-ci s'attache à des bagatelles, celui-là à des choſes qu'on juge importantes; & même les uns dédaignent & mépriſent ce que les autres déſirent ou regardent comme le ſouverain bien. Il n'y a donc point de regle certaine pour juger de ce qui dépend d'un goût arbitraire & ſouvent fantaſque; d'où il arrive qu'on ſe récrie ſouvent ſur le bonheur & la proſpérité de ceux qui gémiſſent amèrement en ſecret du poids de leurs afflictions. Puis donc que ce n'eſt pas dans des objets extérieurs, ni dans ces fortunes que la ſcène mouvante du monde produit & détruit tour à tour, que nous pouvons trouver la félicité; il faut la chercher

cher en nous-mêmes. Il n'y en a point d'autre, je le répete, que la tranquillité de l'ame; c'est pourquoi notre intérêt doit nous porter à rechercher un bien aussi précieux; & si les passions le troublent, c'est elles qu'il faut dompter.

Ainsi qu'un Etat ne sauroit être heureux tandis qu'il est déchiré par une guerre civile; de même l'homme ne sauroit jouir du bonheur, lorsque ses passions révoltées combattent l'empire de la raison. Toutes les passions portent avec elles un châtiment qui y semble attaché; celles même qui flattent le plus nos sens, n'en sont pas exemptes: chez celles-ci, c'est la ruine de la santé; chez celles-là, ce sont des soins & des inquiétudes renaissantes; ou c'est le chagrin de ne pas réussir dans des projets vastes que l'on a imaginés; ou c'est le dégoût de n'avoir pas toute la considération que l'on croit mériter, ou la rage de ne pouvoir se venger de ceux qui nous ont outragés, ou le remords d'un ressentiment trop barbare, ou la crainte d'être démasqués après cent fourberies consécutives.

Par exemple, la soif d'amasser des richesses travaille sans cesse l'avare; les moyens lui sont égaux pourvu qu'il se contente: mais la crainte de voir échapper ce qui lui a coûté tant de peines à ramasser, lui ôte la jouissance de ce qu'il possede. L'ambitieux perd le présent de vue pour se précipiter aveuglément dans l'avenir; il enfante sans cesse de nouveaux projets; il foule impérieusement à ses pieds tout ce qu'il y a de plus sacré pour arriver à ses fins; les obstacles qu'il rencontre l'aigrissent & l'irritent: toujours incertain entre la crainte & l'espérance, il est en effet malheureux; & la possession même de ce qu'il désire, est accompagné de satiété & de dégoût. Cet état d'insipidité lui fait naître de nouveaux projets de fortune; & ce bonheur qu'il cherche, il ne le trouve jamais. Faut-il dans une aussi courte vie former d'aussi longs projets? Le prodigue qui dépense le double de ce qu'il amasse, est comme le Tonneau des Danaïdes, qui ne se remplissoit jamais; il en est toujours aux expédients, & ses nombreux désirs qui multiplient sans cesse ses besoins, font à la fin dégénérer ses vices

en crimes. L'amoureux tendre devient le jouet des femmes, qui le trompent; l'amoureux volage ne séduit que parce qu'il est parjure; & le débauché perd sa santé en abrégeant ses jours.

Mais l'homme dur, l'injuste, l'ingrat, quels reproches n'ont-ils pas à se faire? Celui qui est dur, cesse d'être homme, parce qu'il ne respecte plus les privileges de son espece, & méconnoît ses freres dans ses semblables; il n'a ni cœur, ni entrailles, & ne sentant pas de compassion, il renonce en effet à celle qu'on doit avoir pour lui. L'injuste rompt l'accord social; il détruit autant qu'il est en lui les Loix sous la protection desquelles il existe; il se révolteroit contre l'oppression qu'il auroit à souffrir, pour s'arroger le privilege exclusif d'opprimer ceux qui sont plus foibles que lui: il peche par une mauvaise logique, ses principes se trouvent en contradiction; & d'ailleurs les sentiments d'équité que la Nature a gravés dans tous les cœurs, ne doivent-ils pas se soulever contre ses prévarications? Mais le vice le plus abominable de tous, le plus noir, le plus infame, c'est l'ingratitude. L'ingrat, insensible aux bienfaits, commet un crime de lese-majesté contre la Société; parce qu'il corrompt, qu'il empoisonne, qu'il détruit les douceurs de l'amitié: il sent les offenses, il ne sent pas les services; il met le comble à la perfidie en rendant le mal pour le bien: mais cette ame dénaturée & dégradée de l'humanité agit contre ses intérêts, parce que tout individu, foible de sa nature, (quelque élevé qu'il soit,) ne peut se passer du secours de ses semblables; & qu'un ingrat, excommunié de la Société, s'est rendu indigne par sa férocité d'éprouver désormais de nouveaux bienfaits. Il faudroit dire sans cesse aux hommes: „Soyez doux & humains, parce que vous êtes „foibles, & que vous avez besoin d'assistance; soyez justes envers „les autres, afin qu'à votre tour les Loix puissent vous protéger contre toute violence étrangere: en un mot, ne faites point à d'autres ce [illegible] ne vous ne voudriez pas que l'on vous fît."

Je n'entreprens point de détailler dans cette légere esquisse tous [illegible] arguments que l'amour propre fournit aux hommes pour vaincre leurs

leurs mauvais penchants, & les inciter à mener une vie plus vertueuſe: les bornes de ce Diſcours ne permettent pas que cette matiere y ſoit épuiſée. Je me contente d'avancer que tous ceux qui trouveront de nouveaux motifs propres à réformer les mœurs, rendront un ſervice important à la Société, j'oſe même dire à la Religion. Rien de plus vrai, de plus évident, que la Société ne ſauroit ſubſiſter, ni ſe maintenir ſans la vertu & les bonnes mœurs de ceux qui la compoſent. Des mœurs dépravées, une effronterie ſcandaleuſe dans le vice, un mépris pour la vertu & pour ceux qui l'honorent, de la mauvaiſe foi dans le commerce, des parjures, des perfidies, un intérêt particulier qui ſuccede à celui de la patrie, ſont les avant-coureurs de la chûte des Etats & de la ruine des Empires; parce qu'auſſi-tôt que les idées du bien & du mal ſont confondues, il n'y a plus ni blâme ni louange, ni punition ni récompenſe. Cet objet ſi important des mœurs n'intéreſſe pas moins la Religion que l'Etat. Les Religions Chrétiennes, la Juive, la Mahométane & la Chinoiſe ont à peu près la même morale. La Religion Chrétienne, accréditée depuis longtems, a cependant encore deux ſortes d'ennemis à combattre; les uns ſont de ces Philoſophes qui, n'admettant que le bon ſens & des raiſonnements rigoureuſement exacts ſelon les principes de la logique, rejettent les idées & les ſyſtêmes qui ne ſe trouvent pas conformes aux régles de la dialectique: nous ne parlons pas actuellement de ceux-là.

Les autres ſont des Libertins dont les mœurs corrompues par une longue habitude du vice, ſe révoltent contre la dureté du joug que la Religion veut impoſer à leurs paſſions; ils rejettent ces entraves, ils renoncent tacitement à une Loi qui les gêne, & cherchent un azile dans une incrédulité parfaite. Je ſoutiens donc que tous les motifs qui peuvent être employés pour réformer des perſonnes de ce caractere, tournent évidemment au plus grand avantage de la Religion Chrétienne; & j'oſe croire que l'intérêt propre des hommes eſt le motif le plus puiſſant que l'on puiſſe employer pour les retirer de leurs égarements. Dès qu'une fois l'homme ſera bien perſuadé que ſon pro-

pre bien demande qu'il soit vertueux, il se portera à des actions louables; & comme effectivement il se trouvera vivre conformément à la Morale de l'Evangile, il sera facile de le déterminer à faire pour l'amour de Dieu, ce qu'il pratiquera déjà pour l'amour de lui-même: c'est ce que les Théologiens appellent, changer des vertus païennes en des vertus sanctifiées par le Christianisme.

Mais voici une nouvelle objection qui se présente. On me dira sans doute: „Vous êtes en contradiction avec vous-même; vous „ne pensez donc pas qu'on définit la Vertu, *une disposition de l'ame „qui la porte au plus parfait désintéressement?* Comment pouvez-vous „donc imaginer qu'on peut arriver à ce parfait désintéressement par „l'intérêt propre; ce qui est précisément la disposition de l'ame qui lui „est la plus opposée?“ Quelque forte que soit cette objection, elle est facile à résoudre, pourvû que l'on considere les différents ressorts qui font mouvoir l'amour propre. Si l'amour propre ne consistoit que dans le désir de posséder des biens & des honneurs, je n'aurois rien à répondre; mais ses prétentions ne se bornent pas à si peu d'objets. Premierement, c'est l'amour de la vie & de sa propre conservation; ensuite, l'envie d'être heureux, la crainte du blâme & de la honte, le désir de la considération & de la gloire; enfin, une passion pour tout ce qu'on juge être avantageux: ajoûtez-y une horreur contre tout ce qu'on croit nuisible à sa conservation. Il n'y a donc qu'à rectifier le jugement des hommes. Que dois-je rechercher, que dois-je fuir, pour rendre cet amour propre, de brute & nuisible qu'il étoit, utile & louable?

Les exemples du plus grand désintéressement que nous ayons, nous sont fournis par des principes de l'amour propre. Le dévouement généreux des deux Décius, qui sacrifierent volontairement leur propre vie pour procurer la victoire à leur patrie, d'où provenoit-il, si ce n'est qu'ils estimoient moins leur existence que la gloire? Pourquoi Scipion, dans sa premiere jeunesse, dans cet âge où les passions sont si dangereuses, résiste-t-il aux tentations que lui donna la beauté de

de sa Captive? Pourquoi la rend-il vierge à son fiancé, en les comblant tous deux de présents? Pouvons-nous douter que ce Héros n'ait jugé que son procédé noble & généreux lui feroit plus d'honneur, que s'il avoit brutalement assouvi ses désirs? Il préféroit donc la réputation à la volupté.

Que de traits de vertus, que d'actions à jamais glorieuses, ne sont effectivement dues qu'à l'instinct de l'amour propre! Par un sentiment secret & presque imperceptible, les hommes ramenent tout à eux-mêmes; ils se placent dans un centre où aboutissent toutes les lignes de la circonférence. Quelque bien qu'ils fassent, ils en sont eux-mêmes l'objet caché: la sensation la plus vive l'emporte chez eux sur la plus foible; souvent un syllogisme vicieux dont ils ne sentent pas les défauts, les détermine: il ne faut donc que leur présenter les vrais biens, leur en faire connoître la valeur, & savoir manier leurs passions en opposant un penchant à l'autre, pour en tirer avantage en faveur de la vertu.

S'agit-il d'arrêter le crime prêt à se commettre? Vous trouvez le principe réprimant dans la crainte des Loix qui le punissent. C'est alors qu'il faut exciter cet amour que chaque homme a pour sa conservation, pour l'opposer aux desseins pervers qui l'exposeront aux plus rigoureux châtiments, à la mort même. Cet amour de la conservation peut servir également pour ramener des débauchés dont les débordements ruinent la santé & abregent les jours; de même contre ceux qui sont sujets aux emportements de la colere: car il y a des exemples que ces mouvements ont donné des accès d'épilepsie à ceux qui en étoient violemment agités. La crainte du blâme produit à peu près des effets semblables à ceux de l'amour de la conservation. Combien de femmes ne doivent leur pudeur à laquelle on applaudit, qu'au désir de conserver leur réputation à l'abri de la médisance? Combien d'hommes ne doivent leur désintéressement qu'à l'appréhension de passer dans le monde, s'ils agissoient autrement, pour des fripons & pour des

des malheureux! Enfin, manier adroitement les différents ressorts de l'amour propre, ramener tous les avantages des bonnes actions à celui qui en est l'auteur, c'est le moyen de faire de ce ressort du bien & du mal, l'agent principal du mérite & de la vertu.

Je ne puis m'empêcher d'avouer à notre honte, qu'on s'apperçoit dans ce siécle d'un refroidissement étrange pour ce qui concerne la réforme du cœur humain & des mœurs. On dit publiquement, on imprime même, que la morale est autant ennuyeuse qu'inutile; on soutient que la nature de l'homme est un composé de bien & de mal, que l'on ne change point cet être, que les plus fortes raisons cedent à la violence des passions, & qu'il faut laisser aller le monde comme il va. Mais, si l'on en usoit ainsi à l'égard de la terre, si on ne la cultivoit pas, elle porteroit sans doute des ronces & des épines; & jamais elle ne donneroit ces abondantes moissons si utiles, & qui nous servent d'alimens. J'avoue, quelque attention que l'on apporte à corriger les mœurs, qu'il y aura toujours des vices & des crimes sur la Terre; mais il y en aura moins, c'est beaucoup gagner; il y aura de plus des esprits rectifiés & développés, qui excelleront par leurs éminentes qualités. N'a-t-on pas vû sortir des Ecoles des Philosophes des ames sublimes, des hommes presque divins, qui ont poussé la vertu au plus haut degré de perfection où l'humanité puisse atteindre? Les noms des Socrates, des Aristides, des Catons, des Brutus, des Antonins, des Marc-Aureles, subsisteront dans les Annales du genre-humain, tant qu'il restera des ames vertueuses dans le monde. La Religion n'a pas laissé que de produire quelques hommes éminents, qui ont excellé par l'humanité & la bienfaisance. Je ne compte pas dans ce nombre ces reclus atrabilaires & fanatiques qui ont enséveli dans des cachots religieux, des vertus qui pouvoient devenir utiles à leur prochain; & qui ont mieux aimé vivre à la charge de la Société que de la servir.

Il faudroit commencer aujourd'hui par imiter l'exemple des Anciens, employer tous les encouragements qui peuvent rendre l'espece hu-

humaine meilleure, préférer dans les Ecoles l'étude de la morale à toute autre connoissance, prendre une méthode aisée pour l'enseigner. Peut-être ne seroit-ce pas un petit acheminement à ce but, que de composer des Catéchismes où les enfans apprendroient dès leur plus tendre jeunesse, que pour être heureux, la vertu leur est indispensablement nécessaire. Je voudrois que les Philosophes, moins appliqués à des recherches aussi curieuses que vaines, exerçassent davantage leurs talents sur la morale; surtout que leur vie servît en tout d'exemple à leurs Disciples. Alors ils mériteroient avec justice le titre de Précepteurs du genre humain. Il faudroit que les Théologiens s'occupassent moins à expliquer des dogmes inintelligibles; & que, désabusés de la fureur de vouloir démontrer des choses qui nous sont annoncées comme des mysteres d'un ordre supérieur à la raison, ils s'appliquassent d'avantage à prêcher la morale pratique; & qu'au lieu de prononcer des Discours fleuris, ils fissent des Discours utiles, simples, clairs, & à la portée de leur auditoire. Les hommes s'endorment à la suite d'un raisonnement alambiqué; ils s'éveillent quand il est question de leur intérêt; de sorte que, par des Discours adroits & pleins de sagesse, on rendroit l'amour propre le Coryphée de la vertu. Des exemples récents & analogues à ceux qu'on veut persuader, peuvent être employés avec succès; comme, s'il s'agissoit d'animer un Laboureur paresseux à mieux cultiver son champ, on l'encourageroit sans doute en lui montrant son voisin qui s'est enrichi par son activité laborieuse; il ne dépend que de lui de prospérer de même. Mais les modeles doivent être choisis à la portée de ceux qui doivent les imiter, dans leur genre, & non pas dans des conditions trop disproportionnées.

Les trophées de Miltiade empêchoient Thémistocle de dormir. Si les grands exemples ont fait de si fortes impressions sur les Anciens, pourquoi de nos jours en feroient-ils de moindres? L'amour de la gloire est inné dans les belles ames; il n'y a qu'à

l'animer, il n'y a qu'à l'exciter; & des hommes qui végétoient jusqu'alors, enflammés par cet heureux instinct, vous paroîtront changés en demi-Dieux. Il me semble enfin que si la méthode que je propose, n'est pas suffisante pour extirper les vices de la Terre, du moins pourra-t-elle faire quelques prosélytes aux bonnes mœurs, & féconder des vertus, qui, sans son secours, seroient demeurées dans l'engourdissement: c'est toujours rendre service à la Société, & c'est le but de cet Ouvrage.



SUR

SUR LA CRAINTE DE LA MORT. SUR LE MÉPRIS DE LA MORT. SUR LE SUICIDE.

PAR MR. MERIAN.

Je n'écris point ici un livre de Morale: je n'enseigne ni à craindre la mort, ni à la mépriser. Je me borne à contempler, dans l'esprit & dans le cœur humain, l'origine de cette crainte, les motifs qui en font triompher, & ceux qui portent l'homme jusqu'à attenter sur ses propres jours: trois sujets intimement liés, & qu'on ne sauroit traiter à fond en les séparant.

I.

La crainte de la mort me paroît être naturelle à l'homme, en vertu d'un instinct primitif qui le fait veiller à sa conservation. Aussi les traces de son pouvoir sont-elles imprimées par-tout, & dans nos institutions publiques, & dans la vie privée, & là même où l'on s'étudie le plus à la pallier. Les lois n'ont point de frein plus redoutable pour arrêter le crime: la vie presque entiere de l'homme est employée soit à lutter contre la mort, soit à se distraire de son idée, soit à se rassurer contr'elle. La Médecine, la Philosophie, la Religion, tant

de remèdes, que nous ne cessons d'opposer à cette crainte, en constatent la réalité.

La mort nous paroît un mal par elle-même, & sans porter la vue plus loin. Les circonstances dont elle est accompagnée sont toutes des objets pour lesquels la Nature nous a inspiré l'aversion la plus forte, qui révoltent nos sens & notre imagination, qui pénètrent nos esprits de tristesse & de douleur. On ne sauroit voir, ni se représenter un homme à l'agonie, sans éprouver ce sentiment involontaire, que l'on ne dépouille pas à moins de dépouiller l'humanité même.

De là naissent des craintes, proportionnées à la grandeur du mal que nous nous figurons confusément dans la mort, & augmentées par la fatale certitude où nous sommes que c'est un mal inévitable. Les maux qui roulent dans la sphère de la vie, auxquels nous nous flattons de nous soustraire, ou dont nous espérons de revenir, nous effrayent bien moins que celui-ci, dont il n'y a nul moyen de se sauver, & sur lequel l'espérance ne darde plus ses rayons.

Si l'animal meurt en paix, il doit cette heureuse sécurité à son manque d'intelligence, comme nous devons nos craintes à la faculté de prévoir notre sort. Ce seroit bien pis, si cette prévision alloit jusqu'à nous marquer le moment où nous devons finir. Notre unique ressource est d'imaginer cette fin dans un avenir vague, & de la reculer en idée à mesure que nous en approchons: ressource pitoyable, mais qui cependant assoupit nos inquiétudes, & nous permet de goûter quelques plaisirs semés sur notre route.

La crainte de la mort, ai-je dit, est proportionnée à la grandeur du mal que nous nous y figurons; grandeur vraie ou apparente. Car enfin, nous pourrions nous tromper. Peut-être la mort n'est-elle pas un mal; peut-être est-elle un bien; mais cela ne l'empêche point d'être un objet de crainte pour nous. Nous la craignons, parce que la Nature nous ordonne de la craindre, parce qu'elle a attaché une

une ſenſation triſte à ſon idée, & a peint de ſombres couleurs les ſcènes qui l'environnent. Nous la craignons déjà ſans ſavoir, ſans ſonger même, ni en quoi elle conſiſte, ni à quoi elle conduit.

A' la crainte naturelle de la mort ſe joignent enſuite des craintes réfléchies, qui dépendent des principes religieux ou philoſophiques dont on a été nourri dès ſon enfance, ou que l'on a choiſis dans un âge plus mûr. Or ici les impreſſions dont les hommes ſont frappés en penſant aux ſuites de la mort, varient, non-ſeulement ſuivant le point de vue ſous lequel chacun d'eux enviſage ce grand avenir, mais encore ſelon les degrés d'attention, & les degrés de ſenſibilité, ſelon le tempérament, l'humeur, la diſpoſition particuliere de chaque individu: les temps, les lieux, les événemens, mille modifications accidentelles y influent: ces impreſſions s'affoibliſſent ou ſe renforcent du jour au lendemain, d'heure en heure, de moment en moment. Ce qui allarme les uns, fait la conſolation des autres: & ſouvent lorſque deux perſonnes s'allarment, ou ſe conſolent, c'eſt par des motifs diamétralement oppoſés; choſe étonnante, ſi les bizarreries de l'eſprit humain devoient nous étonner.

Or, dans cette fluctuation des penſées de l'homme, qu'eſt-ce qu'un œil philoſophique peut démêler de conſtant & de certain? Et quelle propoſition générale pouvons-nous établir ſur des phénomènes auſſi variables? Nous ſavons que la mort nous inſpire une crainte naturelle, non réfléchie, indépendante de toute autre vue: mais ne ſemble-t-il pas que la perſpective de l'avenir qui ſuccède à la mort, doive produire, dans différens eſprits, des impreſſions différentes, aſſorties aux principes dont ils ſont imbus? Si je diſois donc que, malgré la différence, & la contrariété même des dogmes, ou des hypothèſes qui ont cours dans le monde, la crainte eſt encore l'effet ordinaire que cette perſpective produit ſur le gros des hommes, ne ſemblerois-je pas avancer un paradoxe? C'eſt cependant ce qui, après un examen mûr & impartial, m'a paru vrai; & j'eſſayerai de le prouver.

Toutes les opinions touchant notre destinée future peuvent être comprises sous deux chefs. Ou la mort est la fin de l'homme; ou elle est le passage à une autre vie, à un nouvel ordre de choses: *aut finis, aut transitus.*

La premiere de ces opinions n'est pas celle du grand nombre. Fondée sur des argumens au-dessus de la portée commune, elle n'influe que fort peu dans la vie ordinaire. Quand elle seroit démontrée à la rigueur, elle ne feroit jamais fortune, parce que l'autorité publique lui manqueroit toujours. Elle n'a aucune tradition pour appui, elle ne sauroit entrer dans un corps de doctrine nationale; la Législation & la Politique s'opposeroient elles-mêmes à ses progrès.

Mais cette opinion est-elle propre à nous tranquilliser sur les suites de la mort, & à nous délivrer de toute inquiétude? Les Epicuriens le croyoient, & Cicéron même la trouvoit au moins fort consolante. Aristote en jugeoit différemment: il dit que la mort est la plus terrible des choses, parce qu'elle est la fin de toute chose, & qu'au-delà il n'y a plus ni bien ni mal à attendre (*).

Chacun doit ici se juger lui-même; il saura mieux que personne comment il est affecté par la pensée qu'après le trépas c'en est fait pour toujours, & que toute son existence s'exhalera dans son dernier soupir. Si pourtant on recueilloit les suffrages, je me persuade que la plupart conviendroient que cette pensée les afflige. L'instinct qui fait frissonner l'homme à l'idée de la mort, le laisseroit-il tranquille à l'idée de sa destruction totale? Et le néant n'est-il pas la mort de l'être? Il est vrai que lorsqu'il ne sera plus, il n'aura plus rien à craindre: mais c'est cela même qu'il craint, de n'être plus; & il le craint pendant qu'il est encore.

En un mot, on est accoûtumé à sentir, à vivre, à être quelque chose. Au milieu des misères humaines, on a goûté des plaisirs, on

(*) Φοβερώτατον δὲ ὁ θάνατος· πέρας γάρ, καὶ οὐδὲν ἔτι τῷ τεθνεῶτι δοκεῖ, οὔτε ἀγαθὸν, οὔτε κακὸν εἶναι. *Eth. ad Nicom.* Lib. III. c. 6.

on a connu les charmes de l'amour, de l'amitié, de la vertu, on a cultivé sa raison, on a orné son esprit. Ces plaisirs ont engendré la notion & le désir du bonheur; nos maux & nos vices mêmes nous ont fait concevoir la possibilité d'un état plus parfait & plus heureux. Ce n'est donc pas sans peine que l'on s'arrache, pour ainsi dire, à soi-même, & que l'on se dit: tu mourras tout entier, & il ne restera de toi qu'un peu de cendre & de poussière. Nous n'avons plus rien à craindre . . . Mais aussi nous n'avons plus rien à espérer. Or nous sommes faits de façon que si vous éteignez en nous l'espérance, la crainte renaît d'elle-même dans notre esprit, & sort de ce grand vuide que vous y avez laissé. Le Rien s'anime dans notre imagination sous une forme effrayante: ou, comme nous ne saurions nous en faire une idée positive, nous nous le figurons sous l'emblème des ténèbres, qui sont la privation du jour, comme il est la privation de l'être: il nous semble donc enfoncer dans un sombre abyme, d'où il n'y a plus de retour à la lumière.

Ce qui me persuaderoit encore que cette pensée porte sur un fond lugubre, c'est l'usage qu'en ont fait les chantres de la Volupté. Ils nous la font voir couchée parmi les tombeaux, les urnes, & les cyprès, sur les bords de ce gouffre ténébreux qui doit nous engloutir. Encore quelques momens, & tout est fini: pressez-vous de vivre; car vous ne vivrez qu'une fois: jouissez de ces plaisirs qui passeront bientôt, & que le Temps emportera sur ses ailes rapides. Voilà le précis de cette morale lubrique qu'Anacréon, Catulle, Horace, Chaulieu ont rendue si séduisante dans leurs immortelles chansons. Mais n'est-il pas visible que la beauté de ces morceaux est dans le contraste, & que le Néant est là comme l'ombre au tableau, pour mieux faire sortir la figure principale?

Cela est si vrai que pour peu que l'on appuyât sur ces idées, non seulement elles manqueroient leur effet, mais produiroient un effet contraire, celui de nous révolter. Aussi ces sortes de peintures exigent-elles la touche la plus délicate; & ce n'est qu'aux maîtres de

l'art

l'art qu'elles ont réussi. Ce Trimalcion, ce sot magnifique, dont Pétrone a décrit le festin, fait voir un squelette à ses convives pour leur donner de l'appétit. (*) Catulle s'y prend tout autrement, quand il invite sa Lesbie à vivre & à aimer: il lui montre un Soleil dans son couchant, suivi d'une nuit éternelle; mais il la laisse à peine un instant dans la douce mélancolie que cette image a versée dans son ame, qu'il se hâte de la dissiper par les caresses les plus tendres, & par les plus vifs transports. (**)

Si l'idée de la destruction de notre être, ou de notre personnalité, nous répugne & nous attriste, on penseroit au premier abord que la persuasion de sa durée au-delà du tombeau dût nous causer la joie la plus vive; ou, si elle n'est pas en état de vaincre notre répugnance pour l'instant fatal par où nous devons passer, qu'elle dût au moins adoucir l'amertume de ce passage, & consoler l'homme de la nécessité de mourir. Fort bien; mais prenons garde que pour rendre cette persuasion agréable ou consolante il ne suffit point de nous croire immortels; il faut que nous ne perdions pas à l'être, & que l'immortalité soit pour nous un état de perfection & de bonheur. Or il n'y a aucun système, ni philosophique ni religieux, qui nous garantisse ce dernier point.

Quand je dis aucun système philosophique, j'entends ceux qui enseignent l'immortalité des ames; & je ne mets pas en ligne de compte cette ancienne philosophie qui après la dissolution des corps, les fait refluer dans l'Ame universelle d'où elles sont émanées; ainsi qu'un flacon qui flotte sur la mer, venant à se briser, restitue à l'Océan la liqueur

(*) *Petronii* Sat. c. 34.

(**) *Vivamus, mea Lesbia, & amemus.*

\- - - - - - -

Soles occidere & oriri possunt.
Nobis quando semel occidit brevis lux,
Nox est perpetua una dormienda.
Da mi basia mille, & deinde centum, etc.

liqueur qui le remplissoit. Selon cette doctrine, d'ailleurs toute renfermée chez les philosophes, l'ame, après la mort, n'est plus rien par elle-même, & notre personnalité est détruite, autant qu'elle le seroit si nous n'étions qu'un composé de matière, ou autant qu'elle le seroit par l'annihilation. Le sentiment individuel, ce qui s'appelle NOUS, périt également; soit qu'il vienne à être absorbé par un autre esprit, qui n'est pas NOUS; soit qu'il n'en existe plus rien dans l'univers; soit enfin que ses élémens dispersés retombent dans l'abyme de la Matière, & se confondent dans la masse commune.

Dans toutes les religions, comme chez tous les philosophes Théistes, l'immortalité des ames est jointe à un état de punition, aussi bien que de récompense. C'est ainsi qu'elle a été reçue chez toutes les nations, & dans tous les siècles, & qu'elle l'est encore chez les Payens, les Juifs, les Chrétiens, & les Mahométans. Toutes ces religions ont leur Pluton, leur Rhadamante, leurs Euménides, leurs lacs de bitume & de souffre: elles nous prêchent toutes une puissance dont la rigueur s'appesantit sur les coupables, & leur fait expier leurs fautes par de sévères châtimens. Le peuple a sucé ces principes avec le lait; il les respecte; & ni les dissipations du monde, ni les subtilités de la Philosophie ne sauroient les déraciner de son esprit.

L'espérance, je l'avoue, est ici à côté de la crainte; mais pour peu que l'on y veuille réfléchir, on sentira combien l'une est foible en comparaison de l'autre. C'est que d'abord l'incertitude de notre sort à venir est un mal certain, qui nous suit durant tout le cours de notre vie: c'est que, dans toutes les occasions, la crainte agit bien plus puissamment sur nous que ne fait l'espérance: c'est qu'enfin, dans tous les systèmes religieux, il y a beaucoup plus à craindre qu'à espérer.

Voulez-vous savoir de quel genre d'impressions les objets de l'autre vie affectent le plus communément les hommes? Ouvrez les yeux sur les superstitions qui ont couvert, & qui couvrent encore la face

de la Terre. Dans ces temples, dans ces autels qui fument en l'honneur des Dieux & des Démons, dans cette foule de rites absurdes, monstrueux, cruels, ne voyez-vous pas la raison humaine bouleversée, écrasée sous le poids des terreurs religieuses, & le monde présent qui tremble devant le monde à venir? Ne voyez-vous pas que par-tout on se peint Dieu comme un être terrible plutôt que comme un être aimable, comme un tyran barbare plutôt que comme un pere tendre & bien-faisant? Car assurément la superstition n'est pas fille de l'Amour, mais de la Crainte.

Je ne sais s'il y a une seule religion où la vertu suffise pour conduire les hommes à la béatitude future. La Religion bornée à la Morale est une réduction philosophique, où la multitude n'a jamais acquiescé; il lui faut des mystères, des traditions, des cérémonies, des mortifications, des pratiques pénibles & gênantes; quoi qu'on puisse leur dire, la plupart les regarderont toujours comme une partie très essentielle de l'hommage qu'ils doivent à la Divinité. Et toutes les fois qu'ils sentiront de la peine à croire, ou qu'ils manqueront d'assiduité pour le cérémonial, ce qui arrive journellement, la pureté du cœur, & la vie la mieux réglée ne les rassureront pas.

Ce ne sont pas seulement les cultes idolâtres qui inspirent ces sortes de terreurs; on les retrouve dans les cultes les plus purs; & le Christianisme même est bien éloigné de nous en affranchir. N'y voyons-nous pas les hommes les plus pieux assiégés de scrupules, de défiance, de craintes? Et ils vous diront que ces craintes leur sont nécessaires pour affermir leurs pas dans une carrière aussi glissante. Le Christianisme a encore ceci de particulier, qu'il ne promet dans l'autre vie que des biens spirituels, dont on ne se forme point d'idée, ou qu'une idée extrêmement vague, & qui pour des hommes plongés dans les sens & dans la matière ne sauroient avoir beaucoup d'attraits; tandis que les châtimens dont il menace, l'action du feu sur nos corps, & les remords de l'ame, se conçoivent très distinctement, & par-là sont très propres à nous épouvanter; parce que ce sont de ces choses

que

que nous avons éprouvées, & dont nous avons l'avant-goût dès cette vie. Que sera-ce si vous y ajoutez certains dogmes, ou généralement reçus parmi les Chrétiens, ou du moins dans les partis dominans, la durée éternelle des supplices, la Prédestination, la Réprobation? Il y a là de quoi faire dresser les cheveux à tout homme sincèrement convaincu de la vérité de ces dogmes. Mais rentrons dans notre sphère.

L'ame meurt avec le corps, ou elle lui survit: il n'y a point de milieu entre ces deux choses; mais ce milieu peut se trouver dans notre esprit: nous pouvons flotter dans l'incertitude; cette disposition n'est pas même fort rare, & tous les hommes qui pensent, l'éprouvent, ou l'ont éprouvée. Une fameuse Secte de l'Antiquité, qui s'est plutôt renouvellée qu'éteinte, a regardé ce doute philosophique comme le parti le plus sage, & le plus propre à nous tranquilliser. On objecte que c'est chercher le calme au milieu d'une mer agitée, & bâtir l'édifice du bonheur sur le sable mouvant.

Je ne disputerai point si ce parti est le plus sage; il seroit très insensé s'il étoit volontaire, ou s'il pouvoit l'être. Un homme de bon sens ne doute jamais pour le plaisir qu'il y a à douter; mais parce qu'il y est contraint par la foiblesse de ses lumières, ou par l'équilibre des raisons. Qui ne préféreroit, si cela dépendoit de lui, de voir clair en toute chose, & de se débarrasser de toute incertitude? Mais si le doute est désagréable en lui-même, il l'est bien plus encore lorsqu'il tombe sur des matières qui nous touchent de si près, & où nous sommes si fortement intéressés. Les Athées en conviennent aussi bien que les Théistes, & Lucrèce s'est exprimé là-dessus aussi énergiquement que le feroit un de nos plus zélés Théologiens: *car il ne s'agit point*, dit-il, *de l'heure qui s'envole, mais de notre destinée pendant l'immense éternité.* (*)

(*) *Temporis æterni quoniam, non unius horæ*
Ambigitur status.

Lib. III. 1086.

Il y a encore cette observation fâcheuse par rapport au Pyrrhonisme; c'est que l'homme qui a embrassé une opinion quelconque, n'a pour son compte que la portion de crainte attachée à cette opinion, & il prend ses mesures en conséquence: au lieu qu'en ne tenant à aucune doctrine fixe, on est en butte à toutes les impressions sinistres qui naissent des deux doctrines opposées. On a donc deux sortes de craintes au lieu d'une, avec peu ou point d'espérance, & sans savoir à quel expédient recourir. Car d'une part, la mortalité des ames ne laisse rien à espérer: & de l'autre, quel espoir peut vous donner le système qui déclare les ames immortelles, tandis que sa vérité vous est suspecte? Et si dans cet embarras vous consultez les principes religieux, vous apprendrez que l'espérance est absolument nulle sans la Foi.

J'ai voulu prouver que la mort inspire aux hommes une crainte naturelle & des craintes réfléchies; qu'on la craint en elle-même, & qu'on la craint dans tous les systèmes, & hors de tous les systèmes.

Mais étoit-il besoin de toutes ces preuves? & ne suffisoit-il pas d'un coup d'œil jetté autour de nous? Les hommes qui par état, par principes, par tempérament, s'occupent fortement de la mort, ne sont-ils pas reconnoissables à leur air morne & silencieux, & à leur éloignement pour le plaisir? Et les hommes en général ne sont-ils pas obsédés de ces idées, aussitôt qu'il y a quelque dérangement soit dans le physique, soit dans le moral de leur être? Ne sont-ce pas là les Furies qui poursuivent les criminels, & les fantômes qui hantent les hypocondriaques?

II.

Nous avons déjà vu que malgré l'universalité de son empire, la crainte de la mort n'est pas au même degré chez tous les hommes, ni chez le même homme en tout temps. L'homme sauvage, par exemple, y sera moins sujet que l'homme civilisé, parce que sa vie approche plus de la vie animale. L'idée de la mort qui dans la Société se retrace à tout moment, s'offre bien plus rarement à son esprit, celle de

l'ave

l'avenir plus rarement encore; & elles n'y laiſſent point d'impreſſion durable: il n'y a perſonne qui les lui rappelle à titre d'office, & ſon ame n'a preſque point de retour ſur elle-même.

Mais dans la vie ſociale même la crainte de la mort ſouffre des adouciſſemens. L'homme de bien, fortifié par ſes principes, & par l'innocence de ſes mœurs, fléchit ſans murmure ſous le joug de la néceſſité: chez lui la peur de mourir ne prévaudra jamais ſur ſes devoirs, & un lâche amour de la vie ne l'écartera point de la vertu, le ſeul bien pour lequel il vaille la peine de vivre.

C'eſt peu d'adoucir cette crainte; elle peut être ſurmontée. Et qu'on ne croie point la choſe impoſſible, parce que nous avons dit que c'étoit une crainte naturelle, liée à l'inſtinct conſervateur de l'homme. Ne ſavons-nous pas que les inſtincts les plus naturels, l'amour pour notre progéniture, celui qui unit les deux ſexes, le ſentiment de l'humanité, & juſqu'à l'amour propre, peuvent être étouffés, réprimés, vaincus? Il y a, dans la nature humaine, différens reſſorts, qui ſe détendent les uns plus rarement, les autres plus fréquemment: il y a dans la vie des ſituations qui favoriſent plus ou moins le jeu de ces reſſorts, & amènent quelquefois des motifs qui dominent ſur les motifs ordinaires.

La crainte de la mort eſt naturelle; mais nous avons expliqué pourquoi elle l'étoit; c'eſt qu'il y a un ſentiment déſagréable attaché à l'idée de la mort. Il n'eſt point de doute que ce ſentiment ne produiſe ſon effet, toutes les fois qu'il agit ſeul ſur l'eſprit, ſans rencontrer d'obſtacle, & ſans ſe trouver en colliſion avec d'autres ſentimens, dont la force ſupérieure puiſſe l'obliger à céder. Mais toutes les fois que l'idée de la mort eſt combattue par l'idée d'un mal qui me paroît plus grand que la mort même, ou l'amour de la vie par le déſir d'un bien qui me paroît préférable à la vie, le ſentiment le plus foible diſparoît devant le plus fort. Lorſque les grandes paſſions abſorbent les petites, ces dernières ne ceſſent point pour cela d'être naturelles, &

dans un sens plus naturelles que les autres, parce qu'elles sont plus communes, & plus dans le cours des choses. Tel est le mécanisme de l'esprit humain: tout y est, comme dans le mécanisme des corps, mesuré, calculé, pesé selon les lois de la Dynamique.

Mais quels sont ces motifs si puissans, qui élèvent l'homme si fort au dessus de lui-même, & le font triompher de la nature & de l'instinct? Tout effet doit être proportionné à sa cause, toute force aux obstacles qu'elle a à vaincre. Or il n'y a point, dans le monde moral, de plus grand effet, ni de plus grands obstacles que ceux qui se présentent ici.

On sentira ici de soi-même l'insuffisance de la Raison spéculative, & des systèmes, des dogmes, des hypothèses qu'elle enfante. Ses fonctions se bornent à enfiler des idées, & à combiner des propositions. Et ce n'est pas un contrepoids à opposer aux terreurs de la mort que des syllogismes & des notions abstraites, qui ne sortent pas de l'entendement, & qui n'ont aucun pouvoir actif par eux-mêmes. J'aimerois autant que l'on prétendît contrebalancer un poids de cent livres avec un grain de sable, ou renverser une montagne en soufflant dessus.

Heureux, s'écrie le poëte, *qui connoît les ressorts de la Nature: il foule à ses pieds toutes les vaines terreurs, & le Destin inexorable, & il méprise le bruit de l'avare Achéron!* (*) Ne diroit-on pas que l'étude de la Physique, ou de la Philosophie, est un spécifique sûr contre la crainte de la mort & de l'avenir? Mais les physiciens & les philosophes sont-ils en effet plus intrépides que les autres hommes? Et s'ils ont du courage, peut-on dire qu'ils l'ayent puisé dans leurs sublimes recherches, ou dans leurs profondes méditations? Est-ce

(*) *Felix qui potuit rerum cognoscere causas,*
Atque metus omnes, & inexorabile fatum
Subjecit pedibus, strepitumque Acherontis avari!
Virg. Georg. Lib. II. 490.

ce aux universités, & sur les bancs des collèges que se forment les héros? Est-ce là que l'ame prend cette trempe forte qui fait braver les hazards & affronter le trépas? Tel homme qui ne saura ni lire ni écrire, & qui n'entendit jamais nommer ni Epicure ni Platon, disputera la palme du courage à tous les docteurs de l'école. Un pauvre laboureur, couché sur son grabat, verra l'approche de la mort avec plus de sang froid, & moins de grimaces, qu'un savant enfumé d'argumentations & de catégories. Si les hautes sciences sont un confortatif si merveilleux, & si propre à nous préserver de toute frayeur; que ne les enseigne-t-on aux soldats, au lieu de leur exercice? Mais pensez-vous tout de bon qu'un de nos régimens fût grandement allarmé à la vue de dix ou de douze-mille tant philosophes que géomètres, conduits par *Aristote* & par *Newton?*

Je sais que le mépris de la mort a passé en mode chez plusieurs philosophes, & chez des sectes entières; rien ne flatte tant leur orgueil, & leurs fastueuses prétentions. Mais combien de fois la réalité n'a-t-elle pas honteusement démenti ces fausses apparences? Quand on leur voit étaler leurs superbes maximes, & se donner des secousses pour paroître ce qu'ils ne sont pas, ils font souvenir de Sosie qui veut *se faire du cœur par raison.* Le vrai Sage ne rougit pas d'être homme; & le vrai brave fait moins de bruit; il laisse aux poltrons à faire des Traités sur le courage, & il se contente d'en avoir.

Le raisonnement, par lui-même, ne sauroit donc bannir de nôtre esprit la crainte de la mort. Et en général cette influence sur nos sentimens, & sur notre conduite, que l'on a coûtume d'attribuer à la Raison, ne lui appartient jamais en propre. Un syllogisme en bonne forme nous satisfait dans la théorie; mais de là il y a loin jusqu'à sentir & à agir. La Raison ne peut influer sur nos actions que d'une manière indirecte, autant qu'elle touche aux causes immédiates, à quelque passion capable de nous échauffer. Et dans ce cas les demi-preuves, les sophismes mêmes, seront souvent plus efficaces que les preuves catégoriques, & les démonstrations rigoureuses.

La

La peur eſt un ſentiment, une émotion, une paſſion, que l'on ne ſurmonte que par un ſentiment plus fort, par une émotion plus vive, par une paſſion prépondérante. Il n'en eſt à la vérité aucune qui ne puiſſe atteindre à ce degré de hauteur: l'amour, l'amitié, la haine, l'ambition, la ſoif de ſe venger, la honte, l'amour de la vertu, pur ou intéreſſé, le zèle religieux, & le zèle fanatique, toutes en un mot, peuvent s'exalter juſques-là. Les motifs les plus oppoſés entr'eux nous font également braver la mort; pourvu qu'ils acquièrent cette chaleur vive & triomphante qui nous ſoumet à leur empire, & les rend maîtres de nos cœurs. La choſe eſt aiſée à comprendre. Quelque contraires que ſoient ces motifs, ils concourent en ceci, qu'ils peignent à l'imagination, ou un mal plus redoutable que la mort, ou un bien plus précieux que la vie.

Gloire, devoir, liberté, patrie, ces mots gravés en traits de feu dans les grandes ames, quels prodiges n'ont-ils pas opérés? quels beaux ſpectacles n'ont-ils pas donnés au monde? C'eſt eux qui animèrent les héros de tous les âges, les Miltiade, les Léonidas, les Pauſanias, les Epaminondas, les Horaces, les Dèces, les Paul-Emile, les Scipions. C'eſt pour eux que les trois-cens Spartiates versèrent leur ſang dans le défilé des Thermopyles, & les Suiſſes dans la terrible journée de St. Jâques, qui eſt au-deſſus de celle des Thermopyles.

L'eſpoir d'une meilleure vie & des récompenſes qui y ſont réſervées aux gens de bien, & aux hommes courageux; cet eſpoir, dis-je, embraſſé avec une foi ardente, a inſpiré le même mépris de la mort, non-ſeulement à des particuliers, mais à des nations entières, & aux nations les plus barbares. Tels nous ſont repréſentés dans l'Hiſtoire les Thraces, les Gètes, les Germains, les Bretons, les Gaulois, les Arabes, tous ces peuples inſtruits par Odin, par les Druides, par Mahomet. Il n'en falloit pas même tant à pluſieurs d'entr'eux; la doctrine de la Métempſychoſe ſuffiſoit pour en faire des lions dans les combats: erreur heureuſe, dit Lucain, qui les fait courir à la mort à travers les lances & les épées, & leur fait regarder comme

me le dernier des lâches celui qui ménageroit une vie qu'il va recouvrer. (*)

Cicéron insinue dans ses Tusculanes, & ailleurs, que les illustres Romains qui s'immolèrent pour la patrie, furent animés par de semblables motifs. Et quoique l'immortalité seule du nom ait souvent été un aiguillon assez puissant; il est pourtant sûr que leur religion élevoit ces héros patriotes au faîte de la félicité, & nous les voyons briller au premier rang parmi les citoyens de l'Elysée:

Hic manus ob patriam pugnando vulnera passæ.

Tacite dit la même chose des Juifs; ce qu'il faut probablement entendre de ceux auxquels son histoire se rapportoit; car il est au moins très incertain que dans les anciens temps le dogme de l'immortalité ait été connu du gros de la nation Judaïque. Quant aux martyrs de l'église Chrétienne, ce motif leur faisoit non-seulement mépriser, mais désirer ardemment les supplices & la mort. Ils avoient du martyre à peu près les mêmes idées que les payens de la mort pour la patrie: comme ils y attachoient un plus grand prix qu'aux vertus ordinaires, ils lui promettoient aussi dans la vie à venir des prérogatives spéciales. C'étoit alors l'opinion courante que ce genre de mort les sauvoit de la conflagration universelle, & du feu expiatoire que les autres devoient subir, & leur donnoit la place la plus distinguée parmi les Justes qui auroient part à la première résurrection, & au règne millénaire.

Mais, comme nous l'avons dit, il n'est pas besoin de motifs aussi sublimes. Toutes les passions ont leur enthousiasme, ou leur fureur;

(*) *Certè populi, quos despicit Arctos,*
Felices errore suo, quos maximus ille
Terrorum haud urget, leti metus. Inde ruendi
In ferrum mens prona viris, animæque capaces
Mortis, & ignavum rediturae parcere vitæ.
Lib. I. 460.

fureur; & dans des accès aussi violens il n'est rien qu'on ne leur sacrifie. Lorsque plusieurs de ces passions, en vertu des rapports qui les lient, se réveillent mutuellement, & vont ensemble au même but, l'on conçoit qu'elles doivent gagner beaucoup en énergie, & que de la concentration de tant de feux il se formera un foyer plus brûlant. Or cette association a presque toujours lieu. Comme tous les objets de nos désirs, ou de notre aversion, ont plusieurs faces; il est rare que nous soyons affectés par une seule de ces faces à la fois, & qu'ils ne frappent, pour ainsi dire, qu'un seul coup sur notre ame. Supposons qu'à l'amour de la gloire, ou de la liberté, se joignent un ressentiment cruel, une haine atroce, une fureur fanatique; car les motifs les plus criminels peuvent se mêler aux plus louables: tous ces ressorts débandés doivent nécessairement produire une explosion plus forte. Nous en avons l'exemple dans la féroce intrépidité de ces peuples sauvages, que l'on voit défier la mort, & rire dans les tourmens. Elle leur est inspirée tout ensemble par l'honneur, par la vengeance, & par l'espoir d'un heureux avenir; car s'ils meurent sans se venger, ils sont attendus, après la mort, dans un lieu de délices, où ils boiront leur Nectar dans les crânes sanglans de leurs ennemis.

Quand je lis les fragmens qui nous restent des chansons de Tyrtée, je ne suis nullement surpris du succès prodigieux que l'Antiquité leur attribue. A l'exception des récompenses dans une vie future, j'y vois mis en œuvre tout ce qui peut remuer des cœurs nobles & généreux. Avec quel enthousiasme les vertus guerrières n'y sont-elles pas célébrées! Ce sont les premières des vertus; toutes les autres qualités, soit du corps soit de l'esprit, ne sont rien en comparaison. Tantôt il rappelle aux Lacédémoniens leur illustre origine: dignes descendans du grand Hercule, la valeur de ce héros invincible doit revivre en eux. Tantôt il condamne les lâches & les fuyards à l'ignominie & au mépris éternel. Là il leur montre leurs femmes, leurs enfans, leur ville, qui attendent d'eux seuls & leur gloire & leur salut. Ici il fixe les regards de la jeunesse sur de vénérables

vieil-

vieillards, qui, malgré leurs cheveux blancs, & le poids de leur âge, combattent encore au front de l'armée, & donnent la dernière goutte de leur sang à la patrie. Mais quel éclat n'environne point le citoyen intrépide, lorsque couvert de sang & de poussière, il rentre victorieux dans Sparte? Tous les habitans quittent leurs foyers pour sortir au devant de lui: l'air retentit d'acclamations, ses louanges volent de bouche en bouche; il est l'idole de sa nation, & partout on lui cède les premières places, & les premiers honneurs. Enfin peut-il rien lui arriver de plus glorieux que de tomber dans les champs de Bellone, le bouclier, la cuirasse, la poitrine criblés de coups? Quelle plus belle mort que de mourir pour son pays; de sacrifier au devoir & à la vertu une vie périssable, qui tôt ou tard nous sera enlevée à tous? Ici on nous peint toute la ville en deuil, suivant la pompe funèbre, & bénissant la mémoire de ce digne citoyen, l'amour & la reconnoissance publique rejaillissant sur sa postérité jusques aux dernières générations, son nom sauvé de l'oubli, & respectable aux races futures.

Tels étoient les chants de Tyrtée; & l'on retrouve le même usage chez d'autres peuples, surtout chez les barbares du Septentrion. Peut-on douter de l'influence de tous ces grands motifs, animés par les charmes de la Poésie, & par le son des instrumens? Et s'il y a encore des gens qui la rejettent, & la croient impossible, que penser d'eux, & comment les qualifier? Il faut donc qu'ils n'ayent rien senti à la lecture de ces poëmes, & que leur ame soit aussi sourde à la voix de l'honneur que leur oreille aux accens des Muses.

C'est par de semblables moyens que le courage & les vertus guerrières peuvent tourner en habitude, & devenir esprit de corps, ou même esprit national. Elles ne sont assurément pas nées avec l'homme: être foible & borné, depuis son premier jusqu'à son dernier instant assiégé de besoins, d'infirmités, de maux de toute espèce, incertain de son sort, entraîné par le courant rapide des années, victime dévouée au tombeau, sa fragile constitution ne l'invite pas à mépriser la douleur & la mort; il lui est, au contraire, très naturel de

les craindre. L'essor d'une grande passion le fait triompher de cette crainte; mais comme ces passions n'ont qu'un éclat momentané, le courage ne seroit encore, comme il l'est en effet chez la plupart des hommes, qu'une qualité journalière, & moins une qualité que l'accès d'une fièvre intermittente. Cependant il n'est point de passion qu'on ne puisse rendre habituelle, au point qu'elle éclatera toutes les fois qu'on lui présente la moindre amorce. Ainsi le secret consiste à flatter & à nourrir les dispositions qui peuvent donner au courage un caractère fixe & durable, autant que la foiblesse humaine le permet. On y parvient par une éducation mâle, par la Gymnastique qui endurcit le corps, par les grands exemples qui tiennent l'esprit en haleine, par le point d'honneur, par les récompenses & les châtimens; en un mot, en réunissant tous les motifs dont nous avons parlé, en ne donnant point de relâche à l'imagination, qu'ils n'y soient profondément gravés, & en écartant avec soin tout ce qui pourroit les affoiblir, ou les détruire.

Ce qui, dans le courage guerrier, ou en général dans cette espèce de courage qui fait mépriser la mort, paroîtroit peut-être le plus difficile à concilier avec notre explication, c'est le sang froid, la sérénité d'esprit au milieu des dangers; qualités essentielles cependant dans un homme de guerre, & surtout dans l'officier, & dans le chef de l'armée. Les passions nous précipitent en aveugles, & telle est l'impétuosité de la bouillante jeunesse, avant que l'âge & l'expérience ayent mûri le jugement. Il n'y a point de courage sans passion; mais d'un autre côté, le commerce des hommes entr'eux, qui les a mis à portée de se mieux étudier les uns les autres, la vie civilisée, le frein des lois, les sciences & les arts ont rafiné presque toutes les passions, & les ont dépouillées de cette férocité brutale qu'elles avoient dans l'état sauvage. Ainsi, quoique toujours subsistantes, elles se tempèrent ou par elles-mêmes, ou les unes par les autres: nous sentons que pour mieux les satisfaire, il nous importe souvent d'en réprimer les effervescences. Quelque avare que soit un homme, il ne se jettera pas sur le premier argent qui lui tombe sous les yeux, ni le voluptueux

fur le premier objet qui irrite sa cupidité: ils prendront des voies détournées pour se les approprier. Il en est de même des plus belles & des plus nobles passions: l'amour de la gloire, ou celui du devoir, nous font rechercher les moyens les plus sûrs de réussir. C'est ainsi que l'expérience, l'exemple, l'étude de l'Art, l'envie de s'y distinguer forment peu à peu ce courage calme, qui prévoit, qui combine, & choisit la route la plus certaine pour arriver à son but. Ce n'est point l'étude & la réflexion qui nous donnent le courage, ni les sentimens qui le réveillent; un poltron peut être parfaitement versé dans la théorie de la Guerre. Mais la passion qui produit le courage, éclairée sur ses intérêts, arrête sa propre fougue, nous fait raisonner & réfléchir, prendre des mesures, & observer les momens favorables. Voilà pourquoi cette présence d'esprit a toujours passé pour le chef-d'œuvre d'une valeur consommée; les victoires les plus célèbres ont été remportées, & les plus fameux capitaines se sont illustrés par elle. C'est elle qui faisoit le grand mérite d'*Annibal:* & c'est ainsi que pour combler l'éloge de *Marlborough*, on nous le dépeint, dans les champs de Blenheim, semblable à l'ange de la Tempête, qui tranquille au sein d'un tourbillon, commande aux ouragans, dirige le tonnerre, & marque à la foudre où elle doit frapper.

Lorsque dans une société, dans une armée, dans un état, les lois, les mœurs, la police, le gouvernement, tout conspire à faire germer le courage & l'esprit martial; ils y deviennent, à la longue, le caractère dominant, & se communiquent à tous les citoyens, jusqu'aux femmes & aux enfans, comme cela s'est vu dans l'ancienne Lacédémone. Cet esprit a régné dans toutes les républiques naissantes; il a brillé singulièrement dans ces violentes crises où un péril prochain les menaçoit de la perte de leur liberté. On le voit encore dans les corps militaires bien disciplinés, où l'exercice, l'ordre, l'émulation, l'habillement, le maniment des armes, la musique guerrière, & bien d'autres choses qui paroissent frivoles, mais qui ne le sont pas, concourent à l'entretenir. Car il faut les mêmes attentions pour con-

ferver le courage qu'il a fallu pour en faire contracter l'habitude: il faut que les mêmes motifs foient toujours là pour exciter les mêmes fentimens; fans quoi l'homme reviendra infenfiblement à fa timidité naturelle. Le courage eft bien éloigné d'être un caractère indélébile. Il s'énerve & dépérit, faute d'alimens: il fe perd dans l'oifiveté, dans les plaifirs, dans le relâchement de la difcipline & des mœurs. Témoin la Grèce & Rome, & tous ces empires puiffans qui ont trouvé leur époque fatale dans le fein de leur profpérité même, & corrompus par les richeffes, par le luxe, par la volupté qui amollit les ames, font defcendus du faîte de la gloire & de la grandeur, & ont épouvanté l'univers de leur chute.

III.

Toutes fortes de paffions nous font furmonter la crainte de la mort, ou l'amour de la vie, lorfque dans leur conflit avec cet amour, ou avec cette crainte, elles gagnent le deffus.

Une peur plus forte que celle de mourir, fait infailliblement braver la mort; mais qu'eft-ce qui portera l'homme à fe la donner? la peur de vivre. Il y a dans la vie des maux extrêmes, qui la rendent infupportable, qui jettent dans le délire & dans le défefpoir, & de là conduifent au Suicide.

Le défir d'un bien que nous eftimons plus que la vie, nous la fera rifquer fans peine contre l'efpoir de poffeder ce bien; mais il faut quelque chofe de plus pour nous la faire abandonner de nous-mêmes, & nous en ouvrir l'iffue par nos propres mains. Il faut que ce bien, que nous pourfuivons avec tant d'ardeur, nous paroiffe placé hors du cercle de la vie, & que nous défefpérions d'en obtenir la jouiffance autrement que par la mort.

Nous voyons ici le défir & l'averfion produire les mêmes effets: & cela doit être, parce que ces deux chofes ne vont jamais l'une fans l'autre. L'averfion pour le mal que nous fouffrons nous fait défirer la

mort;

mort; & le désir du bien que nous espérons, nous fait prendre la vie en aversion. Le désir est une peine, comme je crois l'avoir prouvé ailleurs (*), & par conséquent il peut être la source du désespoir. A quels actes désespérés ne voit-on pas se porter l'homme tourmenté par la faim, ou brûlé par la soif, lorsqu'il ne trouve pas de quoi se nourrir, ou de quoi se désaltérer? Il en est ainsi de tous les désirs, & de toutes les passions véhémentes; elles sont la faim & la soif de l'ame.

Ainsi dans les deux cas notre vie présente est également pour nous un mal-aise, une peine qui nous excède, que nous sommes trop foibles pour endurer, & dont nous voulons nous affranchir par le trépas. Je me sers ici indifféremment des noms de douleur, de peine, de mal, de mal-aise: & je ne distingue point entre maux réels & chimériques; tout mal est réel pour celui qui le sent.

Ce n'est donc que le sentiment du mal, porté jusqu'au désespoir, qui peut armer l'homme contre lui-même. Les raisonnemens, les calculs, les spéculations n'ont pas ce pouvoir funeste. Quand il seroit démontré que dans la vie humaine la somme totale des maux surpasse de beaucoup celle des biens; cela ne détermineroit personne au suïcide.

Déjà, si l'on considère l'impression que font sur nous les idées de la mort & de l'avenir, & les principes dans lesquels la plupart des hommes sont élevés; il n'est pas surprenant qu'ils aiment mieux supporter la vie, avec toutes ses misères, que de recourir à un remède qui leur semble pire que le mal, & de s'exposer encore aux plus grands hazards, après s'en être servis. *La Nature ne retient personne*, me dit un Stoïcien. Je sais qu'elle ne me lie pas les mains; mais elle lie ma volonté; & pour m'empêcher de les mouvoir, elle enchaîne le principe moteur. *Sors de la chambre qui fume.* Mais ce n'est pas tout: où aller, & que devenir après en être sorti? Je désire d'être guéri

(*) *V. un Mémoire* sur le Désir, *dans* l'Histoire de l'Académie, *année 1760.*

guéri de la migraine; mais je ne veux pas l'échanger contre la goutte ou la gravelle. Supposons que j'aye surmonté mon aversion pour la mort, & pour le néant: je puis me tuer sans doute, mais je ne puis pas m'anéantir.

Mais je veux que nous soyons assurés que la dissolution du corps est le terme de tout: cela ne nous fera pas encore hâter ce terme.

Quoiqu'il soit exactement vrai qu'une vie où la somme des maux est la plus forte, vaut moins que le néant, on ne se règle pourtant jamais sur une pareille estimation. On se laisse décider par le moment où l'on est, & par les situations qui le remplissent. La vie est une chaîne d'états qui se succèdent. Lorsque dans un de ces états il y a plus de peine que de plaisir, j'aspire à le quitter: & le même désir renaît toujours sous les mêmes circonstances. Jusqu'ici donc ce désir est borné à la non-existence précise de l'état où je me trouve, & ne va point au-delà. Qui me délivrera de mes maux? s'écrie le philosophe Antisthène: voici ton libérateur, dit Diogène, & il lui présente un poignard. Ce n'est pas, réplique le premier, de la vie que je veux être délivré, mais de la douleur (*). Ainsi, quand l'homme souffre, ce n'est pas le non-être, mais le mieux-être qui fait l'objet de ses vœux. Il en faut excepter deux cas, que l'on peut considérer comme n'en faisant qu'un, parce qu'ils naissent l'un de l'autre, & se trouvent constamment réunis. Le premier a lieu, lorsque nous ne voyons rien de mieux à attendre; le second, lorsque l'excès de la peine est au dessus de ce que nous pouvons endurer. Dans le premier, la peine s'accroît outre mesure par la seule pensée qu'elle est sans remède. Dans le dernier, n'ayant pas assez de force pour souffrir, comment en aurions-nous pour espérer? Et l'un & l'autre est précisément le cas du désespoir.

Si

(*) *Diog. Laërt.* Lib. VI. §. 19.

Si l'on admet qu'il y a dans la vie plus de mauvais momens que de bons, plus de ces momens dont on désireroit l'absence que de ceux dont on aime la présence, il n'est pas douteux que de tous ces désirs il ne résultât, déduction faite, le désir général de ne pas vivre. Imaginons qu'avant de naître, nous eussions pu contempler le tableau de notre existence future, & que par une évaluation exacte nous nous fussions convaincus que nous y aurions plus à perdre qu'à gagner: quel esprit sensé eût voulu d'une pareille existence, & n'eût préféré de se replonger aussitôt dans le néant? Ou imaginons que toutes nos peines, & tous nos plaisirs, au lieu d'être semés dans le cours de la vie, fussent réunis & accumulés dans une situation unique, qui renfermât notre existence toute entière. N'est-il pas clair que l'excédant des peines nous décideroit à vouloir sortir de cette situation, ou ce qui revient ici au même, nous décideroit pour le non-être, & que nous fuirions alors le mal de vivre comme nous fuyons à présent chaque mal particulier. Mais les choses sont autrement réglées. Nous ne pouvons ni prévoir ni calculer notre sort: une heureuse obscurité dérobe l'avenir à nos regards. Nous ne possédons pas toute notre vie à la fois, & en bloc; nos biens & nos maux sont répandus dans une durée plus ou moins longue. Et c'est ainsi que de désirs en désirs nous nous traînons jusques au bout de notre carrière.

Les philosophes entrent dans des discussions sur le prix de la vie en général: les uns y attachent un très haut prix; les autres y trouvent une non-valeur considérable; il y en a qui croient que tout y est exactement balancé. Mais leurs raisonnemens sur ce sujet ne produiront, ni ne préviendront jamais le suicide, & n'empêcheront personne ni de vivre ni de mourir. La raison peut nous convaincre & nous éclairer; le sentiment seul nous remue.

J'ignore quels étoient les argumens de cet Hégésias dont les disciples alloient terminer leurs jours au sortir de ses conférences. Je sais bien cependant que ce n'est pas à leur solidité que ces événemens tragiques doivent être attribués, mais à l'éloquence dont il savoit les revê-

revêtir, aux peintures vives qu'il faisoit des misères de la vie humaine, comme Valere-Maxime nous le dit en termes exprès (*); & c'est ce qui le fit surnommer *l'Orateur de la mort*. L'éloquence est faite pour agiter le cœur, & pour y allumer de fortes passions: & si l'on se rappelle le pouvoir étonnant qu'elle exerça autrefois sur les esprits, il ne paroîtra pas si incroyable que les discours d'Hégésias ayent pu déranger le cerveau à quelques jeunes gens, ou porter à des résolutions désespérées quelques personnes que peut-être le poids de leur infortune y faisoit déjà pencher. Nous avons, dans un ouvrage moderne, un morceau qu'Hégésias ne désavoueroit pas, & dont la lecture, faite dans un accès d'hypocondrie, ou par des hommes malheureux, ne seroit guères moins pernicieuse que le furent ses harangues. On y voit jusqu'à quel point la cause du Suicide peut être embellie par les prestiges de l'art Oratoire (†).

Il ne s'agit donc pas ici de l'argumentation, mais de l'art d'émouvoir, & de porter le trouble au fond des cœurs. Le paralogisme le plus absurde, animé de l'éloquence meurtrière du sophiste de Cyrène, ou du philosophe de Genève, fera plus d'impression que la preuve la plus concluante, si elle est sèche & ne parle qu'à l'entendement. J'ai appellé Hégésias un sophiste; & je ne le regarde en effet que comme un charlatan. Car, s'il étoit pénétré lui-même des maximes qu'il enseignoit; de quel front voyoit-il expirer ses auditeurs, sans les précéder, ou du moins sans les suivre? Le roi Ptolémée, qui le contraignit de fermer son école, avoit un moyen bien plus sûr de le confondre, en lui proposant l'alternative, ou de cesser ses leçons, ou de s'engager à les pratiquer.

Le Suicide ne prouve donc absolument rien par rapport à la fameuse question, s'il y a plus de biens ou de maux dans la vie. Il prouve seulement qu'il y a des situations désespérées, & que celui qui se tue

(*) Lib. VIII. c. 9.
(†) *Julie*, ou la *N. Héloïse* T. III. L. 21.

tue étoit dans une pareille situation. On n'en sauroit même rien inférer de certain à l'égard de la vie passée de cet homme, ni de celle que la Nature lui réservoit, s'il n'en eût pas coupé la trame; & par conséquent moins encore à l'égard de la vie humaine en général. D'un autre côté, il ne s'ensuit pas davantage que tous ceux qui ne se tuent point, jouissent d'un sort heureux: en un mot, ce n'est jamais d'après de semblables considérations que l'on commet le suicide, ou que l'on s'abstient de le commettre.

Le désespoir naît toujours de l'excès de nos peines. Les douleurs corporelles, & les peines de l'esprit s'y terminent également, lorsqu'elles sont montées à leur comble, lorsqu'il n'y a plus moyen ni de nous en défaire ni de les endurer. Alors se réalise, en quelque manière, la fiction que nous avons employée: notre vie entière nous paroît réduite à la situation cruelle où nous sommes, & la mort le seul chemin pour en sortir. Or, toutes les fois que notre esprit ne voit qu'un parti à prendre, la liberté expire: nous nous jettons dans ce parti comme un corps abandonné à lui-même court au centre de sa gravitation.

J'ai joint le délire au désespoir, parce qu'il n'y a point de désespoir sans délire, & que d'ailleurs toutes les douleurs & toutes les passions extrêmes aboutissent au délire. Mais, quoique cet état soit toujours le même, de quelque source qu'il prenne son origine, & quelles qu'en soient les causes productrices, ces causes cependant opèrent de différentes façons, les unes brusquement, les autres par degrés, & par une marche plus ou moins lente.

La premiere sorte de désespoir a lieu, lorsque l'ame, ébranlée jusque dans son centre, par un coup imprévu & terrible, perd en un moment, avec l'usage de la raison, tout empire sur elle-même. Alors le projet est immédiatement suivi de l'exécution, & avant que l'on soit en état de se reconnoître. Ici la fureur est visible, & il n'y a pas plus moyen de s'y méprendre qu'aux accès d'un homme qui a la fièvre chaude, & qui s'il n'étoit retenu à force de bras, iroit se préci-

piter du haut d'une maison, ou se lancer à travers les eaux & les flammes.

Les symptômes du désespoir sont beaucoup moins frappans, & plus aisés à méconnoître dans un homme qui sourdement miné par de longues peines n'arrive à ce dernier terme que par gradation. Une pensée triste s'empare de son ame; il se livre à cette pensée, & bientôt il n'est plus le maître de l'écarter: tout ce qui y a le moindre rapport, la lui retrace; peu à peu elle se lie à tous les objets, & lui présente toute la nature sous un aspect lugubre. Enfin dégoûté de tous les plaisirs, le cœur flétri, l'espérance éteinte, tous les points d'appui lui manquent, toutes les sources de la vie se tarissent. Ses veilles se confondent avec ses rêves, & le sujet de sa mélancolie devient inséparable de l'idée & du désir de la mort.

Il n'est pas rare que dans ces affreuses extrémités un homme ait attenté à ses jours, sans savoir ce qu'il faisoit; & des personnes dont on a prévenu les desseins meurtriers avant qu'elles ayent pu les exécuter, ou en achever l'exécution, ont avoué qu'elles ne conservoient qu'un souvenir obscur de tout ce qui s'étoit passé dans ces tristes momens. D'autres ont rapporté des choses qui marquoient un délire complet: celui-ci voyoit son ennemi levant le fer pour le frapper, & c'étoit lui-même qui se l'enfonçoit: celui-là entendoit les ombres plaintives de ses ayeux, la voix d'un ami tendre, ou d'une épouse chérie, qui l'appelloient au tombeau; & il se hâtoit de les suivre.

D'autres ont long-temps médité leur coup dans la solitude & dans le silence: ils prennent soin de cacher les noirs projets qu'ils roulent dans leur esprit, & le mal qui les consume, sous un dehors tranquille; & c'est ce qui donne quelquefois au suicide le faux air d'un acte entrepris de sang froid. Mais leur état est pire que ne le seroit une frénésie décidée: & ce qui pourroit leur arriver de plus heureux, ce seroit de ressentir quelque violente secousse qui pût faire diversion à la pensée sinistre dont leur ame est remplie, & les distraire d'eux-mêmes.

més. On ne ſauroit aſſez recommander aux perſonnes dont l'humeur incline vers la mélancolie, de varier leurs occupations, & juſqu'à leurs amuſemens, & de ne jamais tellement tendre leur eſprit en un ſens qu'il ne puiſſe ſe replier. Les biens de la vie ſont à la ſurface des objets, on ne gagne guère à les approfondir.

Ce qui contribue beaucoup à déguiſer ce mal ſous l'apparence trompeuſe du ſang froid, c'eſt que dans ſes premiers périodes il a des intervalles lumineux. La raiſon fait encore des efforts pour le combattre, en oppoſant des penſées agréables aux penſées triſtes, des motifs d'aimer la vie à ceux qui la font haïr. Mais lorſqu'une fois les derniers ont pris le deſſus, & que la raiſon a perdu ſon équilibre, la contagion la gagne elle-même. La faculté que nous avons de réfléchir, ſe change en un ſophiſte dangereux, devient l'avocat de la mélancolie, & le plus cruel de nos bourreaux. Alors elle exagère à l'homme les malheurs de la vie, & l'inſipidité de ſes plaiſirs: c'eſt toujours la même choſe, le retour des mêmes événemens; la vie la plus heureuſe ſe réduit à une ennuyeuſe uniformité; & dût-on entaſſer ſiècles ſur ſiècles, on ne feroit que prolonger ſes ennuis. Enſuite elle travaille à détruire ce grand argument contre le Suicide, que la Nature a gravé dans nos cœurs, la crainte de la mort. Peu à peu on parvient à ſe familiariſer avec elle, à la dépouiller de toutes ſes horreurs, à en chérir l'idée, & à la ſouhaiter: elle n'eſt plus à nos yeux qu'un lieu de refuge, un doux aſyle, un port à l'abri des tempêtes, la paiſible demeure du ſommeil. L'idée de l'avenir vient-elle ſuſciter des ſcrupules? l'un ſe dit: il n'y a rien après la mort, & la mort elle-même n'eſt rien (*); un autre voit les cieux ouverts pour le recevoir; un troiſième ſe raſſure par la bonté infinie de l'être ſuprême, le pere & l'ami de toutes ſes créatures. Et tandis que le déſeſpoir qui fermente dans leur ſein, égare ainſi leurs penſées, l'on s'imagine qu'ils ont l'eſprit libre.

 On

(*) *Poſt mortem nihil eſt, ipſaque mors nihil.* Sen. Trag.

On me demandera peut-être si j'attribuerai au délire & au désespoir la mort de Cléombrote, jeune homme de la ville d'Ambracie, qui sans aucun sujet de chagrin s'élança, du haut d'une muraille, dans les flots de la mer, après avoir lu le livre de Platon sur l'immortalité des ames. Je demande, à mon tour, ce qu'il faut penser de ces Musulmans de l'Abyssinie qui dans l'impatience de jouir des plaisirs célestes dans le paradis de leur prophête, se précipitoient sur la pointe des rochers, ou de leurs épées, ou s'ensevelissoient dans les gouffres de l'Océan. Ne voit-on pas que de part & d'autre c'est une espèce de désespoir amoureux, né d'une passion véhémente pour les biens de l'autre vie? Ce désespoir est le même, quels que puissent être ces biens, & que ce soit le Phédon ou l'Alcoran qui en ait excité le désir. C'étoit même chez les Abyssins un amour matériel & terrestre, qu'ils couroient rassasier dans les bras des Houris: ils ressemblent à cet Espagnol de la Fontaine, *qui brûla sa maison pour embrasser sa Dame.*

Qu'importe la cause qui rend la vie insupportable aux hommes, les maux qui les désolent, ou les biens qui les attirent? Ne suffit-il pas que l'aversion pour ces maux, & le désir de ces biens, se terminent dans la même cause immédiate, dans le désespoir? Enfin le fanatisme n'est-il pas la plus furieuse de toutes les passions? Et y a-t-il un désespoir plus horrible que le désespoir fanatique?

C'est le fanatisme seul, & non l'amour conjugal, qui livre les femmes Indiennes au bucher où brûlent les corps de leurs maris. Une ancienne superstition, fomentée par les Bramines & les Fakirs, les trouble au point de leur faire commettre cette pieuse extravagance. Et quant aux signes d'allégresse qu'elles font paroître dans des circonstances si peu faites pour en inspirer, un écrivain moderne soutient qu'ils sont l'effêt d'un breuvage, dont la vapeur, en égarant la raison, produit des mouvemens convulsifs, & cette sorte de grimace que l'on nommoit autrefois le *rire Sardonien.*

Mais

Mais que dirons-nous du ſuicide indirect, & quelquefois même direct, dont les annales du Chriſtianiſme nous ont tranſmis le ſouvenir; de ces Chrétiens qui dans des temps de perſécution alloient ſe dénoncer eux-mêmes, inſulter à l'autorité publique, & à la religion de l'état, provoquer leurs bourreaux, & qui regardoient le jour de leur ſupplice comme un jour de fête & de triomphe? Quelques-uns d'entr'eux étoient ſi avides de la mort que dans leur ſainte ferveur ils ſautoient dans les flammes, ou prévenoient de quelque autre manière la fin qui leur étoit préparée.

Ma réponſe ſera bien courte. Quoi que d'ailleurs on puiſſe penſer de la conduite de ces Chrétiens, & ſoit qu'on l'attribue à des cauſes naturelles, ou à des cauſes ſurnaturelles; perſonne aſſurément n'oſeroit affirmer qu'ils agiſſoient de ſang froid. Un zèle brûlant, enflammé par une foi vive, le dégoût pour les choſes de la terre, une vraie paſſion pour la palme du martyre les tranſportoient, & les mettoient hors d'eux-mêmes. Encore faut-il bien que leur zèle ait ſouvent paru exceſſif, & tenir du fanatiſme; puiſqu'il a encouru la cenſure de l'Egliſe dans différens Conciles.

Pour ce qui eſt de Cléombrote, qui ſe tua après avoir lu Platon, je remarquerai, ſi l'on me permet cette digreſſion, qu'il a mal profité de ſa lecture, & du modèle ſublime qu'il avoit ſous les yeux. Socrate ne s'eſt point tué, & n'a pas dit qu'il falloit le faire; il regardoit au contraire le ſuicide comme une action criminelle, & comme attentatoire aux droits de la Divinité. Je l'ai déjà dit; je ne m'ingère point à décider, ſi l'homme, maître de ſa vie, peut la garder ou la quitter à ſon gré, ou bien ſi en la quittant il bleſſe les loix naturelles, & ſes devoirs envers la Société. S'il eſt vrai d'ailleurs qu'au moment où il ſe tue, il ait perdu l'uſage de la raiſon & de la liberté, cette queſtion tombe d'elle-même. Il ſeroit plus utile de ſavoir quels ſont les argumens les plus propres à le diſſuader, avant qu'il en vienne là, & tandis qu'il eſt encore en état de les écouter.

Cette entreprise me paroît des plus difficiles. Pour y travailler avec succès il faudroit connoître à fond ce qui se passe dans l'esprit d'un tel homme, & la suite fatale d'accidens, de sensations, d'idées, par laquelle il a été amené à son malheureux dessein; sans quoi on risqueroit d'empirer le mal par une application indiscrète de toute sorte de remèdes. Or ici les cas sont si différens, & si différemment compliqués, que ce ne seroit pas trop de toute la pénétration d'un habile Moraliste pour en bien éclaircir les nuances. Et par là il rendroit de bien plus grands services à l'humanité qu'en épluchant les vices & les vertus, ou en nous démontrant nos devoirs, qui n'ont pas besoin d'être démontrés.

Vous direz à cet homme que l'action qu'il médite, est déraisonnable, insensée, contraire aux lois & au bon ordre. Cela est admirable pour vous dont l'esprit est dans une assiette tranquille, & qui n'avez nulle envie de mourir. Mais que cela est foible & léger contre lui, & contre la passion qui l'agite! Ces généralités ne vont point au cœur, surtout si ce cœur est ulcéré ou brisé: ce sont de ces panacées, qui ne guérissent de rien, parce qu'elles guérissent de tout. Les motifs pris de la religion feroient sans doute beaucoup plus d'impression sur un homme attaché à ses maximes; la terreur qui les accompagne, & qui se présente ici de bien près, peut donner de fortes secousses à son ame, & contre-peser les maux sous lesquels elle est prête à succomber. Avec tout cela c'est une affaire délicate; & peut-être ne faudroit-il user que sobrement de ces motifs avec des cerveaux malades; parce qu'il en résulte souvent des suites plus funestes que celles qu'on voudroit éviter. N'avons-nous pas vu de ces imbécilles atrabilaires, résolus de mourir, mais n'osant se tuer de peur de l'Enfer, se souiller tout exprès d'un crime énorme, pour avoir ensuite le loisir d'en faire pénitence, & d'expirer méthodiquement sur l'échaffaut? Voilà vraiment un beau tour de finesse pour éluder la damnation, & pour aller au ciel en dépit des Casuistes.

Je

Je ne m'arrêterai pas d'avantage aux peines diffamantes que les Lois ordonnent contre les meurtriers d'eux-mêmes. Il eſt bien clair que ces punitions ne regardent pas leurs perſonnes, & ne ſont exercées que ſur leurs froides dépouilles. En ſéviſſant contre elles la Loi n'a pour but que d'effrayer, par des exemples ſalutaires, ceux qui voudroient les imiter: & comme cet acte déſeſpéré prend ſouvent ſon origine dans l'orgueil, & dans la vaine gloire, la flétriſſure publique peut être, à cet égard, un excellent préſervatif. On objecteroit inutilement qu'elle rejaillit ſur la famille innocente du meurtrier. Outre qu'elle ne lui imprime aucune tache réelle, cette raiſon prouveroit trop: il ne faudroit donc jamais flétrir les plus grands crimes, de peur de déshonorer les parens & la poſtérité du criminel. Mais un particulier, une famille ne ſont rien, quand il s'agit de la Société.

Cela n'empêche point qu'un ſage Magiſtrat ne puiſſe modérer ces peines, en diſtinguant les cas, & uſer de connivence ſelon les occaſions. Chez les Grecs la flétriſſure du Suicide étoit moins rigoureuſe que chez les Romains, & chez les nations modernes de l'Europe: ce n'étoit qu'une diffamation négative: ils refuſoient les funérailles publiques, & ces ſolennités auxquelles ils mettoient un ſi grand prix; mais ils accordoient l'enterrement clandeſtin: Platon veut qu'on enſeveliſſe ceux qui ſe ſont défaits eux-mêmes, dans des lieux écartés & ſolitaires (*). Cependant chez les Grecs & chez les Romains les peines qu'ils infligeoient, ne regardoient que le ſuicide ignoble; car il y avoit une autre eſpèce de ſuicide, qui loin d'être aviliſſant, paſſoit dans leur opinion pour un acte héroïque, & pour l'effort d'une vertu peu commune. Malgré cela il y a des traits dans l'hiſtoire Grecque, qui prouveroient que l'on a été extrêmement délicat ſur cet article, & que l'on puniſſoit quelquefois la ſimple intention du ſuicide, & même du ſuicide indirect, & de cette ſorte de ſuicide même qui d'ailleurs paſſoit pour être ſi honorable, & ſi glorieux.

Ariſto-

(*) De Legibus Lib. 9.

Ariſtodème, pendant le combat aux Thermopyles, étoit demeuré à Alpène, ville voiſine dans la Locride, où il s'étoit retiré auparavant avec la permiſſion de Léonidas, à cauſe d'une maladie qui lui étoit ſurvenue aux yeux. De retour à Sparte il fut en mépris à tous ſes concitoyens, & eſſuya les affronts les plus ſanglans. Il reparut enſuite dans la bataille de Platée, où il fit des prodiges de valeur, réſolu d'effacer par ſon ſang l'opprobre dont il s'étoit couvert. Mais en cela même ſes eſpérances furent trompées; car quoique l'on convînt généralement que perſonne ne s'étoit autant diſtingué, & n'avoit autant contribué à la victoire, on le priva des honneurs funèbres; parce que, diſoit on, étant ſorti des rangs, & s'étant jetté en furieux au milieu des ennemis, il paroiſſoit manifeſtement avoir cherché la mort (*). Si l'envie, comme Hérodote le ſoupçonne, n'eut point de part à ce procédé, avouons du moins que voilà une ſévérité outrée contre un brave homme. Car enfin ce ſuicide, ſi c'en eſt un, n'étoit-il pas infiniment plus glorieux, & infiniment plus utile à la patrie, que ni celui de Caton, ni celui de Brutus? Mais revenons aux cauſes du Suicide.

Je me perſuade donc que ces cauſes, ſous quelque forme qu'elles ſoient déguiſées, ſe réſolvent toujours dans le délire, & dans le déſeſpoir. Quand on a vécu familièrement avec les perſonnes qui ont fini par une mort volontaire, quand on a été à portée d'étudier leur humeur, & de ſuivre leurs démarches, on ſait bien à quoi s'en tenir à leur égard, & l'on eſt rarement la dupe des dehors ſpécieux qui impoſent au vulgaire. Si les exemples les plus fréquens du Suicide décèlent tous le même motif, n'eſt-il pas à préſumer que nous le retrouverions dans tous les cas où l'effet eſt le même, ſi nous pouvions les approfondir, ſi nous pouvions lire dans les cœurs, en développer les replis, & pénétrer dans le ſecret des penſées? Que donc ni les grands noms ni les grandes barbes ne nous faſſent illuſion. Le héros d'Utique ſe poignarde pour ne pas ſurvivre à la liberté de Rome, & à la ſienne:

(*) *Herodot.* Hiſt. Lib. 9.

ne: un esclave Lacédémonien se brise la tête contre le mur, en s'écriant, *je ne servirai pas.* N'est-ce pas ici la même action, le même motif, la même cause?

Il n'y a point de suicide philosophique, parce qu'il n'y a point de désespoir philosophique. Un philosophe peut se tuer, mais ce n'est pas en qualité de philosophe. Laissez-là les raisonnemens dont il colore son attentat; jamais raisonnement n'a produit un coup de poignard. Comptez qu'il y a dans son esprit quelque motif plus pressant, un aiguillon secret, une passion qui cherche des prétextes pour se justifier. Nous avons vu qu'une disposition mélancolique peut se former de longue main: or dans cet intervalle de temps il est impossible que le philosophe, & tout homme qui réfléchit, ne rencontre, & ne saisisse avec avidité, des raisons quelconques qui favorisent son penchant. Dès lors, en vertu de la liaison qui s'établit entre ses idées & sa passion favorite, les idées réveillent cette passion; & la passion, toutes les fois qu'elle se fait sentir, reproduit ces idées. Ces dernières sont de simples combinaisons de rapports, qui n'ont point d'activité par elles-mêmes, & lorsqu'elles semblent s'animer, cela ne vient point de leur propre fond; c'est la passion qui les embrase & les brûle de son feu. Quand elle s'est emparée de l'ame, elle y exerce une autorité souveraine: & notre sublime entendement, & notre fière raison, & toutes nos facultés fléchissent sous son empire tyrannique. Elle seule est donc ici le principe, le motif, la cause agissante.

Qu'un soi-disant philosophe abrège ses jours par le fer, par le poison, ou de quelque autre manière: cela ne prouve rien en faveur du suicide philosophique, à moins que l'on ne s'imaginât que l'étude de la philosophie met l'homme au-dessus de toute foiblesse, & de tous les symptômes de la nature humaine. Mais les philosophes ont appris à rougir, & le temps n'est plus où ils osoient effrontément soutenir de pareilles inepties. On sait trop que c'est souvent tout le contraire: & il faudroit volontairement fermer les yeux, pour ignorer à quels excès de fureur & de démence la jalousie, l'ambition, & des

passions encore plus méprisables peuvent entraîner ceux qui se disent les enfans de la Sagesse.

J'ai cependant ici à répondre à une objection très forte. N'a-t-on pas vu des familles entières de philosophes chez qui le Suicide avoit passé, non-seulement en coûtume, mais en dogme, & où par conséquent il semble qu'on se tuoit par principe? Telles étoient la secte des Brachmanes ou des Gymnosophistes, & la secte Stoïcienne.

On n'a appris à connoître les Brachmanes que depuis l'expédition d'Alexandre aux Indes; & les relations mêmes que nous tenons de cette source, se contrarient en plusieurs points. Il semble que l'on ait confondu différentes classes de philosophes; au moins les distinctions que l'on trouve, à cet égard, dans les anciens auteurs, ne sont-elles pas assez débrouillées, & les Grecs se servent communément du nom géneral de Brachmanes ou de Gymnosophistes. La différence qu'il nous importe le plus de remarquer est entre les Brachmanes habitans des villes, & les Brachmanes habitans des bois. Il s'agit ici des derniers.

Quand on compare ce que l'Antiquité nous a transmis sur leur sujet, on fera cette observation essentielle, que le Brachmanisme étoit un institut religieux, autant & plus que philosophique. Pline le Naturaliste le fait entendre; & c'est à quoi il paroît attribuer le genre de mort que les Brachmanes choisissoient (*). Ils étoient philosophes & prêtres tout à la fois, & l'on croit que ces deux qualités passoient de pere en fils. Quoi qu'il en soit, nous voyons en eux une société d'hommes séquestrés, séjournans sur les rochers, dans les forêts, dans les antres, sevrés des plaisirs & des commodités de la vie, exposés tout nus, ou presque nus, à l'inclémence du ciel & des saisons, passant leurs jours dans une discipline rigide, dans la contemplation, & dans

(*) *Quintum genus celebratæ illic*, & prope in religionem versæ sapientiæ, *voluntariâ semper morte vitam, accenso prius rogo, finit.* H. nat. Lib. VI. c. 22.

dans l'extase. C'étoit une vie ascétique, dont le noviciat duroit 37 ou 40 ans, & dont les austérités excédoient tout ce que le Monachisme le plus extravagant a imaginé de plus absurde. Un de leurs exercices le plus familier étoit de se tenir, dans les sables ardens de leur contrée, sur un pied, & quelquefois même chargés de fardeaux, à regarder fixement, depuis le lever jusqu'au coucher du Soleil, cet astre qui les brûloit.

Quelle étoit la doctrine qu'on leur inculquoit durant leur long noviciat? On ne cessoit de les entretenir de la mort, & de la leur faire envisager comme le bien suprême. Cette vie, leur disoit-on, n'est que la conception de l'homme; la mort est sa vraie naissance, & pour le philosophe elle est le passage dans la véritable vie, dans la vie bienheureuse. Soyez donc prêts, en tout temps, à vous ouvrir ce passage, à délivrer votre esprit de la prison du corps, & à lui donner, en le purifiant dans les flammes, un libre essor vers le ciel. Les maladies & la douleur passoient chez eux pour un opprobre qui ne pouvoit être expié que par la combustion (*); & la derniere des infamies c'étoit de mourir de mort naturelle: on abhorroit ces sortes de cadavres, & l'on eût cru souiller l'élément sacré du feu en lui donnant à consumer d'autres corps que des corps vivans (**). Ainsi aux approches de la vieillesse, ou au premier ressentiment d'une maladie, & sur un simple soupçon qu'il en étoit menacé, le Brachmane n'avoit rien de plus pressé que de se soustraire à une pareille ignominie, & de s'assurer, par une mort sanctifiée, la béatitude de la vie future. Or en tout ceci il n'y a rien qui ne se concilie avec nos idées sur le Suicide; car n'est-ce pas là l'effet qui devoit résulter de l'éducation des Brachmanes, de

 leur

(*) Αἴσχιστον δ' αὐτοῖς νομίζεσθαι νόσον σωματικήν· τὸν δ' ὑπονοήσαντα καθ' αὑτοῦ τοῦτο ἐξάγειν ἑαυτὸν διὰ πυρός· *Strabo* Geogr. Lib. XV.

(**) *Expectatam mortem pro dedecore vitæ habent; nec ullus corporibus, quæ senectus solvit, honos redditur: inquinari putant ignem, nisi qui spirantes recipit.* Quint. Curt. Lib. VIII. 9.

leur genre de vie, de leurs préceptes, de l'esprit de leur secte, & de la philosophie fanatique dont ils étoient imbus?

Mégasthène dit (*) que d'autres philosophes de la même nation, qui étoient sans doute les Brachmanes civilisés, condamnoient ce suicide, & le taxoient de témérité. Mais cet historien ajoute que leurs lois & leurs institutions ne les y obligeoient pas; en quoi apparemment il a confondu les deux sectes des Brachmanes. Il soutient encore qu'ils ne mouroient pas tous dans les flammes, mais que chacun choisissoit une mort conforme à son tempérament, & qu'il n'y avoit que les tempéramens de feu qui expirassent dans le feu. Quinte Curce dit que les Brachmanes citoyens prenoient leurs confrères des bois pour des lâches, qui ne se donnoient la mort que parce qu'ils n'avoient pas le courage de l'attendre (**). Mais dans le vrai ce suicide étoit un acte religieux, un saint devoir, appuyé de grandes promesses & de grandes menaces.

Lorsque le Gymnosophiste Calanus se fut brûlé en cérémonie, à la vue de toute l'armée Macédonienne, on jugea de lui différemment: les uns l'admirèrent; les autres le regardèrent comme un maniaque; d'autres encore attribuoient son action à un orgueil insensé (*.*). En suivant l'histoire de Calanus, on voit d'abord que lorsqu'il quitta les Brachmanes, il fut traité par eux de prévaricateur, qui désertoit le service de la Divinité pour celui d'un homme mortel (†). Corrompu depuis par le luxe & les délices de la cour d'Alexandre, il se plongea dans les débauches; & bientôt entièrement dégénéré, il devint le flatteur, le parasite, le bouffon du prince (††). A' l'âge de 73 ans

(*) apud *Strab.* libro cit.

(**) *Nec quemquam admovere leti diem credunt, cui expectare interrito liceat.* l. c.

(*.*) *Diod. Sic.* Bibl. Hist. Lib. XVII. p. 573. ed. Rhodom.

(†) *Arrianus* de exp. *Alex.* Lib. VII.

(††) Ἐγκωμιαστὴν τοῦ βασιλέως - - - - - - ἀκόλαστος ἄνθρωπος, καὶ ταῖς Ἀλεξάνδρου τραπέζαις δεδουλωμένος· *Strabo* l. c.

ans il ſentit la première atteinte d'un mal qui fut probablement la ſuite de ſon intempérance. Selon Diodore de Sicile, il ne ſe hâta pas trop de ſe brûler, & ne s'y réſolut que lorſqu'il remarqua que le mal alloit, de jour en jour, en croiſſant (*). Faut-il s'étonner ſi alors il lui arriva une choſe dont les exemples ſont ſi peu rares? C'eſt qu'affoibli par la vieilleſſe, & averti de ſa caducité, ſes anciennes idées ſe réveillèrent; les ſcrupules & les frayeurs religieuſes reprirent le deſſus; le repentir le ſaiſit, & le ramena aux lois, aux rites, & au fanatiſme de ſa ſecte. Enfin, comme l'amour propre ſe mêle à tout, le ſien étoit peut-être flatté de pouvoir donner aux Grecs & aux Perſes un ſpectacle auſſi nouveau, & auſſi inuſité.

Ce ſpectacle fut revu hors des Indes ſous l'empire d'Auguſte. Les ambaſſadeurs du roi Porus qui vinrent le complimenter dans l'île de Samos, lui amenèrent diverſes curioſités de leur pays, des tigres, des ſerpens, un homme ſans épaules, eſpèce d'Herme vivante, une perdrix plus grande qu'un vautour, une tortue de rivière, & un Gymnoſophiſte. Ce dernier ſe brûla gaiement à Athènes, en préſence de toute la ville & de l'empereur: il donna pour raiſon qu'ayant vécu heureux juſqu'alors, il vouloit prévenir les revers de la Fortune. L'hiſtorien Dion (**) fait pluſieurs conjectures ſur les motifs de ce ſuicide; mais je croirois qu'il eût fallu les raſſembler. Il allègue la vieilleſſe de cet homme, les uſages de ſa patrie & de ſa ſecte, & il n'oublie point la vaine gloire, parce que, dit-il, c'étoit un philoſophe. En effet, quand on conſidère le théâtre, les ſpectateurs, le temps même qu'il choiſit pour ſon exploit, on ne ſauroit douter que l'orgueil & l'ambition n'y ayent eu beaucoup de part. Il paroît même qu'il étoit venu tout exprès pour donner cette ſcène à l'empereur (*.*); & pour ne la lui point faire manquer il fallut initier le Brachmane hors du

(*) *Diod. Sic.* l. c.

(**) *Dio Caſſ.* Rom. Hiſt. Lib. LIV. p. 603. ed. H. Steph.

(*.*) Ἐς ἐπίδειξιν τοῦ Αὐγούστου, καὶ τῶν Ἀθηναίων· Ibid.

du temps prescrit; car il désiroit de subir cette cérémonie, avant de se livrer aux flammes.

Je n'ai pas besoin de parler ici de ce singe des Brachmanes, connu sous le nom de Pérégrin, qui se réduisit en cendre aux fêtes Olympiques. Il n'y a qu'à lire sa fameuse catastrophe dans Lucien, qui fut témoin oculaire de cette Tragicomédie. On y verra un avanturier perdu de débauches, bourrelé par ses crimes, & tourmenté par la soif de la renommée comme par une Furie (*), qui après avoir erré en vagabond de contrée en contrée, de secte en secte, sans pouvoir s'illustrer au gré de ses désirs, achève à la fin, poussé à bout par les railleries insultantes de ses ennemis, & craignant, s'il reculoit, d'être hué, ou même d'être lapidé par la Grèce assemblée, qui achève, dis-je, à demi-forcé une entreprise où il s'étoit ridiculement engagé quatre années auparavant.

Les Stoïciens avoient ceci de commun avec les Brachmanes, qu'ils faisoient d'une méditation continuelle de la mort le point capital de leur Philosophie: selon eux le Sage ne doit vivre que pour apprendre à mourir. On conçoit les effets de cette philosophie sépulcrale qui sans cesse offusquoit leur esprit, & noircissoit leur imagination. Aussi cet apprentissage si vanté de la mort ne les instruisoit-il pas à la voir venir d'un œil ferme, mais à se la donner pour les sujets les plus minces & les plus frivoles. Sénèque raconte dans une de ses épitres, que déjà dans sa jeunesse un catarrhe, ou une fluxion, qui lui faisoit perdre de son embonpoint, l'auroit déterminé à sortir de la vie, si l'amour d'un père dont l'âge avancé réclamoit son assistance, ne l'eût retenu (**). Il est vrai que Sénèque, malgré ses beaux propos sur la mort, trouve toujours de bonnes raisons pour vivre, tantôt son pere, tantôt sa femme, tantôt ses amis; & il est bien croyable qu'il n'en eût jamais manqué, si on l'eût laissé faire. Toute sa philosophie n'étoit qu'une vaine

(*) Δόξης ὑπ' Ἐρινύϊ θυμὸν ὀρινθεὶς De morte *Peregr.* c. 30.

(**) Epist. 78.

vaine parade, & le Stoïcisme étoit pour lui un vaste champ où son esprit pouvoit briller.

Si les Stoïciens ressembloient aux Brachmanes du côté de leurs méditations, ils surpassoient tous les autres philosophes en arrogance & en orgueil: ils y étoient portés par l'esprit même de leurs doctrines, où tout est tendu, bouffi, hors de la nature: chez les grands-hommes mêmes qui sont sortis de leur école, on remarquera pour la plupart que leur grandeur tenoit du gigantesque. Mais les Stoïciens de profession avoient un étrange personnage à soutenir. Leur morale, toujours sur des échasses, & faite pour des intelligences d'un ordre supérieur, produisoit un combat perpétuel entre l'homme & le philosophe. De là tant de contradictions entre leurs différentes maximes: de là l'impossibilité d'accorder la pratique avec la théorie: de là ce contraste d'orgueil & de foiblesse, & tous les désordres qui s'ensuivent. Il ne leur restoit donc, dans les occasions critiques, que de couper le nœud qu'ils ne pouvoient résoudre; & il falloit bien que ces balons remplis de vent & de fumée crevassent plutôt que de se désenfler.

Je demande pardon aux admirateurs du Portique; mais qu'ils me disent si jamais homme a atteint, ou peut atteindre, à réaliser le portrait qu'ils font de leur Sage. N'est-ce pas comme si on vouloit faire respirer l'Ether pur à des poumons faits pour l'élément grossier qui entoure notre globe? Et en quoi consiste cette haute perfection? Le Sage est au-dessus du Destin & de la Fortune: tous les traits de la douleur s'émoussent sur le triple airain dont son ame est environnée: tel qu'un rocher qui surmonte les nues, il voit tranquillement la foudre & les orages se former à ses pieds; que dis-je? ce n'est plus un homme; il est égal aux Immortels. Mais par quel caprice cet être si sublime & si heureux a-t-il toujours le bras levé pour se percer? Il est, disent-ils, rassasié de la vie . . . Il est donc rassasié du suprème bonheur dont il jouit . . . Il meurt, disent-ils, pour se désennuyer . . Et de quoi? ne seroit-ce pas de sa Sagesse? Sagesse plai-

ſante en effet, qui le rend inſenſible à la Douleur, ſans pouvoir le ſauver de l'Ennui.

On demande ſi le Suicide eſt un acte de courage; & cette queſtion ſeroit intéreſſante, ſi elle ne dégéneroit en une diſpute de mots. Chacun peut définir le courage à ſon gré, & décider d'après ſa définition; mais les définitions arbitraires ne prouvent rien, & ne terminent rien. Il faudroit, pour bien développer ce ſujet, pouvoir établir en quoi conſiſte le vrai courage, le circonſcrire dans des limites préciſes, & le diſtinguer ſans équivoque de tout ce qui n'eſt pas lui. Or chacun s'en forme une idée confuſe à ſa manière, d'après des actions qui l'ont ébloui, & qui ſouvent n'ont jetté qu'un faux éclat.

On dit vaguement que le courage eſt la force de l'eſprit: l'illuſtre Préſident *de Monteſquieu* le définit, le ſentiment de nos forces; mais de quelles forces? Toute force ſe rapporte à un effet: il y a donc des forces de différente nature; il y en a même qui ſe contrarient, & ne ſauroient ſubſiſter enſemble. Celui qui ſe tue a ſans doute la force de ſe tuer; mais il n'a point celle de ſupporter la vie.

Quelque force, quelque courage que l'on ſuppoſe requis pour le Suicide, il ſemble qu'on puiſſe toujours aſſigner une plus grande force, un degré de courage qui a manqué. Et par là le courage ou la force que l'on prétend appercevoir dans cette action, ſe réduit comparativement à de la foibleſſe. Vous rompez le fil de vos jours pour ſortir d'un état malheureux: vous êtes donc trop foible pour endurer cet état, & il vous falloit plus de courage pour oſer vivre que pour oſer mourir.

Mais, dira-t-on, n'eſt-il point de ces cas où, pour parler avec le poëte,

La vie eſt un opprobre, & la mort un devoir?

Et alors ne faut-il pas du courage pour ſecouer cet opprobre, & pour s'acquitter de ce devoir?

Je

Je réponds qu'à considérer les choses en elles-mêmes, & selon les vrais principes de la Morale, la vie ne sauroit être un opprobre que pour le scélérat, ou pour le mal-honnête homme; & cet opprobre n'est point effacé par sa mort, quoiqu'elle soit un bien pour la Société. Lorsque dans le désordre où l'ont plongé ses crimes, il attente sur lui-même, direz-vous qu'il a rempli un devoir, & qu'il s'est conduit en brave homme? Mais convenez au moins qu'il avoit un devoir plus sacré à remplir, & une action plus courageuse à faire: c'étoit de changer de mœurs, de réparer les maux qu'il a causés, de rentrer dans le chemin de la vertu. Et cela exigeoit une vraie force d'esprit, au lieu que le Suicide n'exige que du désespoir.

Selon les mêmes principes, il n'est pour l'homme de bien aucune situation où il doive rougir de vivre. Que tous les maux sortis de la boîte de Pandore viennent fondre sur lui: que son corps soit en proie aux douleurs, son ame contristée par la perte de sa fortune, de ses amis, de sa liberté: ajoutons-y le dernier des malheurs pour un cœur honnête & sensible, celui où les plus grands courages ont échoué, & auquel, selon l'opinion du monde, on ne sauroit survivre sans opprobre & sans lâcheté; je veux dire que sa réputation soit injustement flétrie. Je le plaindrai, je l'excuserai même, s'il prend un parti désespéré; mais je n'aurai garde de l'admirer par cet endroit. Je l'admirerois, au contraire, si sa constance pouvoit se soutenir parmi tant d'écueils. Et cela me prouve qu'il y a un degré de courage dont les ames les plus héroïques sont à peine susceptibles. Car on avouera que celui qui ne succomberoit point dans ces cruelles épreuves, & qui oseroit mépriser les opinions, satisfait du témoignage de sa conscience, content d'être pur à ses propres yeux & aux yeux de la Divinité, on avouera, dis-je, qu'un tel homme, non-seulement seroit plus courageux qu'un destructeur de lui-même, mais qu'il auroit atteint le faîte de l'héroïsme.

Je demanderois donc à ceux qui me proposeroient cette difficulté: quelle est la règle de vos sentimens & de votre conduite, la

rectitude morale, ou le jugement des hommes? Si c'est le dernier, votre réputation est tout votre bien, & après l'avoir perdue quoiqu'innocemment, votre seul salut est dans le désespoir: vous n'avez rien de mieux à faire qu'à mourir: si vous y survivez, vous êtes inconséquent, & doublement foible, parce que vous n'osez ni suivre vos maximes, ni les abandonner. Si c'est le premier, votre courage consiste à vivre, quoi qu'il en puisse arriver. Et c'est là le vrai courage, le courage absolu, indépendant de toutes les choses extérieures, & fondé en vous-même sur une base inébranlable: au lieu que dans le cas précédent le courage de vous tuer n'est qu'hypothétique, c'est à dire qu'il n'est qu'une moindre foiblesse relativement aux fausses maximes dont vous partez. C'est précisément ainsi qu'un homme imbu de la chimère du point d'honneur, qui refuse le duel parce qu'il a peur de se battre, est un lâche; mais il est doublement courageux, si sans avoir cette peur, il le refuse par devoir & par principe.

Le courage parfait, si je m'en fais une notion juste, ce seroit d'oser également vivre & mourir, de tenir ferme contre les calamités de la vie, de voir la mort sans foiblesse, lorsqu'elle arrive au terme marqué par la Nature, & de s'y exposer sans crainte, toutes les fois que le devoir & le véritable honneur nous y appellent. Mais une disposition d'esprit aussi constante & aussi inaltérable est peut-être au-dessus de l'homme; au moins n'y auroit-il que les sentimens les plus relevés, la vertu la plus sublime, qui pussent la lui donner. Nous avons vu plus haut, comment le courage s'engendre, se fortifie, s'entretient; & par là on conçoit combien il est difficile de l'acquérir tel que nous le demandons ici. Il ne s'agiroit pas de moins que de faire prendre à la passion & à l'enthousiasme une consistance habituelle, en les ramenant à une sorte d'équilibre qui semble si opposé à leur nature, d'en faire, en un mot, des qualités permanentes, enracinées dans l'ame, & dans le caractère de l'homme.

Si l'on ne voyoit commettre le Suicide qu'à des hommes de bien, ou à des hommes qui toute leur vie ont fait preuve de courage, on

on pourroit soutenir avec quelque vraisemblance que le Suicide est un acte de vertu & de valeur. Mais l'expérience nous montre que le scélérat & l'honnête-homme, le poltron & le brave, les femmes & les héros, les personnes à sentimens & les ames basses en sont également capables. Que dis-je? les derniers exemples sont infiniment plus communs: & l'on n'a point de peine à en croire Sénèque, lorsqu'il dit que pour savoir se donner la mort il n'est pas besoin d'être un Caton, que son valet & sa servante en ont fait autant, & que les plus vils des mortels ont trouvé cet abri aux maux qui les accabloient. (*)

Parcourez l'histoire des règnes tyranniques, & principalement celle de la plupart des empereurs de Rome, monstres plus féroces que les tigres & les lions, & que l'Enfer sembloit avoir vomis pour désoler la terre. Figurez-vous un peuple d'esclaves gémissans sous le joug de ces despotes inhumains, assiégés par la troupe infame des délateurs, interprêtes mercenaires des actions, des gestes, des paroles, & du silence-même; n'osant lever les yeux sans se livrer aux soupçons, osant à peine avouer d'avoir dormi; car leurs songes mêmes pouvoient les perdre. On ne sera pas surpris de voir des personnes de tout sexe, de tout âge, de toute condition, prévenir par une mort volontaire les tortures & le dernier supplice, qui les menaçoient à chaque moment, & dont l'appréhension continuelle étoit plus affreuse que mille morts. Et remarquons bien que ce n'est pas dans les beaux siècles, dans les temps fertiles en héros & en grands hommes, mais dans les siècles les plus efféminés & les plus pervers, que le Suicide fut si fort en vogue parmi les Romains.

S'il s'agissoit ici de combattre par des autorités, j'en produirois de très respectables, des hommes illustres, de vaillans capitaines, vrais

(*) *Quid mihi gladios & ignes ostendis, & turbam carnificum circa te frementium? Tolle istam pompam sub quâ lates, & stultos territas. Mors est, quam nuper servus meus, quam ancilla contempsit.* Ep. 23.

Non est, quod judices, hoc fieri nisi a Catone non posse - - - cum vilissimæ sortis homines ingenti impetu in tutum evaserint. Ep. 70.

vrais connoisseurs en fait de courage, Cléomène, Jules-César, l'empereur Julien, qui ont regardé le Suicide comme une action lâche, & peu digne d'un homme de cœur. Sénèque lui-même convient qu'elle est souvent l'effet de la mollesse (*). Mais si des hommes sans éducation, dépourvus de toute philosophie, si des hommes moûs, sans courage, énervés par le plaisir, peuvent tout d'un coup trouver en eux cette même force, que son Sage n'acquiert que par un exercice long & pénible, par des veilles, & par des méditations; cette sagesse, & ce fameux apprentissage de la mort sont donc des superfluités bien futiles Car enfin il en coûte tout autant de force pour tuer un sot & un idiot, que pour tuer un bel-esprit & un philosophe.

Il n'y eut jamais de peuples plus lâches que les Américains. Quand on voit leurs armées nombreuses mises en déroute, & leurs puissans empires renversés comme d'un souffle par une poignée d'Européans, que malgré leurs chevaux & leur artillerie, ils eussent écrasés au premier choc, s'ils avoient eu une étincelle de courage, on a peine à contenir son mépris pour les anciens habitans du Pérou & du Mexique. Cependant ces mêmes hommes se détruisirent en foule par le poison, par une faim volontaire, par tous les instrumens de la mort qui étoient à leur portée; & un grand nombre de ceux que le fer Espagnol avoit épargnés, périrent par le Suicide.

Souvent le délire & le désespoir sont le dernier période de la frayeur: on a vu les hommes les plus timides tourner contre leur propre sein ces mêmes armes dont ils n'osèrent jamais se servir dans une occasion honorable. Qui ne connoît cette épigramme de Martial, où il demande si ce n'est pas une folie de se tuer de peur de mourir (**)? C'en est une sans doute; mais c'est proprement la peur de vivre dans

la

(*) *Delicatus est nimis, qui perseverat mori.* Ep. 104.

(**) *Hostem cum fugeret, se Fannius ipse peremit.*
Hîc rogo, non furor est, ne moriare, mori?
Lib. II. epig. 80.

la crainte de la mort, qui trouble l'eſprit à ce point, & lui inſpire cette fureur puſillanime. Or la peur qu'a-t-elle de commun avec le courage?

Cependant ne le diſſimulons pas: des hommes d'une vertu & d'une valeur reconnues ont terminé leurs jours par une mort ſemblable. Mais étoit-il donc impoſſible que leur courage les abandonnât? Les chênes les plus robuſtes plient ſous les coups de la tempête: les eſprits les plus fermes ſont domptés par la cruauté du ſort. Où eſt le courage aſſez parfait pour ne trouver dans la vie humaine aucun contrepoids qui puiſſe l'ébranler? Nous avons fait voir que le courage étoit moins une qualité naturelle qu'une qualité acquiſe, & par conſéquent journalière & périſſable; & que dans ce haut point de perfection où nous l'envisagions tantôt, il n'exiſtoit vraiſemblablement qu'en idée, ſans avoir d'ectype parmi les habitans de la terre. Ainſi, par un défaut inſéparable de notre nature, les ames les plus fortes ont leur côté foible, & ſe démontent comme les autres, lorſqu'elles ſont frappées de ce côté-là. Et les hommes du caractère d'ailleurs le plus oppoſé peuvent également, quoique par des cauſes différentes, tomber dans l'aliénation d'eſprit, & dans le déſeſpoir. Ne ſont-ils pas, après tout, pétris du même limon, également ſujets aux maux du corps & de l'ame, également tributaires de l'humanité?

Quand je verrai donc faire la même choſe à un lâche & à un homme courageux, dirai-je que le lâche s'eſt tout d'un coup changé en héros? ou bien dirai-je que le héros a foibli? Le dernier me paroît beaucoup plus probable. Mais laiſſons-là, ſi vous voulez, les mots de force & de foibleſſe, de courage & de lâcheté: diſons qu'il s'eſt fait dans l'un & dans l'autre un changement qui les a conduits tous deux à un état commun, au délire & au déſeſpoir.

Au fond ce que nous appellons fort & foible, roule entièrement ſur une relation, & dépend des termes de comparaiſon que nous avons adoptés. Ce qui eſt force pour un certain homme, ou à de

cer-

certains égards, seroit foiblesse pour un autre homme ou à d'autres égards; ainsi qu'une stature moyenne est grande par rapport à celle d'un pygmée, & petite par rapport à celle d'un géant. Quand un homme moû & timide ose se tuer, il a sans doute en ce moment une force qu'il ne s'étoit jamais sentie; mais elle ne mérite ce nom que comparativement à l'état passé de cet homme, & au temps où il ne l'avoit pas. Si vous cherchez d'où elle lui est venue, vous verrez que c'est de sa foiblesse même, ou du défaut d'une plus grande force; car n'est-il pas vrai que de deux partis entre lesquels il est réduit à choisir, il prend celui qui exige la moindre force, ou le parti le plus foible? Vous pouvez ici au nom de force substituer celui de courage, quoique l'expression soit impropre; mais la conséquence sera la même: il a le courage de se tuer, parce qu'il manque d'un courage supérieur, de celui de supporter sa vie telle qu'elle est.

Lorsqu'au contraire un homme courageux se porte aux mêmes extrémités, il est sûr qu'il a perdu de la force qui jusqu'alors l'avoit soutenu. Il sera encore courageux comparé avec d'autres hommes, ou en le supposant dans d'autres situations; mais il ne l'est plus relativement à lui-même ni à la situation où il se trouve; il cède au mal, & s'en laisse abattre. Et que seroit-ce qu'un courage produit par le découragement? On pourroit dire peut-être que l'homme timide acquiert une force qu'il n'avoit pas, tandis que l'homme courageux perd de celle qu'il avoit, de sorte qu'il ne lui reste qu'un degré inférieur de force; & que par là ils se rencontrent dans le même état. Mais ces degrés ne sont pas susceptibles d'une estimation précise.

En général, les ingrédiens de la nature humaine sont si singulièrement amalgamés qu'on ne sauroit les discerner avec exactitude, ni assigner ses bornes à chacune en particulier. L'analyse logique n'a point sur les qualités de l'esprit le pouvoir que la Chymie exerce sur les corps; ces qualités ne se décomposent pas comme les élémens des mixtes; elles s'entre-mêlent, se pénètrent, se combinent en différentes doses, dont nous n'appercevons que d'une maniere très vague le

plus

plus ou le moins, lorſqu'il eſt fortement marqué. Et du tout réſulte ce phénomène confus que nous appellons l'homme. Qui m'expliquera par quelle métamorphoſe il paſſe d'une qualité à l'autre, d'un extrême à l'extrême oppoſé; par quel nœud imperceptible les qualités les plus contraires s'uniſſent en lui, & ſemblent tantôt ſortir les unes des autres, tantôt rentrer les unes dans les autres; comment la folie tient à la raiſon, la foibleſſe à la force, la force à la foibleſſe?

Quo teneam vultus mutantem Protea nodo?

A travers l'obſcurité qui enveloppe notre être on s'apperçoit ſeulement que nous avons tous reçu de la Nature une portion de ſenſibilité, que chacun emploie à ſa manière. Mais quand, par des cauſes quelconques, elle eſt irritée à un certain degré, tous les eſprits, de quelque trempe qu'ils ſoient, & quelque différence que d'ailleurs il y ait entr'eux, tendent vers un point commun, & vont ſe réunir dans la même ſituation. Ainſi le délire ou le déſeſpoir du Sage, du héros, du grand-homme eſt eſſentiellement la même choſe que celui d'un eſprit ſtupide, d'une ame baſſe, d'un homme ſans honneur, ſans principes & ſans vertu: je dis qu'il eſt également délire & déſeſpoir.

Mais ſur quoi donc eſt fondée cette fameuſe diſtinction entre un beau déſeſpoir, & un déſeſpoir ignoble, entre le Suicide lâche, & le Suicide glorieux, diſtinction qui, comme nous l'avons vu, a été ſi fort accréditée chez les anciens? Cette différence eſt toute entière dans les objets qui irritent la ſenſibilité, & qui étant de diverſe nature, les uns grands & ſublimes, d'autres plus ou moins mépriſables & vils, teignent des mêmes couleurs, & les ſentimens qu'ils font éclorre dans l'ame, & les actions que ces ſentimens font naître au dehors; ils ſemblent ſe répandre ſur ces ſentimens & ſur ces actions, & les impreigner, pour ainſi dire, de leurs propriétés. C'eſt ainſi que la frénéſie même, & les actes les plus furieux qu'elle fait commettre ſe couvrent d'un vernis brillant, & ſont ennoblis par leurs cauſes, par leurs motifs, par les circonſtances qui les accompagnent.

En cherchant ici un exemple propre à faire mieux saisir ma pensée, je me rappelle l'effroyable histoire du Tribun Vulteïus & de sa cohorte, telle qu'elle est racontée dans Florus, & dans la Pharsale de Lucain. Lorsque le vaisseau qu'ils montoient, fut arrêté au milieu de la flotte de Pompée, entre les bas-fonds & les écueils de la mer d'Illyrie, ces soldats, après s'être vaillamment défendus, & avoir vendu cher leur vie, étant fatigués de tant de carnage, & sentant leurs forces épuisées, Vulteïus les exhorte à prévenir, par une mort de leur choix, la honte de tomber vivans aux mains de leurs ennemis. Chers camarades, leur dit-il entr'autres choses, j'ai renoncé au jour: déjà la mort me presse de ses aiguillons: & la Fureur me domine. On ne sent combien il est heureux de mourir que lorsqu'on touche à son heure fatale; & les Dieux le cachent aux hommes vulgaires pour leur faire porter le fardeau de la vie (*). Animés par ce discours du même esprit, & de la même rage, ils finissent par s'entretuer tous sur le tillac. Ce désespoir & ce suicide ont sans doute un air de noblesse & de grandeur que n'auroit point la mort d'une femme qui s'empoisonneroit ou s'étrangleroit à cause de l'infidélité de son galant. Mais cette noblesse, cette grandeur n'est ni dans le suicide ni dans le désespoir: car si Vulteïus & sa troupe se fussent tués sans combattre, & par lâcheté, la même action, au lieu de les couvrir de gloire, les eût couverts d'ignominie. Tout son éclat n'est donc qu'un éclat réfléchi du caractère de ces gens, de leurs actions passées, du péril où ils étoient engagés, des objets qui ont excité leur rage; & de l'importance que toutes ces choses ont acquise dans l'opinion des hommes. C'est cela qui non-seulement excuse à nos yeux, mais qui embellit leur désespoir. Car encore une fois, il n'y a aucun mérite à se désespérer; il ne faut pour cela qu'ê-

(*) *Projeci vitam comites, totusque futuræ*
Mortis agor stimulis: furor est. Agnoscere solis
Permissum est, quos jam tangit vicinia fati,
Victurosque Dei celant, ut vivere durent,
Felix esse mori.

Luc. Pharf. Lib. IV.

qu'être poussé à bout par un motif quelconque : & tous ces motifs, malgré leur diversité, lorsqu'ils produisent les mêmes effets, doivent avoir frappé les mêmes coups sur l'esprit, & y avoir fait des impressions également profondes. Pour une femme sensible la perte ou la conquête d'un amant est un objet aussi grave, & d'une aussi haute importance, que la perte d'une bataille pour un général d'armée, ou pour Alexandre la conquête de l'univers.

Ici je crois appercevoir le vrai point de vue sous lequel il faut envisager le suicide de Caton : & comme il n'en est point de plus fameux dans l'Histoire, ni qui ait plus ébloui les philosophes mêmes, je pense ne pouvoir mieux finir que par quelques observations sur la mort de cet illustre Républicain.

Une vertu sévère, un esprit inflexible, un patriotisme rigide, une passion ardente pour la Liberté, une haine implacable pour tout ce qui sentoit la domination, toutes ces qualités portées à l'excès, & jusques à l'enflure, par la Morale Stoïcienne, qui respiroit dans toute sa vie, constituoient le caractère de Caton. Ce caractère, fait pour la république naissante, ou pour la république adulte, étoit entièrement déplacé dans le siècle où il parut : Il contrastoit avec les mœurs, qui avoient changé, & avec la face de l'état, livré aux factions & aux guerres civiles. La Liberté Romaine touchoit à son terme fatal ; & le plus grand bonheur à espérer, c'étoit qu'elle expirât doucement, & sans convulsions, sous l'empire d'un maître absolu.

Dans cette crise générale, que l'on se représente un homme tel que Caton, obstiné à défendre les lois & la constitution ancienne, luttant seul contre l'esprit du temps, contre le cours des événemens, & contre les arrêts du Ciel même. Le voilà dans une ville d'Afrique réduit aux plus tristes extrémités, & César victorieux s'approchant de cette ville, ce César qu'il regardoit comme l'ennemi de la patrie, dont le nom lui étoit odieux, dont la vue alloit mortifier son orgueil, &

dont la clémence eût été pour lui le supplice le plus affreux (*). Si l'on combine ce caractère avec ces circonstances, on croira aisément que tant de coups rassemblés sur sa tête, & surtout ce dernier coup, devoient foudroyer la constance de Caton; & pour en être surpris il faudroit bien peu connoître le cœur humain, ou supposer que Caton ne fut pas un homme. Il devoit même entrer en un désespoir d'autant plus violent qu'il avoit fait plus d'efforts pour résister jusques-là, & qu'il s'étoit roidi d'avantage contre la Fortune.

Je ne crains point d'être désavoué par l'Histoire, & je m'en rapporte volontiers à ceux qui la lisent sans prévention, & sans enthousiasme; car c'est elle qu'il faut écouter, & non le déclamateur Sénèque, ni ceux qui ont déclamé avant ou après lui. Une preuve certaine que la constance de Caton étoit épuisée; c'est qu'avec un autre caractère & avec des passions plus modérées, ce suicide lui auroit paru prématuré. Il lui restoit des ressources: il pouvoit fuir après la bataille de Thapsus, comme il avoit fui après celle de Pharsale, n'ayant été présent ni à l'une ni à l'autre: il pouvoit se sauver avec ses amis, soit pour se joindre au parti du jeune Pompée, soit pour faire des tentatives dans d'autres climats. De sorte qu'à tout prendre, si Caton a vécu pour sa patrie, on ne sauroit dire qu'il soit mort pour elle.

Dans ses dernières heures il lut, comme Cléombrote, ce dialogue de Platon où Socrate, attendant la cigüe, raisonne sur l'immortalité des ames, & entretient la sienne du doux espoir d'une nouvelle & meilleure existence. Si le désordre de son esprit lui eût permis de se comparer avec le philosophe d'Athènes, cette comparaison devoit lui faire tomber le poignard des mains. Dans le courage tranquille de Socrate il auroit lu sa condamnation: peut-être y eût-il appris à mourir en Sage, & à être grand-homme jusqu'au bout.

Je

(*) Τοῦ τε θανάτου πολὺ τὸν παρὰ τοῦ Καίσαρος ἔλεον χαλεπώτερον ἡγεῖτο εἶναι. *Dio-Cassius* Lib. XLIII. p. m. 264.

Je conviens malgré cela, que la mort de Caton a quelque chose d'éblouissant, cet air de noblesse & de grandeur dont nous avons parlé, & qui devoit imposer à une nation fière encore de la liberté qu'elle avoit perdue, & idolâtre de son ancienne indépendance. J'avouerai même que j'y trouve une sorte de beauté qui n'est point dans la mort de Socrate, une beauté poétique & théâtrale: elle résulte en partie de la vie & des mœurs de ce personnage extraordinaire, en partie des conjonctures dans lesquelles il mourut.

On peut douter si le caractère de Socrate n'est pas trop parfait pour le théâtre, & au-dessus de cette bonté médiocre que les règles dramatiques exigent. C'est la vertu toute pure, sans alliage de foiblesse. Et puis le calme le plus profond règne dans cette ame céleste: on n'y voit pas les passions s'entre-choquer, ni aucun de ces grands mouvemens qui excitent la terreur, ou inspirent une pitié bien forte. Loin de le plaindre, on envieroit presque sa destinée, & l'on souhaiteroit de mourir comme lui. Enfin sa mort n'est point liée à des événemens mémorables; elle n'influe sur aucune affaire d'état, & ne laisse point de sensation dans le gouvernement d'Athènes. Ce n'est pas une personne publique, c'est un citoyen vertueux, victime d'une persécution injuste, mais qui se résigne, & environné de ses amis meurt en repos, sans douleur, sans regrets, sans murmure. Ainsi, quelque belle que soit cette mort aux yeux de la Raison, elle ne se prêteroit que difficilement au haut Tragique.

Tout se réunit, au contraire, pour faire de la mort de Caton le spectacle le plus sublime, le plus touchant, & le plus terrible. On ne peut lire le dernier acte de la Tragédie d'Addisson, sans se sentir élever l'ame, & fendre le cœur. Jamais de plus grandes ni de plus nobles passions ne furent étalées sur une scène plus illustre. Rome, la Liberté, Caton, César: quels noms! quels personnages! quels intérêts! quelle catastrophe! Et l'époque de cette catastrophe est la plus célèbre dont les annales du monde ayent conservé le souvenir, la plus propre à recevoir les embellissemens de la Poésie, & à figurer dans le

genre ſublime. C'eſt le jour où la terre attend l'arrêt de ſa deſtinée: on ſaura ſi Rome eſt libre ou eſclave; les yeux de l'univers ſont tournés ſur Utique. Ce n'eſt donc pas ici la mort d'un ſimple particulier; c'eſt la mort de la République, la Patrie expirante, *& le dernier Romain à ſon dernier ſoupir.*

En voilà plus qu'il n'en faut pour ennoblir le déſeſpoir de Caton ſur la ſcène, où l'on ne demande point dans le héros le plus haut degré de perfection morale, & où cette perfection même ſeroit un défaut. Cependant le poëte qui a traité ce ſujet, ſemble avoir appréhendé que ce déſeſpoir ne parût encore trop atroce, même ſur le théâtre Anglois: & par cette raiſon il a cru devoir l'adoucir. Non ſeulement il ſupprime, juſques dans le récit, l'horrible circonſtance des entrailles arrachées, mais il trouve l'art de relever ſa cataſtrophe par une fiction ingénieuſe. A' l'article de la mort un rayon de repentir vient luire rapidement dans l'ame de Caton: il craint de s'être trop hâté; il invoque les puiſſances du Ciel, & il meurt.

Si ce grand exemple, qui paroiſſoit le plus s'écarter de mes idées ſur le Suicide, les confirme cependant, au lieu de les détruire; je crois qu'il ſeroit ſuperflu d'étendre mon examen plus loin. Je n'ai donc rien à ajouter; & ce n'eſt pas la peine de voir mourir des hommes ordinaires, après avoir vu la mort de Caton.



OB-

OBSERVATIONS

SUR

LES DIVERS ÉTATS OÙ L'AME SE TROUVE

EN EXERÇANT SES FACULTÉS PRIMITIVES, CELLE D'APPERCEVOIR ET CELLE DE SENTIR.

PAR MR. SULZER.

Quelque variées que paroiſſent les opérations de l'ame, elles ſe réduiſent toutes à l'exercice de deux facultés, qui ſont les ſources de toutes ſes affections. L'une eſt la faculté d'*appercevoir*, ou de connoître les qualités des choſes; l'autre, celle de *ſentir*, ou d'être affectée agréablement ou déſagréablement.

Dans l'exercice de ces deux facultés, l'ame paroît ſi différente d'elle-même, qu'on eſt tenté d'adopter l'opinion des anciens philoſophes, qu'il y a deux ames dans l'homme, l'une raiſonnable & l'autre ſenſitive. L'ame raiſonnable des anciens eſt ce que nous appellons la faculté d'appercevoir, & leur ame ſenſitive eſt la faculté de ſentir.

Ordinairement l'ame exerce ces deux facultés à la fois; il y a cependant des cas dans leſquels l'une ou l'autre prédomine au point qu'elle paroît occuper ſeule toute l'activité de l'ame. Ces cas offrent à un obſervateur exact, des faits & des circonſtances propres à répandre du jour ſur pluſieurs queſtions pſychologiques très importantes. C'eſt ce que je me propoſe de faire voir dans ce Mémoire.

Je commence par recueillir les faits principaux qu'on peut obſerver lorſque l'ame exerce la faculté d'appercevoir.

Il y

Il y a une analogie si parfaite entre cette faculté & le sens de la vue, que la nature de celui-ci peut nous aider à mieux connoître celle de l'autre; & il est essentiel pour mon but que j'entre dans le détail de cette analogie, quoique la chose soit assez connue.

Les objets visibles se présentent à l'œil avec plus ou moins de clarté, de netteté & de précision, selon les circonstances qui accompagnent la vision. Dans les circonstances les plus favorables, on distingue les moindres parties, tant dans les couleurs que dans les formes; on peut en faire le dénombrement, fixer l'attention sur chacune en particulier, & décomposer en quelque façon l'objet visible dans ses plus petites parties. Lorsque les circonstances sont moins favorables, soit que la lumiere ne soit pas suffisante, que les objets se trouvent trop éloignés, ou qu'il y ait quelque défaut dans l'œil; nous ne voyons que confusément; nous ne distinguons que les grandes parties, & même avec peu de certitude; l'objet, quelque composé qu'il soit, nous paroît une seule masse où il ne nous est pas possible de distinguer quelque partie.

Ces mêmes différences ont aussi lieu dans la connoissance des choses que l'ame se représente sans le secours immédiat des sens. Lorsque nous méditons sur quelque matiere abstraite, ou que nous nous rappellons des faits; les divers objets particuliers dont la masse totale qui nous occupe, est composée, se confondent quelquefois au point, qu'aucun ne nous occupe en particulier; & quelquefois, nous les distinguons fort clairement les uns des autres; nous pouvons en faire l'énumération, & indiquer même les marques qui les caractérisent. Voilà l'analogie entre la vision & la perception, considérée en général. Elle s'étend plus loin.

On peut démontrer par des principes d'Optique, que dans le grand nombre d'images, peintes à la fois sur le fond de l'œil, il n'y en a qu'une seule qui soit parfaitement distincte; qu'elle y occupe un espace extrèmement petit que l'on peut regarder comme un point physi-

physique: on sait de plus que, pour obtenir une image entiérement distincte, il faut faire quelque effort, qui consiste en ce que l'on dirige l'axe de l'œil vers le milieu de l'objet; que l'on ouvre ou ferme la prunelle pour la proportionner au degré de lumiere qui émane de l'objet; & pour que l'humeur cristalline soit bien placée. Tout cela est analogue à ce qui se passe dans la vision intérieure de l'ame.

On se rappelle quelque fait. D'abord l'esprit est frappé d'un grand nombre d'idées à la fois, comme l'œil l'est en s'ouvrant pour voir une campagne. Aussi longtems que le fait qu'on se rappelle n'est fixé qu'en gros, tout s'y présente confusément, & l'esprit n'y distingue aucune partie comme séparée de la masse totale. Mais, dès qu'on fait quelque effort pour diriger l'attention sur un des objets en particulier, alors la perception de cet objet devient claire, & celle de l'objet entier s'obscurcit davantage. Si l'objet particulier qu'on a fixé, est composé, la perception n'a pas encore toute la clarté possible; il faut de nouveau décomposer l'objet & fixer l'attention sur une seule de ses parties qui ne soit plus divisible; & alors on saisit cette partie avec toute la clarté possible. C'est ainsi qu'on parvient à la connoissance distincte d'un objet composé. Pendant que l'esprit est occupé de l'analyse d'un tel objet, il n'y a pour chaque moment qu'une seule notion indivisible, qui soit bien claire, un seul point lumineux dans l'ame, & une lumiere médiocre dans les points voisins, ou une perception confuse des notions immédiatement liées à celle sur laquelle la lumiere est concentrée. C'est, (pour le remarquer en passant,) cette perception confuse des notions voisines qui ouvre à l'esprit le passage d'une idée à l'autre.

Cette attention concentrée sur un seul point de l'objet occasionne la distraction qui accompagne ordinairement la méditation profonde. L'activité de l'ame s'y borne tellement à un seul objet, que les sensations mêmes perdent leur force. Aussi longtems que dure cet acte par lequel l'esprit saisit avec une clarté parfaite quelque notion simple, les autres facultés sont assoupies; l'ame n'a, ni sentiment, ni inclina-

clination, ni volonté: on peut dire même qu'alors elle ne se sent pas elle-même, qu'elle n'est présente qu'à son objet. Ce qui caractérise cet état de méditation, est l'oubli de soi-même, qui rend l'esprit inaccessible à tout ce qui pourroit le distraire de son objet. Cela le met parfaitement à son aise, & il manie son objet avec une liberté & une facilité parfaites, n'étant sollicité par aucune autre force que par celle de saisir exactement l'objet qu'il a devant lui.

Cet état si favorable à la recherche de la vérité, a des désavantages. Aussi longtems qu'il dure, on est incapable de réfléchir sur soi-même; on ne sent aucun motif qui tende à des actions relatives à sa personalité; l'homme devient lui-même un être abstrait qui ne tient à rien dans le monde, tout ce qu'il y fait au delà de ce qui a rapport à la méditation, il le fait machinalement & sans le savoir; il a tous les symptômes d'un imbécille. On peut alléguer en preuve ces fameuses distractions, semblables à celles d'Archimede, auxquelles tous les philosophes qui se livrent à de profondes méditations, sont quelquefois sujets. Voila qui suffit pour caractériser cet état de l'ame, que je nommerai dans la suite *l'état de méditation.*

Un état directement opposé à celui-là est *l'état du sentiment.* J'appelle sentiment, toute perception entant qu'elle est agréable ou désagréable, ou entant qu'elle produit le désir ou l'aversion. Le sentiment est donc un acte de l'ame qui n'a rien de commun avec l'objet qui le produit, ou qui l'occasionne. Ce que *Descartes* a dit, que la douleur n'est point dans l'aiguille qui la produit, est vrai de tous les objets qui excitent quelque sentiment dans l'ame. Ce n'est point l'objet que l'on sent, c'est soi-même. Dans la méditation, l'esprit est occupé d'une chose qu'il regarde comme hors de lui; dans le sentiment, l'ame n'est occupée que d'elle-même. Sans cette condition le sentiment ne peut avoir lieu. J'ai déjà remarqué que les sensations mêmes qui, ordinairement, produisent le sentiment le plus vif, deviennent imperceptibles dans la méditation profonde; cela prouve que le sentiment n'a lieu que dans l'état des perceptions confuses. On

peut

peut même dire, que la force du sentiment est toujours proportionnée au degré de confusion qui regne dans les perceptions; de sorte que le même objet, apperçu avec une confusion double, produit un sentiment deux fois plus fort, que celui qui résulteroit de l'objet dont la confusion seroit deux fois moindre. Cela est confirmé par ce que j'ai prouvé ailleurs, de la vivacité des sensations. En général, les objets apperçus par le sens de la vue, frappent moins que ceux que nous recevons par l'ouïe; ceux-ci moins que ceux qui operent sur l'ame par le moyen des autres sens, plus grossiers encore (*). La raison en est que la vue produit des perceptions moins confuses, que ne sont celles de l'odorat ou du goût. Les objets visibles se présentent si distinctement à l'esprit qu'il est instruit de leur forme, de leur grandeur, de leur couleur, du lieu où ils sont; ceux de l'ouïe se présentent très confusément; à peine croit-on s'appercevoir d'où nous vient l'impression; l'objet même est caché; dans l'odorat, l'objet qui produit la sensation disparoît absolument, on ne sent que son effet, avec une confusion complette.

Il semble donc indubitable que, dans *le sentiment*, l'ame ne sent clairement que son propre état, & que l'objet qui produit cet état lui est presque imperceptible; au lieu que, dans la méditation, l'ame s'apperçoit à peine elle-même, & ne se fixe qu'à l'objet qui paroit hors d'elle.

Cela sera plus clair encore par les observations suivantes sur le passage d'un état de l'ame à l'autre. L'analogie entre la vision & les perceptions intérieures dont j'ai déjà parlé, va nous servir encore à expliquer très clairement ce passage. C'est une condition très essentielle pour la vision distincte que la lumiere ne soit pas trop forte. Aussi longtems qu'elle est proportionnée à la force de l'œil, on voit à son aise; on ne sent point l'organe qui est frappé, on n'est occupé que de l'ob-

Fff 2

(*) Voyez la *Théorie des sentimens agréables & désagréables*, III. Partie, dans les Mémoires de l'Acad. pour l'Année 1752. p. 367.

l'objet. Dès que la lumiere est trop forte, elle frappe l'œil de façon qu'il en est incommodé; il se sent ébloui, & l'ame n'apperçoit plus l'objet seul, mais elle sent encore la gêne où se trouve l'organe de la vision. L'éclat de la lumiere frappe tellement les nerfs de l'œil, que la vision se change en tact. Ce ne sont plus les nerfs optiques qui produisent cette sensation; ce sont ceux qui appartiennent au sens du *Toucher*. L'ame quitte donc l'objet visible pour se livrer à la perception de ce qui l'incommode; & ce qui l'incommode, n'est pas l'objet même, c'est la lumiere, ou plutôt la gêne que cette lumiere cause par son éclat.

Les choses se passent de même toutes les fois que l'ame sort de l'état de la méditation pour entrer dans celui du sentiment; c'est toujours quelque chose qui ressemble à l'éblouissement, qui produit ce passage. La cause de ce changement est ordinairement une idée, qui, en se présentant, en réveille subitement un grand nombre d'autres; cela nous confond, & alors nous faisons attention à notre état: nous quittons brusquement l'objet que nous avions contemplé, & nous entrons dans l'état du sentiment. Qu'il me soit permis d'alléguer un petit fait fort propre à éclaircir tout cela. J'étois présent, il y a quelques années, lorsqu'on fit des expériences sur le jet des bombes. Le mortier avoit une élévation à peu près verticale; la bombe devoit tomber un peu en avant de la place où étoient les spectateurs, & on observoit le tems de la montée & celui de la descente. Les spectateurs s'amusoient fort paisiblement à voir la bombe pendant qu'elle montoit; on remarqua le moment où elle cessoit de monter, on la vit descendre peu à peu, chacun n'étoit occupé que de cet objet; lorsque tout d'un coup on entendit crier, *elle vient à nous*. Les idées que cela réveilla firent cesser subitement la contemplation de l'objet; chacun ne pensa plus qu'à soi-même; l'un courut à droite, l'autre à gauche pour éviter le danger. Ce fait est une image de ce qui arrive toutes les fois que l'esprit passe de l'état de la méditation à celui du sentiment.

Il y

Il y a encore une chose très digne d'être remarquée ici. C'est que, pendant la méditation, il ne se passe rien dans le corps qui puisse réveiller en nous l'idée de nous-même; tout y est d'une tranquillité parfaite; au lieu que l'état du sentiment est toujours accompagné de quelque sensation. La douleur resserre la poitrine, le plaisir l'élargit au contraire. La circulation du sang & les nerfs des intestins sont sensiblement affectés lorsque l'ame éprouve un sentiment tant soit peu fort. Dans la méditation, il semble qu'il n'y ait qu'un très petit nombre de nerfs foiblement ébranlés; & dans la commotion, l'ébranlement des nerfs est quelquefois si grand, qu'il se communique au systeme entier. C'est aux Physiciens à nous apprendre, s'il n'y a pas la même différence entre ces deux especes de nerfs qu'il y a entre les nerfs optiques & ceux qui causent la sensation de l'éblouissement.

Je crois que cela peut suffire pour prouver que, dans l'état du sentiment, l'ame apperçoit clairement son état & y fixe son attention, mais qu'elle apperçoit obscurément l'objet qui l'a produit, & n'y prend pas garde; observation très importante, qui peut servir, comme je le ferai voir dans la suite de ce Mémoire, à répandre un grand jour sur les questions les plus importantes de la Psychologie. C'est cette importance de la matiere qui m'engage à dissiper quelques doutes qui pourroient naître contre ce que je viens dire sur la nature de l'état du sentiment.

L'agrément qui accompagne la méditation, le plaisir qui résulte des travaux de l'esprit, de la contemplation de tout ce qui est parfait, la joie qu'on sent lorsqu'on réussit à voir distinctement ce qui nous a parû fort compliqué, tout cela semble prouver que le sentiment agréable vient réellement de la connoissance distincte des objets; ce qui seroit directement contraire à ce que j'ai remarqué sur l'état du sentiment.

Il n'est pas difficile de répondre à cette objection; mais il faut, pour cela, qu'on examine très exactement ce qui se passe en nous dans

les cas objectés. Le plaisir qui semble accompagner la méditation profonde, ne l'accompagne pas, mais il peut la suivre. Ce n'est jamais au moment que nous sommes occupés à développer une idée qu'elle nous fait plaisir; c'est toujours dans ces instans où l'ame, après avoir vû l'objet, fait un retour sur elle-même. Ces deux actes de l'ame peuvent se succéder alternativement avec tant de rapidité qu'on les croit simultanés; ce qui très certainement n'est point possible. Au fond, rien ne nous intéresse que ce qui est dans nous-même; or, (j'en appelle à l'expérience de tout le monde,) tout objet de méditation nous paroît hors de nous. Aussi longtems donc que cela est ainsi, il ne nous touche pas. C'est d'ici qu'il faut tirer la véritable différence qu'il y a entre les idées de spéculation & les idées de pratique. Celles-là sont comme hors de nous & ne sont accompagnées d'aucun retour sur nous-même; celles-ci sont tellement dans nous, que nous ne les appercevons qu'avec le sentiment de nous-même qui accompagne leur perception. Le Géometre occupé à résoudre un probleme n'en a pas le moindre plaisir tant que son activité est concentrée sur son objet. Mais, après avoir fait quelque progrès dans sa découverte, il rassemble rapidement les idées qu'il vient de développer, & dont l'ensemble lui fait comprendre la justesse de sa solution. C'est alors que son ame fait un retour sur elle-même, & qu'elle observe ce qui se passe en elle. C'est ce qui produit cette émotion plus ou moins forte dont chaque sentiment est accompagné. Dans les travaux de l'esprit qui ne sont pas des plus profonds, on quitte de tems en tems le fil de la recherche, pour recueillir en une seule idée tout ce qu'on a fait jusqu'au moment présent: & c'est alors qu'on se livre au plaisir de ce travail; plaisir qui est produit par l'idée confuse de notre objet & par l'idée claire de nous-mêmes. Ce libre passage de l'un de ces actes de l'esprit à l'autre, est l'état le plus parfait où l'ame puisse se trouver; & c'est l'habitude de passer alternativement, mais très rapidement, de l'un à l'autre, qui fait le caractere de ces Génies également propres pour la spéculation & pour la pratique. La difficulté de passer de l'état de contemplation à celui du sentiment rend quelquefois les esprits les plus péné-

pénétrans très peu propres aux affaires, & leur donne un air d'imbécillité qui fait qu'on les confond quelques fois avec les esprits bornés.

Il y a encore un cas qu'il est important d'analyser ici. Quelquefois les sentimens les plus vifs semblent être produits par une très grande clarté dans la perception des objets; ce qui pourroit encore paroître contraire à mes observations sur la nature de l'état du sentiment. On a des exemples de personnes qui, pendant très longtems, ont vêcu dans divers égaremens de l'esprit & du cœur, & qui, frappées subitement par un trait de lumiere, sont revenues à la raison & à la vertu.

Ces traits de lumiere capables de ramener des esprits égarés, ressemblent beaucoup aux éblouissemens causés par un trop grand éclat, & le cas est si peu contraire à nos observations, qu'il sert plutôt à les confirmer. Ce changement subit qui produit une révolution entiere dans l'esprit & dans le cœur, vient précisément du grand nombre d'idées jusqu'alors très confuses, réveillées par une seule idée fort lumineuse. Un homme qui, pendant longtems, avoit mal vêcu, a une idée fort obscure du désordre de sa vie; cela ne le frappe point. Un moment heureux lui fournit une seule idée, qui répand plus de jour sur ces idées obscures; alors elles se présentent toutes à la fois avec assez de clarté pour fixer l'attention; leur nombre produit l'étonnement & l'émotion qui l'obligent de rentrer en soi-même & de prendre une connoissance claire de sa propre difformité: de là naît enfin le changement subit dont il s'agit ici: il n'est dû qu'au sentiment de soi-même; mais ce sentiment est occasionné par la contemplation d'une idée si lumineuse qu'elle produit l'éblouissement.

J'ai décrit, avec autant de clarté qu'il m'a été possible, les deux états extremes de l'ame; l'état de la méditation & l'état du sentiment. Il y en a un troisieme qui tient le milieu entre ces deux, & que je nommerai *état de contemplation*. Je vais considérer les principaux phénomenes qu'il offre à l'observation.

Dans

Dans cet état, les opérations de l'esprit semblent tenir également à la méditation & au sentiment. Mais, comme il est impossible que l'attention soit dirigée en même tems vers deux objets différens, l'état de contemplation résulte probablement d'une succession continuelle & rapide de la méditation & du sentiment. On saisit un objet, & l'instant d'après, qui peut bien nous paroître le même instant, on observe en soi-même l'impression qu'il fait sur nous. C'est ainsi que nous nous livrons à la contemplation d'un beau paysage: l'œil parcourt rapidement les divers objets qu'il y distingue, il se fixe sur chacun d'eux pour un instant, sans l'approfondir: & l'esprit, après avoir saisi chaque partie, jouit un instant de l'impression agréable que cet objet fait sur lui. Tout se passe sans effort; les impressions ne font qu'effleurer l'ame; on se contente d'idées confuses, que l'on ne veut pas approfondir.

Cela peut venir de deux causes: ou, de ce que l'esprit n'est pas disposé à s'attacher fortement aux objets qui se présentent; ou de ce que ces objets sont de nature à ne point permettre qu'on les approfondisse. Il y a des tems où l'activité de l'ame n'est que médiocre, où l'on ne se sent disposé à aucun effort, soit fatigue, soit mollesse qui ait produit ce relâchement des forces. C'est alors que les choses ne nous frappent que legèrement. D'autres fois, c'est la nature de l'objet même qui met des bornes à l'activité. Quand l'objet est tel, que d'un côté il n'est pas possible de l'approfondir, & que de l'autre, il ne nous intéresse pas beaucoup; ce ne sauroit être tout au plus qu'un objet d'amusement. Voilà donc d'où peut naître l'état de contemplation.

Les idées dont on est occupé dans cet état, n'ont ni la netteté ni la précision de celles que fournit l'état de méditation; nous ne les saisissons qu'en gros: nos jugemens sur la qualité des choses sont peu sûrs alors. Le sentiment qu'on y éprouve ne fait pas des impressions profondes, on ne connoît qu'imparfaitement les causes qui le produisent; quelquefois même, on est incertain s'il est agréable ou désagréable;

ble; nous sommes dans un état d'aisance semblable au cours paisible d'une riviere qui traverse une plaine. L'ame jouit alors d'une tranquillité parfaite; elle dirige son attention machinalement, mais avec facilité, sur toutes les parties de l'objet qui l'amuse. Disons enfin que c'est l'état où nous nous trouvons le plus souvent, l'état de médiocrité pour toutes les opérations de l'ame.

Voilà les divers états dans l'un desquels l'ame se trouve nécessairement toutes les fois que l'exercice de ses facultés est accompagné de l'apperception. Car nous ne parlons ici, ni du sommeil, ni des autres états où l'ame n'a qu'une connoissance obscure d'elle-même ou de ses opérations.

Il résulte de ces observations qu'il y a un état où l'homme voit très distinctement & ne sent rien; un autre où il sent fortement & ne voit rien; un troisieme où il voit & sent assez clairement pour prendre connoissance de ce qui est hors de lui & de ce qui est en lui.

J'ai dit, au commencement de ce Mémoire, que la connoissance développée de ces trois états peut être très utile dans l'examen de plusieurs questions psychologiques, dont la solution en dépend. Il me reste quelques remarques à ajoûter pour le prouver.

Ce qui a été remarqué sur l'état de la méditation, nous fait comprendre pourquoi les hommes les mieux exercés dans les méditations profondes sont fort souvent inhabiles aux affaires. C'est parce que l'habitude de méditer profondément diminue l'attention sur soi-même, & la facilité de réunir un grand nombre de choses dans un seul point de vue, facilité si nécessaire pour réussir dans les affaires. La méditation profonde fait l'effet du Microscope, qui nous montre très distinctement les plus petites parties d'un objet, mais qui en même tems diminue tellement le champ apparent, qu'il nous est impossible de voir l'objet entier. Dans la plûpart des affaires, l'essentiel est d'éloigner tellement de notre vue les divers objets qui y sont rélatifs, qu'il soit possible de les saisir tout à la fois pour voir leurs liaisons & leurs

leurs rapports. On voit encore par là que les vérités les plus évidentes ne peuvent être celles qui influent le plus sur les actions. Car l'évidence ne résulte que de la considération successive des idées qui y entrent: par cette considération successive l'attention est entierement fixée sur les objets, que l'on voit comme hors de soi. Or, pour agir, il faut voir les choses en soi; ce qui n'est pas possible dans un état où l'on oublie presque entierement sa personalité. La vérité qui doit influer sur nos actions doit être saisie sans effort, par une attention médiocre, qui nous permette de réfléchir sur nous-mêmes & de sentir l'effet de cette vérité sur nous. Tout cela se déduit de la nature de l'état de méditation.

La considération de l'état du sentiment nous fournit de même plusieurs remarques très importantes.

D'abord, il est évident que l'on ne parvient jamais à connoître exactement tout ce qui appartient aux objets qui produisent le sentiment. On peut même dire que, plus un sentiment est fort, plus il y a de difficulté à bien connoître l'objet qui le produit. On sent sa présence, on l'apperçoit clairement; mais on n'a pas le tems d'observer comment il opere sur nous. C'est parce que le sentiment fixe d'abord l'attention sur nous-même & la détourne de l'objet. On voit visiblement cet effet dans les passions fortes. La frayeur fait qu'on oublie l'objet qui nous menace, & qu'au lieu d'éviter le danger on en approche. Il arrive souvent qu'un homme transporté de colere se venge sur un innocent & laisse échapper le coupable. On conçoit en général d'où vient l'aveuglement qui accompagne presque toujours les passions fortes. C'est que dans ces passions on ne fait attention qu'à son état intérieur, en oubliant tout ce qui est hors de nous.

Une des choses les plus difficiles, c'est d'approfondir la nature des objets qui excitent des sentimens forts. On en trouve deux raisons; la premiere, parce qu'on a rarement le tems de méditer quand ces objets ont commencé à nous affecter; la seconde, parce que le senti-

ſentiment eſt toujours produit par un grand nombre de perceptions qui agiſſent à la fois, & qui par conſéquent ſont néceſſairement confuſes. La tendreſſe qu'un pere ſent pour ſon enfant eſt le réſultat d'un très grand nombre de perceptions qui ſe préſentent tout à la fois, & qui, en produiſant d'abord le ſentiment, fixent l'attention de l'eſprit ſur l'état intérieur de l'ame.

On peut encore employer utilement les obſervations ſur la nature des trois états de l'ame, pour faire voir quelles ſont les diſpoſitions de l'eſprit qui rendent les hommes plus ou moins capables de ſentiment, par conſéquent ce que l'on doit faire dans l'éducation pour augmenter ou pour diminuer la ſenſibilité du cœur. Car il eſt évident que, plus on a de facilité à ſaiſir les objets par intuition, plus on eſt diſpoſé à la ſenſibilité du cœur; & d'un autre côté, plus on poſſede l'habitude de méditer profondément, plus on diminue la diſpoſition que l'on déſigne par le terme de *cœur ſenſible*. On peut donc dire, généralement parlant, que les ſciences abſtraites peuvent ſervir à diminuer la ſenſibilité du cœur, & que les beaux-arts au contraire peuvent ſervir à l'augmenter.

Artibus ingenuis — —
Pectora molleſcunt, aſperitaſque fugit.

Je remarque, en dernier lieu, que les obſervations faites ſur l'état de ſentiment, nous font concevoir qu'il n'eſt preſque pas poſſible de ſe garantir des impreſſions ſubites, ni d'affoiblir par le raiſonnement de telles impreſſions au moment qu'on les ſent. Un ſeul inſtant ſuffit ordinairement pour produire un ſentiment vif; & nous avons vû combien il eſt difficile de connoître comment cela ſe fait. Nous ſentons le déſir ou l'averſion ſans ſavoir pourquoi; nous ſommes ſollicités par des forces que nous ne connoiſſons pas Il n'eſt donc pas poſſible de leur oppoſer une réſiſtance directe. Nous ſentons la plaie ſans voir la flêche qui nous a bleſſé.

Il eſt donc certain que l'homme n'eſt point maître des premiers mouvémens de l'ame. Il ne conſerve pas la moindre liberté pour ſentir ou pour ne point ſentir. Tout ce que l'on peut faire pour empêcher l'effet du ſentiment eſt de lui oppoſer un ſentiment plus fort. Mais il y a malheureuſement des cas où nos perceptions ſont ſi embrouillées qu'on ne peut pas même démêler quel eſt l'objet qui a produit le ſentiment. J'ai traité ce cas particulier dans un Mémoire lû à l'Académie il y a quatre ans (*).

Je conclus de là, que les ſentimens & les ſuites immédiates qu'ils ont, ſont des actes involontaires de l'ame. C'eſt donc à juſte titre qu'on leur a donné le nom de *paſſions*. Car, quoique l'ame agiſſe indubitablement dans la production de ces paſſions, on n'en voit que l'effet, dont la cauſe immédiate eſt ſi bien cachée au fond de l'ame, qu'on ne peut la connoître que très rarement.

L'homme, malgré la *liberté phyſique* par laquelle il produit lui-même les moindres actes de ſon eſprit, jouit très rarement de ſa *liberté morale*, qui conſiſte dans l'avantage d'agir par connoiſſance de cauſe, de ſuivre des regles & des maximes de ſon propre choix. Il ignore la plûpart du tems les raiſons qui déterminent ſon jugement & les motifs qui déterminent ſes actions. Comme, dans le monde matériel, tout procede d'un néceſſité phyſique; de même, dans le monde intellectuel, tout réſulte d'une néceſſité morale.

Cependant les cas où il nous eſt permis d'analyſer nos raiſonnenemens & nos ſentimens, nous donnent lieu de penſer que, comme dans le monde matériel tout ſe fait d'après des loix conſtantes & invariables qui tendent à la conſervation de l'univers; dans le monde intellectuel de même, il y a des loix qui ne ſont pas moins invariables & moins ſages que celles du monde viſible.

(*) Mémoires de l'Acad. pour l'année M DCCLIX. p. 433.



OB-

OBSERVATIONS
SUR
QUELQUES DIMENSIONS
DU
MONDE INTELLECTUEL.

PAR MR. LAMBERT.

Pour indiquer le ſujet de ce Mémoire, je commencerai par rapporter ce qui m'en a fourni l'occaſion. C'eſt la lecture de *Longin* & la comparaiſon de ce qu'il dit ſur le Sublime avec ce que d'autres auteurs en ont dit. *Longin* commence par faire ſouvenir ſon ami *Terentianus* du petit traité de *Cecilius*, qui roule ſur la même matiere, & du peu de ſatisfaction que leur a cauſée la lecture de cet ouvrage. Il taxe le ſtile de *Cecilius* de baſſeſſe & de répondre aſſez mal à la dignité de ſon ſujet. Il l'accuſe encore de n'avoir pas touché les points principaux de cette matiere „*Cecilius*, dit-il, s'efforce de montrer „par une infinité de paroles ce que c'eſt que le grand & le ſublime, „comme ſi c'étoit un point fort ignoré: mais il ne dit rien des moïens „qui peuvent porter l'eſprit à ce grand & à ce ſublime. Il paſſe cela, „je ne ſai pourquoi, comme une choſe abſolument inutile, etc."

Comme le petit traité de *Cecilius* ne nous eſt point parvenu, il ſemble qu'il faille nous en tenir au jugement de *Longin*. Cependant il y auroit eu des raiſons à y oppoſer. D'abord *Longin* ſemble inſinuer que pour écrire ſur le ſublime il faut emploïer un ſtyle ſublime, ce qui peut être *bon* ſans cependant être *néceſſaire*, parce que le ſtyle didactique doit être ſimple & clair. Enſuite *Cecilius* eſt

blâmé d'avoir emploïé beaucoup de paroles pour dire ce que c'eſt que le *grand* & le *ſublime*. A' la vérité je le blâmerois auſſi, non pas de cette infinité de paroles, mais parce qu'il eſt très vraiſemblable qu'avec tout ce verbiage il n'a rien dit de ſatisfaiſant. Car ſi *Cecilius* avoit bien dit *ce que c'eſt* que le ſublime, *Longin* n'auroit pas eu ſujet de le condamner ſur ce qu'il n'a pas indiqué *les moïens d'y parvenir*, puiſque ces moïens ſe trouvent comme d'eux-mêmes, quand le ſublime eſt bien connu. Et ſi *Longin* prétend que ce n'eſt pas là *un point fort ignoré*, je doute qu'on en tombe d'accord. Il eſt vrai qu'on peut alléguer un grand nombre d'exemples, où le ſublime brille trop pour être méconnu. Mais tous ces exemples ne font que nous le *montrer*, ſans nous l'*expliquer*, ſans nous en donner une définition qui ſoit adéquate & qui puiſſe ſervir de baſe dans la théorie & dans la pratique. C'eſt ainſi que la lumiere ſe fait voir à tous, mais la *voir* & la *connoitre intimement* ce ſont deux choſes fort différentes. Si donc *Cecilius* s'eſt donné beaucoup de peine pour examiner ce que c'eſt que le ſublime, ce n'eſt pas de quoi *Longin* devoit le blâmer: & s'il n'y a point réuſſi, *Longin* pouvoit ſe borner à louer la bonne intention que *Cecilius* avoit eue.

Mais *Longin* a-t-il mieux réuſſi, & après avoir lu ſon traité eſt-on plus inſtruit de la nature & de l'eſſence du ſublime? Quant à moi je ne pourrois le dire, & je connois de grands Critiques, qui doutent que *Longin* ſe ſoit entendu lui-même; du moins trouve-t-il de la peine à s'expliquer aſſez nettement. La plupart de ceux qui, après lui, ont écrit ſur les beaux arts & ſur les belles lettres, ſe ſont fait un devoir de chercher une définition plus adéquate, & chacun d'eux trouvoit des ſucceſſeurs, qui croïoient devoir faire encore de nouvelles recherches. Les uns expliquoient le ſublime par des *expreſſions*, qui n'étoient que *grammaticalement équivalentes*; les autres vouloient le faire connoitre par ſes *effets*; d'autres par les *occaſions* où il faut l'emploïer, & d'autres enfin par des *termes*, qui avoient encore plus beſoin d'être définis, que le *ſublime* même. On en trouve auſſi, qui vou-

vouloient le faire connoitre en faisant une *énumération des especes.* Et si, chez tous ces auteurs, on trouve par-ci par-là quelque trait qui paroit toucher à ce qui est essentiel, ils ne s'y arrêtent pas, mais ils se perdent d'abord dans des idées qui ne sont qu'*accessoires*, ou qui éloignent de nouveau du but qu'il falloit se proposer. Il semble donc que tant d'essais manqués devroient retenir quiconque voudroit remanier ce sujet pour le mettre une fois pour toutes dans son jour. Aussi trouve-t-on des auteurs qui renonçant à ces recherches avancent que le sublime doit être *senti* & non *défini*; ce qui seroit très vrai, si le sublime étoit une perception simple.

Pour voir ce qu'il y auroit encore à dire là-dessus, & pour procéder méthodiquement, commençons par établir l'état de la question & les cas qu'elle renferme. Pour cet effet il ne suffit pas de dire qu'il s'agit de définir le sublime, ou d'expliquer en quoi il consiste. Car il s'en faut de beaucoup que toutes les définitions se trouvent de la même maniere. Quelquefois la chose elle-même est si connoissable & présente toutes ses parties d'une façon si distincte, qu'on n'a qu'à les nommer pour en faire une définition adéquate & complette. D'autres fois un terme doit être défini parce qu'il est vague & ambigu, & il faut en tirer la définition d'un grand nombre de phrases où il est emploïé. Ces cas different de celui dont il est ici question. Tâchons donc de le rendre plus connoissable.

D'abord je remarque que le terme *sublime*, lorsqu'il est emploïé dans les belles lettres, est un terme métaphorique, transporté du *monde physique* dans le *monde intellectuel.* Il appartient donc à la seconde de ces classes, dont je fais l'énumération dans le 10[me] chapitre de ma *Sémiotique*; & la regle que je donne pour les termes de cette classe, c'est qu'il faut commencer par exposer ce qu'on appelle le *tertium comparationis.*

En second lieu, pour satisfaire à une autre regle, qui pour le cas présent demande encore d'autres données, j'observe que le terme *sublime*

blime se trouve avoir quelque *affinité* avec un certain nombre d'autres termes, qu'il conviendra de passer en revue pour fixer d'autant mieux les *différences* & les *nuances*, par lesquelles ils se rapprochent les uns des autres dans l'usage qu'on en fait ou qu'on en doit faire. Tous ces termes font une espece de *famille* en ce qu'ils tiennent les uns aux autres; & il s'agira de voir, si tous ceux qui s'y rapportent dans le *monde physique*, y appartiennent encore lorsqu'on en fait usage dans le *monde intellectuel?* Commençons par le monde physique.

Ce qu'on y appelle *haut* & *élevé* approche le plus de ce qu'on nomme *sublime*. La différence qu'il y a, c'est que l'idée du *haut* renferme celle de l'étendue ou de toute la longueur verticale d'un objet. C'est ainsi que nous disons une haute montagne, un arbre fort haut etc. Le terme *élevé* veut dire placé à une certaine hauteur. Ce terme renferme donc l'idée de la hauteur de l'objet, qui sert d'appui à ce qui est élevé. Au contraire, ce qu'on appelle *sublime* ne renferme ni la mesure de la hauteur ni l'idée de l'appui. Il s'y trouve quelque chose d'absolu, & ce qui est *sublime* est considéré comme flottant au-dessus de tout ce qu'on nommeroit simplement *haut* ou *élevé*. Enfin le *sublime* differe encore de ce qu'on nomme *éminent*, en ce que ce qui est *éminent* se rapporte encore à l'objet *haut* ou *élevé* au dessus duquel il *émine*.

Voilà donc les différences que j'ai cru devoir faire. Je n'ignore pas que, chez les auteurs latins, le terme *sublimis* ne se prend pas toujours dans un sens aussi absolu que je viens de le faire. Mais j'ai choisi cette signification, parce que c'est celle qu'on a transportée dans le monde intellectuel.

Après ces termes, qui se rapprochent beaucoup les uns des autres, je passerai à ceux qui en different d'avantage, ou qui même sont totalement opposés. Tels sont les termes *bas*, *profond*, *abaissé*, *enfoncé*. Ces termes se rapportent encore à la direction *verticale*. Mais il y en a d'autres qui se rapportent à une direction plus ou moins *ho-*

rizon-

rizontale, tels que sont p. ex. les termes *éloigné*, *reculé*. Enfin, il s'en trouve qui ne se bornent pas à une dimension, comme p. ex. les termes *grand*, *vaste*, *ample*, *étendu* etc.

Or, pour transporter ces termes du monde physique dans le monde intellectuel, il s'agira de bien saisir le *tertium comparationis*, qui doit servir comme de pont de communication. Pour cet effet je choisis d'entre ces termes les trois suivans

sublime, *éloigné*, *profond*.

Ces trois termes partent d'un point commun. Car, soit qu'on *s'éleve*, ou qu'on *s'éloigne*, ou qu'on *s'enfonce*, on part de l'endroit où on s'est trouvé, & que l'on considere comme *présent* ou *proche*. Ainsi ce qu'on appelle *proche* se trouve être également en opposition avec ce qu'on appelle *sublime*, *éloigné*, *profond*. Il n'y a d'autre différence que celle de la *direction*. On voit aussi que ces termes, dans le monde physique, sont emploïés à exprimer *les différentes dimensions de l'espace*. Et comme le point qu'on regarde comme fixe & duquel on part, est celui où nous sommes, je veux dire, un point de la surface de la Terre, c'est aussi à ce point que nous rapportons communément ce que nous appellons *sublime*, *éloigné*, *profond*.

Voila donc le *tertium comparationis* établi. Transportons-nous maintenant dans le monde intellectuel, & nous y retrouverons tous ces termes changés en métaphores. Remarquons pour cet effet que le monde intellectuel comprend les différens objets des *facultés de l'ame*, c'est à dire ceux de *l'entendement* & de *la volonté*. Or, à l'égard des uns & des autres, le *tertium comparationis* exige que nous commencions par ce qui est considéré comme *proche*, afin de partir de là comme d'un point fixe vers ce qui devra être considéré comme *sublime*, *éloigné*, *profond*. Appliquons d'abord cette façon de procéder aux objets de l'entendement proprement tels, je veux dire, sans avoir égard aux Belles-lettres.

Ici il eſt clair que ce qu'on peut appeller *proche*, c'eſt la *connoiſſance commune*, j'entens celle qui eſt à la portée de tout le monde, qui ne demande pour être acquiſe, que l'uſage des ſens & de l'imagination, ſans qu'il s'y joigne beaucoup d'attention ni de réflexion, ni aucune étude particuliere.

Ce qui étant établi, on voit aiſément que ce qu'on peut appeller *éloigné*, ou reculé au-delà des bornes de cette connoiſſance commune, comprend tout ce qui, pour être connu, demande *une ſuite plus ou moins longue de raiſonnemens*. La phraſe: *pouſſer fort loin ſes recherches*, indique à peu près la même choſe. La connoiſſance commune nous offre un grand nombre d'idées & de propoſitions, dont nous avons une *connoiſſance hiſtorique*, en ce que nous les devons, ſoit à notre propre expérience, ſoit à celle des autres. Un peu d'attention nous fait voir, qu'en comparant ces propoſitions enſemble, il s'en trouve qui peuvent ſe lier en ce qu'elles ſervent de prémiſſes dont il découle quelque concluſion. A' meſure que ces concluſions ſe lient à d'autres prémiſſes, le fil du raiſonnement *s'allonge* & on parvient à des concluſions plus *éloignées* du premier point où on avoit commencé. Le grand nombre de propoſitions que la connoiſſance commune fournit, fait entrevoir que ces ſortes de liaiſons & de recherches peuvent *être pouſſées fort loin*. Et comme les nouvelles prémiſſes dont on a beſoin ne ſe préſentent pas toujours d'elles-mêmes, & que pour les trouver il faut, pour ainſi dire, paſſer en revue toutes celles que nous préſente la connoiſſance commune, on voit pourquoi on dit qu'elles demandent d'être *recherchées*, ou qu'il faut *pouſſer ſes recherches plus loin.*

En tout ceci il n'entre encore rien de *ſublime* ni rien de *profond.* La connoiſſance commune eſt conſidérée comme un *champ vaſte & étendu*, & tout ce qui en découle eſt placé d'autant plus loin, qu'il faut un raiſonnement plus long pour y parvenir. Ce n'eſt pas cependant que cette longueur du raiſonnement ſoit toujours la meſure exacte de l'éloignement ou de la diſtance. Il y a dans ce *champ intel-*

lectuel

lectuel des chemins obliques & des détours comme dans les *champs physiques*. On ne parvient souvent d'une proposition à une autre que par une longue suite de termes moïens, quoiqu'on y pût parvenir comme en ligne droite, si on choisissoit les prémisses qui y conduisent directement. On pourra voir là dessus le 5[me] & le 6[me] chapitre de ma *Dianoiologie*, où j'ai fait le dénombrement de ces sortes de routes & de détours. Je me borne ici à remarquer que ce *champ* est considéré comme *une simple surface*. Et c'est aussi pourquoi la connoissance commune, de même que ce qu'on appelle *Littérature*, & *Erudition*, & tout ce qui en découle par une simple combinaison des propositions qu'elle fournit, est regardé comme une connoissance *purement superficielle*, quelque *vaste*, *ample*, *diffuse* etc. qu'elle soit d'ailleurs.

Voïons maintenant ce qui se trouve *au-dessus & au-dessous de cette surface*, je veux dire ce qu'on appelle *sublime* & *profond*. Ici il ne s'agit plus des images des choses, ou des propositions que les sens nous fournissent. Il s'agit des idées plus réelles & plus réfléchies que nous devons nous en former. Et on voit aisément que ce qu'on doit appeller *profond* concerne *l'intérieur des choses ou de leurs idées*, je veux dire, leurs *parties constitutives*, les *ingrédiens* dont elles sont composées & dont les sens ne nous présentent que le mêlange confus. Ainsi ce n'est pas dans les *idées simples* qu'il faut chercher ce qui est *profond*, mais ces idées elles-mêmes peuvent se trouver fort *enfoncées* & fort *cachées* dans d'autres qui en sont *composées*. A' moins qu'on ne soit parvenu à *démêler* toutes les idées simples dont une idée est composée, on ne peut pas dire qu'on les ait absolument *approfondies*. C'est ainsi qu'on n'approfondit pas l'intérieur de la Terre, à moins qu'on ne connoisse ce qui s'y trouve depuis la surface jusqu'à son centre. Aussi, à cet égard, toute idée composée ressemble à la Terre. D'entre les idées simples qui la composent, il s'en trouve toujours une qu'on peut regarder comme le *centre* auquel toutes les autres se rapportent. Pour les approfondir, il ne suffit pas d'en donner une *définition nominale*. Ces sortes de définitions sont encore partie de la *connoissance commune*,

 en ce

en ce qu'elles ne font qu'indiquer une chofe par fon *rapport* à quelque autre qu'on regarde comme plus connue. C'eft peu de chofe que de dire que l'homme eft un animal raifonnable. Pour l'*approfondir*, il s'agit de connoitre tout le mécanifme de fon corps, le mécanifme intellectuel de fon efprit & les abymes de fon cœur. Voilà de quoi *creufer* éternellement.

Mais, pour approfondir une idée, il ne fuffit pas de la réfoudre en fes parties conftitutives, qui font des idées fimples. On voit bien qu'il faut encore découvrir les différens *rapports* qui lient ces idées. De là on tirera des *propofitions*, qui, concernant *l'intérieur* des chofes, font encore nommées *profondes*. Il s'agit de plus de lier ces propofitions en forte qu'elles puiffent former une *théorie complette* de l'objet qu'on veut approfondir, & ce n'eft qu'alors qu'on pourra dire qu'on l'a approfondi en effet. Un homme qui s'eft rendu capable d'approfondir les chofes, du moins celles qui font l'objet de fes recherches, eft appellé *profond*. On voit bien que cela demande une *attention*, une *fagacité* & une *pénétration* plus que médiocres. Il en eft tout autrement de *l'homme fuperficiel*, dont il ne fera pas difficile de tracer l'image que voici. *L'homme fuperficiel* ne connoit que les noms & les attributs fenfibles des chofes, il en ignore les liaifons, il ne pénetre pas à l'effence, il s'attache aux images, il s'en rapporte aux ouï-dire, à l'hiftorique, aux titres. L'attention l'abandonne, & s'il fe donne quelque peine, c'eft pour gagner en furface, & pour s'en remettre à la mémoire. Quand il prétend rapprocher les objets, il néglige les racines, il coupe l'herbe, & elle flétrit & feche. Il évite le détail, & ne parvient gueres aux dernieres applications. Il n'eft ni *commençant*, ni *ignorant*, mais il feroit mieux d'être l'un ou l'autre, afin d'éviter de fe donner les airs de juge compétent & de fervir de rifée à ceux qui approfondiffent mieux les chofes. Il décide indéfiniment, il connoit des rapports fans favoir jufqu'où ils s'étendent. Il applique au tout ce qui ne convient qu'à la partie. Il n'eft pas néceffaire de le pénétrer, il fuffit de l'effleurer. Il échappe quand on prétend

rend l'arrêter; & c'est peine perdue que de lui montrer l'intérieur des choses etc.

Ajoutons que, d'entre plusieurs esprits qui approfondissent un sujet, celui qui est *moins profond* peut savoir que d'autres ont *pénétré plus avant*, mais il ne sait pas de combien; il ignore encore s'ils ne se sont pas *engagés dans quelque spéculation creuse*, qui ne leur offre rien de *solide*. Il n'y a que le plus profond qui puisse donner des mesures pour ceux qui le sont moins. Cette même remarque a lieu à l'égard de ce qui est *éloigné* & *sublime*. Ainsi je ne la répéterai pas particuliérement pour ces deux autres dimensions du monde intellectuel. J'observe seulement qu'il n'y a encore que dans les Mathématiques des mesures bien décidées pour les différens progrès qu'on fait. C'est ainsi que tout le monde sait, qu'en Arithmétique la numeration, l'addition, la soustraction, la multiplication etc. se suivent dans cet ordre, & qu'aussi loin qu'on puisse aller, tous les pas sont comptés, & pour ainsi dire numerotés. Il n'en est pas de même des autres connoissances abstraites, parce que pour bien saisir la force des définitions & des propositions qui s'y trouvent, il faut avoir rencontré dans un grand nombre d'exemples & de phrases particulieres les idées qu'elles renferment. De là vient qu'il faut être Métaphysicien, Moraliste etc. avant que de lire les traités systématiques de ces Sciences, & qu'ensuite on n'y trouve que ce qu'on a sû depuis longtems, & qu'il n'y a tout au plus que les hypotheses qu'on n'a pas sû d'avance. Avec tout cela, un systeme, quoique médiocre, est toujours préférable à cette connoissance confuse à laquelle les personnes non lettrées peuvent parvenir peu à peu & sans dessein prémédité. J'excepterai encore la Logique, qui, surtout dans la théorie du raisonnement, ne le cede en rien à la Géométrie, & où les pas qu'il faut faire sont également comptés.

Passons encore à ce qui se trouve au-dessus du champ de la connoissance commune & superficielle. Ici nous trouverons d'abord des élévations de terrain, des montagnes, je veux dire, des *idées rapprochées*, *entassées*, *accumulées*, non pas pour en faire des

des amas informes, mais pour en former des *classes* & pour réunir toutes celles qui font partie d'un même Système. On voit aisément que je parle de la *dépendance* & de la *subordination* des idées, qui fait qu'on regarde une idée comme d'autant plus *élevée*, qu'elle est plus *générale*. De là les termes de *genre supérieur*, *d'especes inférieures*, *d'idées subalternes* etc. En montant davantage, nous nous trouverons dans les régions aëriennes, car c'est ainsi qu'on pourra nommer les idées qui, pour être *abstraites*, ne paroissent plus avoir de corps. Il ne reste plus qu'à franchir ces régions pour nous trouver dans des contrées dont un poëte dit:

Candidus insueti miratur limen olympi,

je veux dire dans la région des *idées transcendantes*, qu'on a toujours considérées comme ce qu'il y a de plus *sublime* dans les connoissances philosophiques & mathématiques. Il est bien vrai que pour y parvenir on fait souvent un vol d'*Icare* qui se termine par une chûte fatale. Il est bien vrai aussi qu'en fait de Morale & de Politique on se figure quelquefois je ne sai quelles sublimes perfections, qui, pour être au-dessus des forces humaines, n'aboutissent qu'à une spéculation creuse & sans usage pour la pratique. Enfin, il est bien vrai aussi qu'à moins que les idées abstraites & transcendantes ne puissent être ramenées à celles où il faut les appliquer, on perd ce qu'elles peuvent avoir d'utile, & on risque de s'égarer dans ces espaces intermédiaires, qui les séparent des idées plus individuelles. C'est ainsi que la *Cosmologie transcendante*, quelque sublime qu'elle puisse être, paroit encore séparée par un intervalle immense de cette *Cosmologie empirique*, que l'Astronomie & la Physique expérimentale nous font connoitre. Un semblable intervalle se trouve encore entre la *Dynamique transcendante* & celle qui nous est connue par l'expérience. On en trouvera un autre non moins grand entre la *Chymie* & cette *Théorie abstraite des corps*, qui n'est encore que trop briévement exposée dans les traités de Physique générale & dans ceux de Métaphysique.

Tout

Tout ce que je viens de dire ſur ce qui, dans le monde intellectuel, s'appelle *éloigné*, *profond*, *ſublime*, ne regarde encore que les objets de l'entendement proprement tel, ou les connoiſſances ſolides & exactes. Avant que d'en venir à ce qui, dans les Belles-lettres, peut être déſigné par ces termes, il convient de paſſer à la ſeconde partie du monde intellectuel, qui comprend les objets de la volonté. Ces objets ſont le *bien*, & généralement l'*eſtimation*, la *valeur*, le *prix* des choſes, & les *regles*, les *maximes*, les *préceptes* qui s'en déduiſent & qui reglent les *actions* & la *conduite*, ſoit pour le *moral*, ſoit pour la *vie privée*, ſoit enfin pour le rôle d'un *perſonage public*.

Commençons encore ici par ce qui eſt *proche*, puiſque c'eſt de là qu'il faudra partir. Il eſt clair que ce ſont *ces biens communs & généraux, que la Nature a donnés en partage à tous les hommes*, tels que ſont la vie, la ſanté, la ſubſiſtance, la connoiſſance commune, la parenté etc. Et quoique ce qui eſt un bien, doive l'être plutôt dans ſes conſéquences qu'en ſoi-même, néanmoins, en ne conſidérant que ce qui doit être appellé *proche*, il faudra faire abſtraction de ces conſéquences, & ne conſidérer que ce qui en ſoi-même peut être regardé comme un bien, ſans faire attention s'il continue de l'être dans ſes conſéquences, ou s'il l'eſt en comparaiſon d'un autre bien plus grand & plus néceſſaire. Et encore ici il faudra en reſter à la *ſurface* ou à *l'apparence extérieure*. Voilà donc le point fixe dont il faut partir. Voïons comment.

D'abord, il eſt clair que ce qu'on peut appeller *éloigné*, ſe retrouve encore dans les *conſéquences*, ſoit qu'il faille faire une combinaiſon des biens préſens afin de fixer ſon choix par une *ſuite de concluſions*, ou qu'il faille eſtimer ce qui eſt bien par les *effets* qu'il peut produire *ſucceſſivement*.

Il en eſt tout autrement de ce qu'on peut appeller *profond*. Souvent ce qui paroit être très bien & en très bon état, ne l'eſt qu'en ap-

apparence. Il faut voir l'intérieur pour juger si on peut s'y fier. Il en est comme d'une maison blanchie qui paroit pouvoir subsister pendant des siécles, tandis que ses murs pourris en dedans par l'humidité corrosive de l'air menacent ruine; & comme d'un marchand qui craignant de faire banqueroute emploie le reste de sa caisse à faire de grosses dépenses, afin de soutenir, s'il est possible, son crédit chancelant, par l'illusion qu'il fait au public & à ses créanciers.

Enfin, quant au *sublime*, il faudra encore le trouver dans l'*accumulation* & dans la *comparaison* des biens. Il y a long tems qu'on est accoutumé à considérer comme *verticale*, cette échelle qui sert à mesurer le bien. C'est ainsi qu'on dit un *bas prix*, *hausser*, *baisser* la valeur ou le prix d'une chose etc. Observons cependant qu'il y a des choses, dont les prix non seulement sont d'une nature hétérogene, & par là même incommensurable, de sorte que ces choses tout comme leurs prix different en espece; mais que parmi ces especes, il y en a qui sont transcendantes les unes vis à vis des autres. C'est dans ces prix transcendans qu'il faut chercher le sublime. Les prix ou les biens de différente espece ne laissent pas d'être subordonnés les uns aux autres. Ils different en *dimension*. L'un n'aura qu'une dimension linéaire, tandis qu'un autre a une dimension d'un degré supérieur. Donnons-en un exemple, en comparant ensemble l'amour paternel & l'amour de la patrie. On n'a qu'à se souvenir du

Qu'il mourût!

que prononce le vieil *Horace*, pour voir de combien il rangeoit *plus haut* l'amour de la patrie que celui qu'il avoit pour ses trois fils. S'il regarde ses fils comme un bien *terrestre*, il compare sa patrie au *Ciel*; & tout rempli de cette haute idée, il prononce sans balancer, sans songer à comparer ces deux biens. Et c'est là en quoi consiste ce qu'il y a de *sublime* dans ce célebre passage de *Corneille*. *Horace* y paroit comme une de ces ames *élevées*, qui ne s'arrêtent qu'aux *idées* & aux *biens de*

la

la plus haute dimension, & *qui n'ont d'autres maximes que celles qui s'y rapportent.*

Maintenant il ne sera pas difficile de nous tourner du côté des Belles-lettres. D'abord on sait qu'elles s'arrêtent presque entierement à la *surface*. Et encore ce qui chez le philosophe s'y trouve comme *éloigné*, paroitroit chez le poëte comme *trop recherché*. Ce n'est pas à lui à faire des *excursions*, il faut qu'il trouve ses objets *l'un près de l'autre*; & s'il les rapproche, il doit le faire avec art pour éviter l'apparence ou le défaut de tout ce qui seroit recherché, bigarré, guindé, précieux, etc. S'il *pénetre* bien avant dans le cœur de l'homme, ce n'est pas en philosophe qu'il produit ses découvertes, il peint les *effets sensibles* des *ressorts cachés* qu'il a vu jouer. Il donne du corps aux idées abstraites & transcendantes, pour les rapprocher de la surface; & réciproquement il anime les choses destituées de sentimens, toutes les fois que l'exigent les passions qu'il doit exprimer.

Quant à ce qui, dans les objets de la volonté, est plus ou moins *élevé* & *sublime*, le poëte peut y réussir d'autant mieux, que tout ce qui existe & même tout ce qui est possible se trouve déjà réduit en classes à l'égard des différentes valeurs & de leurs dimensions. Il seroit même très possible de donner les échelles pour chaque classe, avec les degrés correspondans de chacune. C'est ainsi p. ex. qu'on connoit les degrés successivement plus élevés où l'on place le berger, le bourgeois, le Héros, les Anges, la Divinité. On sait qu'il y en a de semblables, qui montent de l'agneau au Lion, de l'Hisope au Cedre, de la pierre de taille au diamant, de la cabane couverte de chaume au palais d'un Roi, du colibri à l'aigle, du champ du laboureur à un Empire, etc. Il y a longtems qu'on a donné la regle, que dans un même poëme il ne faut associer des objets de ces différentes classes, qu'entant qu'ils se trouvent rangés à des degrés également élevés, & comme de niveau.

Sibi convenientia finge. etc.

Intererit multum Davusne loquatur an herus? etc.

Descriptas servare vices, operumque colores. etc.

Servetur ad imum

Qualis ab incepto processerit & sibi constet. etc.

Primo ne medium, medio ne discrepet imum.

etc.

Tous ces préceptes d'Horace se rapportent également bien aux *qualités*, aux *quantités*, aux *degrés*, & aux *prix* des choses. Faire de *Junon* une bonne ménagere, qui apprend à ses nymphes à coudre, à filer etc. comme à des filles de province ou à des bourgeoises, c'est là ce que *Scarron* appelle travestir *Virgile*. L'un & l'autre de ces poëtes savoit bien, que dans l'Olympe il étoit question de toute autre chose:

Sunt mihi bis septem præstanti corpore Nymphæ

Quarum quæ forma pulcherrima etc.

Le Sublime regarde toujours la façon de penser & d'agir, & j'ai déja dit qu'il demande des objets de la plus haute dimension. Ces dimensions doivent être la base des maximes, auxquelles la façon sublime de penser & d'agir se conforme de telle sorte, que la pratique de ces maximes paroisse être une habitude naturelle. C'est ainsi p. ex. que, quoique les divinités de l'ancienne Grece & de Rome soient décrites comme aiant des défauts, des foiblesses, des passions humaines, *Horace* ne laisse pas d'exiger à bon droit

Nec Deus intersit, nisi dignus vindice nodus

Inciderit —

Il auroit pu ajouter, que la façon même de résoudre ou de trancher le nœud doit présenter quelque chose de divin. Mais il semble qu'il

ne

ne s'y trouvoit pas assez autorisé par la Mythologie de son tems, qui offroit quantité d'exemples contraires à cette regle.

Longin remarque qu'il en est tout autrement du passage qu'il cite de la *Genese*. Faut-il que le monde soit éclairé? Dieu ne va pas chercher dans le chaos les parcelles éparses de lumiere pour les réunir une à une. *Il dit, que la lumiere se fasse, & elle se fait.* Façon d'agir transcendante au delà de tout ce que nous pouvons nous figurer. Aussi le sublime absolu n'a-t-il lieu qu'à l'égard de la Divinité. Tous les autres objets n'admettent qu'un sublime rélatif, où il n'y entre rien d'infini. Quelque surprenantes que soient les connoissances & les forces des Anges, le poëte se voit obligé de leur donner des bornes, & de ne les présenter que comme limitées. Il est encore plus restreint à l'égard des dimensions du sublime qu'il attribue à ceux qui sont distingués parmi les hommes, & qui se réduisent à un petit nombre de Classes. Ces Classes sont: 1°. le *Sage*, qui se propose, même en son particulier, le souverain bien; 2°. le *Savant*, qui comme *Newton* éclaire le monde par ses sublimes découvertes; 3°. le *Héros*, qui défend la Patrie au prix de son repos & de sa vie; 4°. le *Législateur* qui, placé au timon des affaires, procure le bonheur des peuples. C'est à ces quatre Classes que se borne le sublime qui se rapporte au genre humain. Le *Sage*, qui fait la premiere de ces Classes, est chez le poëte, presque toujours un être idéal & transcendant, proposé comme un modele absolu & achevé; & jusques-là le poëte le charge de tout ce qu'il connoit de plus sublime en fait de sagesse humaine. Et s'il en fait l'application à quelque individu, cet individu doit avoir une connoissance plus que médiocre du souverain bien, & agir par principes. Qu'un berger soit sage tant que l'on voudra, il l'est plutôt par une disposition naturelle & par la simplicité de son genre de vie, que par des méditations sublimes sur le souverain bien, ou parce qu'il trouve de grands obstacles à surmonter.

Quant aux trois autres classes, il arrive également que le poëte fait du *Savant*, du *Héros* & du *Législateur*, un être idéal, orné de tout ce qu'il trouve de plus sublime. J'observe cependant que la plûpart des poëtes s'attachent plus à exalter & à étaler l'idéal du *Sage* que celui du *Savant*, par la même raison pour laquelle ils se tournent plutôt du côté de la Morale que du côté des connoissances en général. Cependant la Morale exige un esprit éclairé; & le bonheur temporel, qu'elle doit avoir également pour but, demande tout ce qui peut rendre la vie moins pénible & plus aisée, & par-là même la découverte de tous les moïens qui y contribuent. Si la Morale veut qu'on ait soin de sa vie & de sa santé, les différentes parties de la Médecine y sont de mise: & *Boerhave* mérite un panégyrique bien sublime. Si la Morale exige qu'on connoisse, qu'on respecte & qu'on adore Dieu, la Physique & l'Astronomie y contribuent efficacement, & les découvertes de *Newton* ne seront point de vaines spéculations. Il est est de même des autres connoissances. Toutes se rapportent à la Morale, tout au moins entant que la vérité s'y rapporte. Si la Caballistique, l'Astrologie judiciaire etc. sont bannies, c'est qu'on les a trouvées frivoles & destituées de fondement. La Morale les auroit exigées, parce qu'il importe de prévoir l'avenir pour s'y conformer avec prudence. N'allons donc point opposer le *vrai* au *bon*, jusqu'à insister sur l'un aux dépens de l'autre. Il n'est gueres de vérités abstraites & générales, que le genre humain puisse ignorer impunément, je veux dire, sans païer son ignorance par quelque perte réelle. Entreprenons donc d'élever l'idéal de l'homme savant & éclairé au niveau de celui du Sage..

Il me semble aussi que les poëtes chantent le *Héros* préférablement au *Législateur*. Il est vrai que les actions du Héros frappent plus les sens, au lieu que celles du Législateur sont plus transcendantes & appartiennent en grande partie au monde intellectuel. C'est ainsi qu'en tems de guerre les gazettes ont le plus de débit. Mais faut-il

mettre

mettre en parallele le poëte & le gazetier; ou le poëte ne doit-il pas avoir assez de feu & assez de ressources dans l'imagination, pour donner du corps aux choses invisibles, qui constituent le Contrat social & ces ressorts cachés, dont l'action fait le bonheur des peuples? Peut-être faut-il pour cela plus de connoissances & des connoissances plus sublimes que les poëtes n'en ont ordinairement. Et à en entendre quelques uns, ils ne hazardent pas de produire l'idéal qu'ils s'en forment, soit par la raison qu'il est trop transcendant pour le monde où nous sommes, ou parce qu'il est trop défectueux & trop révoltant pour ne pas être sacrifié à des flammes accompagnées d'infamie.

J'ai dit que le sublime qui regarde ces quatre classes n'est que rélatif, parce que pour être resserré dans des bornes finies, il n'est pas absolu. Il y en a encore une autre raison. Qu'un poëte décrive la façon de penser ou d'agir d'un Héros avec toute la sublimité convenable, ce Héros, en lisant la description du poëte, non seulement n'y trouvera rien de surprenant, mais comme c'est là sa façon ordinaire & habituelle de penser & d'agir, il est possible qu'il ne s'avise pas même d'y trouver du sublime. Il n'y en trouvera que lorsque le poëte aura décrit un Héros d'un genre supérieur. Réciproquement, il fera peu de cas de la description, dès-qu'elle n'atteint pas à sa façon de penser & d'agir & ne l'épuise pas, quelque sublime que la description puisse paroitre au poëte ou à d'autres personnes d'une dimension inférieure. Ainsi on peut dire que c'est être peu affermi dans l'habitude du sublime que d'en être surpris lorsqu'il se présente. Aussi, si le poëte n'est lui-même d'une ou de plus d'une des quatre classes dont je viens de parler, il ne réussira gueres dans le sublime. S'il le rencontre c'est par hazard, ou par des ouï-dire, ou par une imitation servile.

Enfin le sublime est rélatif à l'égard de toute une nation qui se cultive. Elle admire d'abord ce qui ensuite lui paroit fort médiocre; & à force de rafiner, elle substitue au véritable sublime



MÉMOIRE (*)

SUR

L'HISTORIEN HUNIBALD.

PAR M. DE FRANCHEVILLE.

S'il y eut jamais un Historien décrié, c'est celui dont je me propose de parler dans ce Mémoire, & de rétablir, s'il en est digne, la réputation qu'il a perdue depuis près de 250 ans.

Ceux qui connoissent les Fastes de la Littérature, savent qu'elle a perdu par l'injure des tems une infinité d'Ouvrages en tout genre, & qu'aucun n'en a plus souffert que l'Histoire, parce que ses pertes malheureusement ne sont point de la nature de celles que les progrès de l'esprit humain puissent réparer. Pour un petit nombre d'Historiens qui sont venus jusqu'à nous sains & entiers, combien en est-il dont nous n'avons les écrits que mutilés & avec des lacunes plus ou moins considérables? Combien d'autres dont il n'est resté que quelques legers fragmens sans suite? Et d'autres encore, ou dont il ne s'est

(*) Lû à l'Académie dans les Assemblées ordinaires des 29 Avril & 20 Août 1762.

s'eſt conſervé que les noms, ou dont les noms mêmes nous ſont auſſi inconnus que leurs ouvrages?

Du nombre de ces derniers étoit HUNIBALD, lorſqu'après mille ans de perte, il parut en Allemagne pour la premiere fois au commencement du XVIe Siécle. C'eſt ainſi que Pogge Florentin, un ſiécle auparavant, avoit heureuſement découvert à Conſtance, pendant la tenue du Concile, divers ouvrages juſqu'alors ignorés, comme ceux de Quintilien, d'Aſconius & de Silius Italicus; & en Allemagne les Livres de Cicéron *de Finibus* & *de Legibus*. C'eſt ainſi que François Pithou trouva le premier les Fables de Phédre 80 ans après la découverte d'Hunibald, & que de nos jours, l'an 1724, parurent auſſi pour la premiere fois les trois derniers Livres de l'Hiſtoire Romaine de Dion Caſſius, trouvés par l'Abbé Falconi. Ce que je remarque ici pour faire voir qu'il n'y a pas eu plus de merveille à recouvrer Hunibald que ces autres Auteurs beaucoup plus anciens que lui.

On ne ſait ni où ni par qui il a été découvert. Mais je juge que ce fût dans quelque Bibliotheque d'Allemagne, & par Tritheme lorſqu'il fut devenu Abbé des Bénédictins de St. Jean à Wurtzbourg, après avoir réſigné ſon Abbaye de Spanheim l'an 1506. Car il paroît par une Lettre de Jean Duraclusius ſon diſciple, écrite à Nicolas Hamerius Emelanus le 5 Octobre 1515, que Tritheme jouiſſant dans cette maiſon de toute la tranquillité néceſſaire, travailloit à différens ouvrages, entre leſquels ſe trouvent trois grands volumes tirés d'Hunibald, qui ſont aujourd'hui perdus, & les deux Abrégés qui nous en reſtent, dont le ſecond, que je crois avoir été fait avant le premier, fut achevé en 1514, & l'autre le 20 Novembre de la même année, l'Auteur ayant 52 ans. Il y a apparence que dans ces trois gros volumes il rendoit compte de la découverte qu'il avoit faite d'Hunibald, & que c'eſt par cette raiſon qu'il n'en dit rien dans ſes Abrégés. Peut-être auſſi que ne regardant pas comme une découverte l'uſage qu'il faiſoit d'un Hiſtorien dont les manuſcrits alors pouvoient n'être pas rares, il ne crut point cette circonſtance digne d'être remarquée. Quoiqu'il

en

en soit, cette Histoire a eu le même sort que celles d'Eunapius, de Trogue Pompée, & de toutes les autres dont on a fait des épitomes; elle est perdue pour la seconde fois depuis le tems de Tritheme, ce qui ne seroit qu'un demi-mal, si nous avions conservé du moins les trois gros volumes que cet Ecrivain en avoit tirés en partie.

Tout ce que nous savons donc d'Hunibald, c'est par les deux Abrégés dont j'ai parlé. Quant à sa personne, il paroît qu'il étoit Franc ou François de Nation, qu'il vivoit sous le grand Clovis, & qu'il mourut après lui. A l'égard de son ouvrage, c'étoit l'Histoire ou les Annales des Rois Francs, nommés auparavant Sicambres, depuis la 21 année après leur entrée en Allemagne jusqu'à la mort de Clovis I. ce qui comprend un espace de 927 ans. Histoire unique en son genre, & d'un prix infini s'il est possible d'en établir l'autenticité.

Comme la perte de ce précieux monument, jointe au peu de soin que Tritheme semble avoir pris de nous le conserver, pourroit le faire soupçonner d'imposture, je croi devoir ici rapporter une preuve des moyens qu'il employoit pour se procurer les lumieres propres à perfectionner ses ouvrages historiques. Paul Langius, dans sa Chronique de Zeitz sous l'année 1515, témoigne que l'Abbé Tritheme travaillant alors aux trois volumes de ses Histoires d'Allemagne, l'envoya dans tous les Monasteres, Couvens & Eglises, avec des Lettres adressées aux Abbés, Prevôts, Prieurs & Recteurs, les priant de permettre qu'il puisât dans leurs Archives, „afin, dit-il, que faisant des „extraits de toutes ses découvertes il nous les rapporte pour enrichir „les Annales & Chroniques d'Allemagne ausquelles nous travaillons.“ Ces Lettres sont datées de son Couvent des Bénédictins de Wurtzbourg le 1 d'Avril 1515. Et Paul Langius chargé de ces recherches étoit un Moine & Prêtre du même Ordre, preuve qu'il y avoit dès-lors chez les Bénédictins des hommes dévoués à ce genre d'étude laborieux & solide, qui depuis a été poussé si loin par un grand nombre d'illustres Savans de cet Ordre. Or comme cet exemple fait connoî-

tre que Tritheme n'étoit point un Ecrivain frivole, qu'il cherchoit la vérité & qu'il prenoit la peine de consulter les sources, on peut juger par là que la découverte d'Hunibald a été, sans doute, le fruit d'une de ces recherches.

La même année il fit imprimer à Mayence l'Abrégé qu'il avoit tiré d'Hunibald, sous ce titre: *Joannes Trithemius Abbas Spanheimensis de Origine Francorum: ex sex Libris Wastaldi de introitu Sicambrorum ad partes Rheni in Germaniam, & duodecim ultimis Hunibaldi Libris de Francis Epitome, usque ad Imperium Arnulphi Cæsaris:* in folio, *Moguntiæ*, 1515. C'est ainsi que le P. Jacques le Long de l'Oratoire, au N°. 6448. de sa Bibliotheque des Historiens de France, annonce cette Edition qui ne se trouve point parmi les Livres de la Bibliotheque Royale de Berlin. Mais je suis surpris que dans ce Titre on ne donne point à Tritheme la qualité d'Abbé de St. Jaques de Wurtzbourg qu'il portoit en 1515, & qu'on lui donne celle d'Abbé de Spanheim qu'il avoit quittée depuis 1506. Cela paroît d'autant plus étrange, que cet Epitome n'est autre que l'un des deux Abrégés que Tritheme acheva l'an 1514, comme on le voit par l'Edition que Marquard Freher a donnée de l'un & de l'autre en 1601, au premier Volume des Oeuvres de cet Abbé. En second lieu, il est dit dans ce même Titre que Wasthald avoit fait son Histoire en six Livres & Hunibald sa continuation en plus de douze Livres, c'est à dire en dixhuit Livres, comme dit Tritheme à la page 42 de l'Edition de Freher: *Hunibaldus quoque suam de origine Francorum in decem & octo libris distinctorum finivit historiam.* Et c'est précisément le contraire de ce que dit le même Tritheme à la page 64 de la même Edition: *Wasthaldus duodecim Libros suos de origine Francorum ... complevit ... Hunibald in sex libros historiam continuat.* En troisiéme lieu, le P. le Long ajoute au même Numéro, qu'Hunibald a été suivi par Nicole Gilles dans ses Annales de France. Mais si, comme il le dit ensuite au Numéro 7433, ces Annales de Gilles furent imprimées à Paris en 1498, & même dès l'an 1492, il est impossible que cet Auteur ait suivi Hunibald, dont Tritheme ne

fit

fit paroître l'abrégé qu'en 1515, à moins qu'on ne suppose qu'avant cet Abrégé composé seulement en 1514, l'Histoire d'Hunibald étoit déja publique, aussi bien en France qu'en Allemagne: auquel cas il est encore plus étonnant qu'elle se soit perdue.

L'Abbé Tritheme mourut l'an 1519, & jusqu'alors la Critique n'avoit osé attaquer Hunibald, dont il auroit été plus en état que personne de prendre la défense. Mais deux ans après sa mort, l'Historien ayant perdu son protecteur, le Comte Hermann de Nuenar, Prevôt du Chapitre de Cologne, entreprit de le diffamer par une Piece qu'il fit imprimer dans cette ville sous ce titre: *Hermanni Comitis Nuenarii brevis Narratio de origine & sedibus priscorum Francorum*, in 4to, *Colonia*, *Soter*, 1521. Piece plus considérable par le nom de l'Auteur que par la solidité de ses raisons, mais qui ayant entraîné les suffrages d'Adrien de Jonghe, de Douza, de Scaliger, de Cluvier, de Pontanus, de Dillenus & autres Savans de profession, gens aussi sujets aux préjugés que d'autres, n'a pas laissé de porter un si rude coup à la réputation d'Hunibald, qu'il n'a pu s'en relever jusqu'à présent. Il est bon de voir si c'est avec justice, parce qu'un ancien Historien de plus ou de moins, & surtout un Historien unique comme celui-ci, n'est pas un Auteur sans conséquence. Ayant lû avec attention le Mémoire du Comte de Nuenar, je trouve qu'il se réduit, par rapport à Hunibald, à XVI Propositions, que j'examinerai l'une après l'autre; & j'ose espérer, en y répondant, d'amener à mon sentiment tout esprit judicieux & impartial. Mais, pour ne rien laisser à desirer au lecteur qui en voudra juger, je commencerai par rapporter ici le Mémoire du Comte en entier, tel qu'il se trouve non seulement dans l'édition de 1521, mais aussi dans le Recueil des Historiens de France d'André du Chesne, & à la tête d'un ouvrage que ce Comte dédia à l'Empereur Charles-Quint, sous le titre *de Vita & gestis Karoli Magni, &c.* réimprimé à Francfort sur le Mœin, chez Chrétien Gensch (1707) in *folio*.

HERMANNI COMITIS NUENARII BREVIS NARRATIO

de origine & sedibus priscorum Francorum.

De origine & sedibus Francorum priusquam in Gallias eruperiit *, *eorum qui hactenus ejus gentis historiam scripserunt nemo satis fideliter accuratèque tractasse mihi videtur. Quidam enim antiquiores, quod seculum illud infelicissimum esset, ad fabulas plerumque prolapsi sunt, quoniam delectum non habebant, nec sine bonarum literarum cognitione de rebus historiæ exactum poterant proferre judicium.* I. Proposition. *Fuerunt enim inter eos qui à Trojano excidio Francorum deducerent gentem, idque tàm apertè astruentes, ut etiam regum nomina ascriberent; nescio quid Græcanicæ proprietatis subolentia. Hii omnibus prior ansam dedit Hunibaldus, quem vixisse putant non multo post Theodosii imperatoris tempora,* II. Prop. *licet mihi non multum fidei faciat author tàm fabulosus & barbarus, quem cùm multis ex causis tùm vel maxime ob id suppositium putaverim, quòd Theodosii vel Gratiani temporibus nondum adeò degeneraverat in extremam barbariem Latinus sermo, ut tàm abjecto stylo scribere potuisset.* III. Prop. *Præterea cùm (sicut ipse testatur) tàm vehemens*

* eruperint

MÉMOIRE ABRÉGÉ DU COMTE HERMANN DE NUENAR,

sur l'origine & les demeures des anciens Francs.

De tous ceux qui ont écrit jusqu'à présent l'histoire des Francs, je n'en connois aucun qui ait traité avec assez de fidélité & d'exactitude, de l'origine & des demeures de ces peuples avant leur entrée dans les Gaules. Quelques-uns des plus anciens ont donné dans des fables par le malheur de leur siécle, ne pouvant distinguer le vrai du faux ni porter un jugement éclairé sur des faits historiques, faute de connoissance des belles-lettres. Car il y en a eu parmi eux qui ont fait venir des ruines de Troye la nation des Francs; & avec tant d'assurance, qu'ils ont même marqué les noms des Rois, qui se sentent un peu de la propriété Grecque. Celui qui le premier leur en a donné l'occasion à tous, est Hunibald, qu'on croit avoir vêcu peu après le tems de l'Empereur Théodose, quoique je n'aye pas beaucoup de foi pour un auteur si fabuleux & barbare, que je croirois supposé par bien des raisons, surtout parce que du tems de Théodose & de Gratien la langue Latine n'étoit pas assez corrompue pour qu'il pût écrire d'un style si abject. D'ailleurs, comme (suivant son propre témoignage) la haine des Francs contre les Romains étoit alors si animée,

mens tunc Francorum in Romanos odium vigeret, ut multis in locis ne vestigia quidem Romana relinquenda putaverint, quo illorum memoriam extirpare è Germania atque Gallia possent, mihi verisimile non videtur, Hunibaldum ea ipsa lingua gentis suæ historiam tradere voluisse, quam tàm acriter insectabantur omnes. Sed opinor studiosum aliquem nonnulla ex Hunibaldo collegisse, eaque suo more, sine ordine, sine judicio, sic in volumen redegisse, quemadmodum nunc apud quosdam habentur. Quod si quis omninò contendat, hunc ipsum esse Hunibaldum non fictitium sed verum, huic libens concedam, modò ne me cogat illi fidem facere in iis rebus, quæ solent spectatæ eruditionis & doctrinæ virum expostulare. Non magnopere enim me illi opponerem, nisi Trojanos meliores putasset Germanis, & quos Corn. Tacitus atque Strabo, homines Romani, indigenas semper fuisse pronuntiant, eos ipse Asiaticos origine faceret; sed quàm hoc sine omni judicio facere aggressus sit, alii mecum judicent. Nam si Trojanum bellum fuisse aliquando (quod pulcherrimis rationibus negat Dion Prusensis, sacra Aegyptiorum fultus historia) putandum est, certè non facile persuadebit mihi Hunibaldus, tantum hominum nume-

me, qu'en plusieurs endroits ils n'avoient pas cru devoir laisser subsister les moindres vestiges des Romains, pour pouvoir extirper leur mémoire de la Germanie & de la Gaule, il ne me paroît pas vraisemblable qu'Hunibald ait voulu écrire l'histoire de sa nation dans cette même langue contre laquelle ils étoient tous déchaînés avec tant d'aigreur. Mais je croi que quelqu'homme d'étude a fait divers extraits d'Hunibald, & que les ayant ensuite arrangés à sa fantaisie, sans ordre & sans jugement, il en a formé un volume tel qu'il est actuellement dans les mains de quelques personnes. Que si l'on veut absolument que ce soit le même Hunibald non supposé mais véritable, j'y souscrirai volontiers, pourvû qu'on ne m'oblige pas à l'en croire dans les choses qui demandent de la part d'un auteur beaucoup de doctrine & d'érudition. En effet, je ne lui serois pas fort contraire, s'il n'avoit eu meilleure opinion des Troyens que des Germains, & tiré de l'Asie l'origine de ces peuples, que Tacite & Strabon, auteurs Romains, décident avoir été de tout tems indigenes ou naturels de leur pays: mais qu'en cela il ait manqué de jugement, c'est de quoi personne ne disconviendra avec moi. Car s'il est à croire qu'il y ait eu jadis une guerre de Troye (ce que pourtant Dion de Pruse nie par de très-belles raisons, se fondant sur l'histoire sacrée des Egyptiens) certainement Hunibald ne me persuadera point

IV. Prop.
V. Prop.
VI. Prop.
VII. Prop.

merum sub tàm famoso duce furtim abscedere potuisse, cujus rei nullus Græcorum scriptor mentionem faciendam censuisset. Neque enim tanto hominum numero in Italiam Æneas & Antenor profugisse leguntur, quanto Priamum juniorem Hunibaldus ad Scythiam venisse contendit: Tamen horum fugam Dares non tacuit, quem nonnulli militasse eo bello putant, & omnes Græcorum historiæ testantur hos solos expugnatæ urbis reliquias fuisse, qui in ipso Græcorum insultu fuga salutem quæsiverint, postmodumque alter Venetiam, alter Latium invaserint. At Priami illius junioris nullus unquam veterum meminit.

VIII. Prop. Eoque magis admirari cogor eos quibus pro miraculo est Hunibaldus iste, quasi confingere regum nomina opus sit laboriosum, præsertim ubi earum rerum quas scribit præter ipsum nemo meminerit historicus.

IX. Prop. Jam vide quam fidem mereatur, quod ait Francorum populum profugum venisse ad Scythiam, ibique civitatem construxisse nomine Sicambriam. Quis hujus unquam civitatis author meminit? An non tàm facile novam urbem confingere sola sua authoritate potuit, quàm ridicule novam gentem à Trojano deduxit excidio?

X. Prop. Nam eos parum admodum curo qui ipsum secuti sunt, nempe Gregorium Turonensem episcopum, & Rheginonem atque

point, qu'une telle multitude de gens, sous un chef si fameux, ait pu se retirer furtivement, sans qu'aucun Ecrivain Grec ait daigné en faire la moindre mention: vu que le nombre de ceux qui suivirent en Italie Enée & Anténor n'approche point de cette multitude qu'Hunibald prétend être venue dans la Scythie avec Priam le jeune. Cependant Darès, qu'on croit avoir servi dans cette guerre, a parlé de la retraite de ceux-là, & toutes les histoires des Grecs témoignent qu'eux seuls ont été les restes de leur ville, qui dans le tems que les Grecs la saccageoient ont cherché leur salut dans la fuite, & sont venus s'emparer ensuite l'un de la Vénétie, & l'autre du Latium. Mais nul des Anciens n'a parlé de ce Priam le jeune. Et je ne puis qu'être très-étonné en voyant faire un si grand cas de cet Hunibald, comme s'il étoit difficile d'inventer des noms de Rois, surtout lorsqu'aucun autre historien que lui n'a fait mention des choses qu'il écrit. Voyez, par exemple, quelle foi mérite ce qu'il dit, que le peuple fugitif des Francs est venu dans la Scythie, & qu'il y a bâti une Ville appellée Sicambrie. Quel auteur a jamais parlé de cette ville? N'a-t-il pas pu de son chef imaginer une ville nouvelle avec la même facilité qu'il a fait venir ridiculement une nouvelle nation des ruines de Troye? Dans le fond, je ne tiens pas grand compte de ceux qui l'ont suivi, tels que Grégoire de Tours, Réginon & Sige-

atque Sigibertum Gallum. Mihi non probatur aliam esse Sicambriam quàm illam celebrem Germaniæ provinciam inter Busacteros parvos & Bructeros Longobardosque, authoribus Ptolomæo Cornelioque Tacito constitutam, ubi etiam abbas Spanheimensis putat habitasse Francos, & id ipsum mihi à ratione non videtur alienum, primò quod vicini fuerint Gallis: cum illis enim perpetuò bella gessisse traduntur, quemadmodum & ipsorum testantur annales: At qui poterant semper bella gerere nisi cum vicinis, utpote quos tantum Rhenus fluvius separaret? ab altera enim parte vel Batavi, vel Eburones, vel Menapii, vel Ubii erant, quos omnes vicisse Francos constat prius quàm in Celticam & Lugdunensem moverent. Jam de Sicambris constat, quanto in Gallos odio flagraverit semper ea gens, adeò ut Octavianus claudere Jani portas non posset, nisi prius traductis in citeriorem Rheni ripam aliquot Sicambrorum millibus, author est Sueton. Tranquillus. Taceo nunc quod de Francis Hunibaldus scripsit, comâ usos, capillitiique magnam habuisse curam, ideoque devictis Gallis in signum servitutis comam totondisse, ut victores à victis eo facilius dignoscerentur. Hæc etiam

Sigebert le Gaulois. Je n'ai point de preuves qu'il y ait eu d'autre Sicambrie que cette célebre province de la Germanie située, suivant Ptolémée & Tacite, entre les petits Busacteres, les Bructeres & les Longobards ou Lombards; lieu que l'Abbé de Spanheim donne aussi pour demeure aux Francs, & cela me paroît conforme à la raison, premiérement parce qu'ils étoient voisins des Gaulois; car on dit qu'ils avoient perpétuellement la guerre avec eux, & c'est ce qu'attestent même leurs annales: or pouvoient-ils avoir toujours la guerre avec d'autres qu'avec des voisins, puisqu'en effet ils n'en étoient séparés que par le Rhin? car d'un autre côté étoient ou les Bataves, ou les Eburons, ou les Ménapiens, ou les Ubiens; & il est certain que les Francs vainquirent ces quatre peuples avant que de s'emparer de la Gaule Celtique & de la Lyonnoise. XI. Prop.

Pour ce qui est des Sicambres, leur haine contre les Gaulois étoit si grande & si constante, qu'Octavien ne put fermer le Temple de Janus, qu'après avoir transféré quelques mille des premiers sur la rive citérieure du Rhin, comme le marque Suétone. XII. Prop.

Je ne releve point ce qu'Hunibald a écrit des Francs, savoir, qu'ils portoient leurs cheveux, qu'ils en avoient grand soin, & qu'ayant subjugué les Gaulois ils les obligerent à mettre bas leur chevelure en signe de servitude, afin qu'on eût d'autant plus de facilité à distinguer les vainqueurs des vaincus. Cela con- XIII. Prop.

etiam Sicambris optimè quadrant, de quibus initio Epigrammatum Martialis: Crinibus in nodum tortis venere Sicambri. *Et calamistro ad ornandam comam usos nonnulli Romani scriptores tradiderunt: nullæ enim aliæ Germaniæ gentes sic à coma prædicantur ut* XIV. Prop. *Suevi & Sicambri. Porrò quòd postea nomen mutaverint, id aliquo eventu factum esse potest, ut quotidie fieri videmus. Qui enim nunc Leodienses, olim Eburones fuerunt, Colonienses Ubii. Sic Austria nunc appellatur, quæ olim Pannoniæ pars erat. Sic Alsatia dicitur, quæ olim Alemannia. Sic occidentale vulgò Lothariique regnum dicitur nobilis illa Belgicæ pars ab Argentorata usque ad Treviros protensa, idque tantummodò ob partitum Francorum in tres partes regnum, quarum postrema atque minor Lothario Cæsari obvenerat. Westfalia nunc dicitur quæ Saxonia olim fuit. Quæ breviter in medium attulisse sufficiat, ut nulli mirum videatur, si mutato nomine qui ante Sicambri dicebantur, postea Franci appellari potuerint. Sive enim Franci à rege eorum Francone (ut author est Hunibaldus) sive*

convient encore très-bien aux Sicambres, de qui Martial a dit au commencement de ses Epigrammes: *Les Sicambres vinrent ayant leurs cheveux tressés.* A quoi plusieurs auteurs Romains ajoutent qu'ils se frisoient au fer: car dans toute la Germanie il n'y avoit qu'eux & les Sueves qui se fissent ainsi distinguer par leur chevelure. Et quant au changement qu'ils firent ensuite de leur nom, cela peut avoir été fait par quelque événement, comme nous le voyons arriver tous les jours. En effet les Liégeois d'aujourd'hui s'appelloient autrefois Eburons; ceux de Cologne, Ubiens. Ainsi ce qu'on appelle aujourd'hui l'Autriche étoit autrefois une partie de la Pannonie. Ainsi l'on a donné le nom d'Alsace à ce qu'on appelloit auparavant Alemagne. Ainsi cette belle partie de la Belgique, qui s'étend depuis Strasbourg jusqu'à Treves, est nommée vulgairement le Royaume Occidental ou de Lothaire, à cause que le Royaume des Francs fut divisé en trois parties, dont la derniere & la moindre étoit échue à l'Empereur Lothaire. La Saxe d'autrefois porte aujourd'hui le nom de Westfalie. Ce qui vient d'être dit en peu de mots doit suffire pour montrer qu'il n'y a pas lieu d'être surpris si ceux qu'on appelloit auparavant Sicambres, ayant changé de nom prirent ensuite celui de Francs: & peu nous importe que les Francs ayent tiré ce nom de leur Roi Francon suivant Hunibald, ou de leur

fior à libertate, *quod Gregorius Turonensis & Sigibertus putant*, *non multum ad rem nostram facit. Ex historiis hoc nomen sub Antonini & Probi Impp. tempora agnitum reperio. Trebellius Pollio in vita Probi Cæsaris*: Testes, *inquit*, sunt Franci in inviis siti paludibus: *& sæpe cum Germanorum enumerat gentes*, *interserit & Francos. Paludes autem esse nemini ambiguum est ea in parte Germaniæ quam nos Sicambriam olim dictam credimus*, *videlicet ubi nunc Zutphania urbs sita est*, *& non longè ab Asciburgo*, *quam Embricam quidam vocari putant*, *ingens & famosa palus versus Westfalos protenditur. Præterea ubi Frisii occidentales*, *hodie Monasterienses & Trajectenses*, *Gelrensibus & Hollandiis contermini sunt*, *solum ipsum natura paludosum cernitur. Sic etiam intelligi poterit quod de Francorum sedibus primo libro Gothicorum bellorum Procopius scribit*, *cujus verba quia planè in Germania Francos ponunt eo libentius subscribam*, *quod sciam quosdam hoc pessimè habituram*, *qui nostræ gloriæ semper inviderunt. Describens enimvero situm locorum ubi Rhenus in Oceanum Germanicum præcipitatur*: Hisce, *inquit*, locis paludes sunt non modicæ, ubi primitus Germani habitabant,

leur liberté comme le pensent Grégoire de Tours & Sigebert. Je trouve par l'histoire qu'il a été connu vers le tems des Empereurs Antonin & Probe. Trebellius Pollion dit dans la vie de ce dernier: *J'en prends pour témoins les Francs situés dans des marais inaccessibles*; & souvent, dans l'énumération qu'il fait des peuples Germains, il nomme aussi les Francs. Or personne ne doute qu'il n'y ait des marais dans cette partie de la Germanie que nous croyons avoir eu autrefois le nom de Sicambrie, c'est à dire la contrée où est aujourd'hui la ville de Zutphen; & pas loin d'Ascibourg que quelques-uns prennent pour la ville d'Emmerich, un grand & fameux marais s'étend du côté de la Westfalie. D'ailleurs à l'endroit où les Frisiens occidentaux, aujourd'hui les peuples des évêchez de Munster & d'Utrecht, sont voisins de la Gueldres & de la Hollande, on voit que la terre est naturellement marécageuse. Ainsi on pourra de même entendre ce que Procope, au premier livre des guerres des Goths, écrit touchant les demeures des Francs; comme il les place entiérement dans la Germanie, j'y souscrirai d'autant plus volontiers, que je sai qu'il y a des gens toujours envieux de notre gloire, qui le trouveront mauvais. Cet historien décrivant donc la situation des lieux où le Rhin se précipite dans l'Océan Germanique, dit: *Dans ces lieux sont aussi de grands marais*, *dont les premiers habitans furent*

tabant, gens barbara, nec magni tunc momenti viri qui nunc appellantur Franci, iis finitimi Aborichi erant. *Hæc Procopius. Sed quantum ad loci descriptionem, quæ* χωρογραφία *dicitur, attinet, condonandum aliquid est illis qui de rebus incognitis atque remotissimis scripserunt: Fuit enim Procopius vir equestris ordinis, qui apud Justinianum Cæsarem in Græcia militabat. Verissimum est illud Plinii secundo Naturalis historiæ libro dictum, locorum situs diligentissimè explanari ab iis qui indè prodiissent. Porrò non multum distant Sicambri ab ostiis Rheni, ut homo Græcus facile hallucinari potuerit: vel certè præter Sicambriam Bataviam* (*) *atque Hollandiam quoque inhabitaverunt. De Arborichis autem quid sibi velit non satis intelligo, nisi quod insulæ Arborichæ adjacere dicuntur illi provinciæ quæ nunc Hollandia vocatur. Idem author libro tertio scribit Germanos Galliam debellasse, permissuque Justiniani Cæsaris possidendam accepisse*, unde, *inquit*, & Arelatæ nunc habitant. *Sed de alia Germanorum gente credi hoc non potest*, cùm

des Germains, peuple barbare, qui pour lors n'étoit pas fort considérable, & qui porte aujourd'hui le nom de Francs: les Aboriches étoient leurs voisins. C'est ce qu'en dit Procope. Mais pour ce qui regarde la description du pays qu'on appelle *Chorographie*, il faut pardonner quelque chose à ceux qui ont écrit sur des sujets inconnus & si éloignés d'eux: car Procope étoit un Chevalier qui servoit en Grece dans les troupes de l'Empereur Justinien. Pline a bien raison de dire au second livre de son histoire Naturelle, que les situations des lieux ne peuvent être bien décrites que par ceux qui en sont venus. Au reste les Sicambres sont assez proche des embouchûres du Rhin, pour qu'un auteur ait pu facilement s'y tromper; ou bien ils ont aussi demeuré assurément au-delà de la Sicambrie dans la Batavie (†) & la Hollande. A l'égard des Arboriches, je n'entends pas bien ce qu'il veut dire, à moins que les Isles de ce nom ne soient la province qu'on appelle aujourd'hui la Hollande. Le même auteur, au livre III, écrit que les Germains ont soumis la Gaule & en ont reçu la possession (††) avec le consentement de l'Empereur Justinien, *d'où vient*, dit-il, *qu'ils sont maintenant établis à Arles* (†††). Mais cela ne peut être croyable d'un autre peuple Germain, vû que les François en

(*) fortè *Betaviam*

(†) *peut-être* le Betau.

(††) des Goths, *dit Procope.*

(†††) Ils président maintenant aux jeux de l'Amphithéatre d'Arles, *dit Procope.*

cùm Francos eo tempore totâ Galliâ potitos constet. Primus enim Clodoveus universam Galliam ejectis Romanis obtinuisse traditur. Is verò Martiani imperatoris temporibus regnavit, post quem Justinianus imperavit C. amplius annorum intervallo, & à Clodoveo usque ad Kar. M. res Francorum incrementa semper accepit, donec totius ferè Europæ tenerent imperium. Hos igitur inclytos Germanos Procopius notavit, à quibus etiam hoc tempore Imperator Arelatensis regni titulum retinet. Quos in Sicambria olim sedes habuisse, & vera origine Germanos fuisse indigenas, non Trojanos (ut fabulantur quidam) mea fert opinio, quàm non parum promovet quod abbas Spanheimensis ait haberi apud Remos insculpta hæc verba, quibus beatus Remigius Clodoveum baptisandum allocutus fuerit: Mitis depone colla Sicamber. *Neque Hunibaldus inficiatur hanc Francos inhabitasse provinciam, postquam è Scythia digressi sunt, annis ante Christum natum non minus CCCC. Quare miror magis eorum regum nomina quæ recenset, post adventum eorum in Germaniam non reperiri apud Romanos*

en ce tems-là étoient certainement en possession de toute la Gaule. En effet on dit que ce fut Clovis I. qui la posséda toute entiere après en avoir chassé les Romains. Or ce Prince régna du tems de l'Empereur Marcien (*), après lequel Justinien régna dans un intervalle de plus de cent ans; & depuis Clovis jusqu'à Charlemagne les affaires des Francs ont toujours pris de l'accroissement jusqu'à ce qu'ils se sont vus maîtres de presque toute l'Europe. Procope a donc parlé de ces illustres Germains de la succession desquels l'Empereur d'aujourd'hui retient le titre du Royaume d'Arles. Mon sentiment est qu'ils ont eu autrefois leurs demeures dans la Sicambrie, & qu'ils sont vraiment, non Troyens d'origine, comme quelques auteurs fabuleux le disent, mais Germains indigenes, ce que l'Abbé de Spanheim donne lui-même à entendre, en disant qu'on a gravé à Reims ces paroles que St. Remi adressa à Clovis avant de le batiser: *Doux Sicambre, soumets-toi.* Et Hunibald ne nie pas non plus que les Francs n'ayent habité cette province après être sortis de la Scythie non moins de 400 ans avant la Naissance de Jesus-Christ. C'est pourquoi je suis très-surpris que les noms de leurs Rois, dont il fait le dénombrement depuis leur arrivée en Germanie, ne se trouvent

XV. Prop.

XVI. Prop.

(*) Marcien régna depuis 450 jusqu'en 457.
Clovis I, depuis 481 jusqu'en 511.
Et Justinien I, depuis 527 jusqu'en 565.

nos scriptores, inter quos Strabo Augusti tempore tres nominat Sicambrorum reges, quorum nullus est in catalogo Hunibaldi. Si quis aliter sentiat, illi non obnitar, liberum cuique suum esto judicium. Hoc tamen pro mea interim sententia adducam, gloriæ cupiditate multos olim fuisse inductos, ut antiquissimam originem suam facere conarentur. Qui enim aliis meliores videri volunt, hoc potissimum student, ut cum aliis nihil habeant commune. Hinc etiam Saxones, qui semper inter Germanos præcipuum locum habuerunt, origine se Macedonas gloriabantur, hac in re non minus ridiculi quàm Franci: Eamque ob causam res strenuè gestas nequaquam communi vocabulo Germaniæ tribuebant, sic suam gloriam vilescere rati: Hoc enim & Gothi & Wandali factitarunt, undè paulatim à vulgo creditum est eos extra Germaniam fuisse. Sed hæc breviter attigisse sufficiat.

vent point dans les auteurs Romains, parmi lesquels Strabon du tems d'Auguste nomme trois Rois des Sicambres dont aucun n'est dans le catalogue d'Hunibald. Si quelqu'un est d'un autre sentiment, je ne m'y opposerai point, chacun doit être libre de juger à sa maniere. Cependant je ne laisserai pas de dire selon ma pensée, que le desir de la gloire a engagé autrefois plusieurs peuples à s'efforcer de donner à leur origine la plus haute antiquité. Car ceux qui veulent paroître meilleurs que les autres ont surtout la passion de n'avoir rien de commun avec eux. Delà vient que les Saxons qui ont toujours tenu le premier rang entre les Germains, se glorifioient d'être Macédoniens d'origine, n'étant pas en cela moins ridicules que les Francs; & par cette raison ils ne faisoient point honneur à la Germanie de leurs exploits, croyant que leur gloire en seroit avilie. Et c'est ce qu'ont fait aussi les Goths & les Wandales, d'où le vulgaire s'est accoutumé peu à peu à croire qu'ils étoient hors de la Germanie. Mais c'est assez d'avoir traité succinctement ce sujet.

EXA-

EXAMEN
DES
XVI. PROPOSITIONS DU COMTE DE NUENAR,
NOTÉES CI-DESSUS.

I. PROPOSITION.

Inter eos qui à Trojano excidio Francorum deducerent gentem . . . his omnibus prior ansam dedit Hunibaldus, quem vixisse putant non multò post Theodosii Imperatoris tempora.

Il dit „qu'Hunibald qui passe pour avoir vécu peu après l'Empereur Théodose, est le premier qui ait tiré des Troyens l'origine „des Francs.

Cette premiere proposition contient deux erreurs de fait.

1°. Le Comte de Nuenar fait vivre Hunibald peu après le tems de l'Empereur Théodose. Il y a eu deux Empereurs de ce nom, & comme il ne distingue point en cet endroit celui dont il veut parler, on croiroit peut-être qu'il s'agit de Théodose le Jeune ou le second du nom, qui mourut l'an de l'Ere Chrétienne 450. Mais non, il est question de Théodose le Grand premier du nom, comme il le fait voir deux lignes ensuite, parlant en même tems de Gratien, son collegue, & d'Hunibald comme de leur contemporain: *Hunibaldus, quem vixisse putant non multò post Theodosii Imperatoris tempora, licet mihi non multum fidei faciat auctor tàm fabulosus & barbarus, quem cùm multis ex causis, tùm vel maximè ob id suppostititium putaverim, quòd Theodosii vel Gratiani temporibus nondùm adeò degeneraverat in extremam barbariem Latinus sermo, ut &c.* Or le mécompte du Critique est énorme; car Théodose I. mourut en 395 le 17 Janvier, & Gratien le 25 Août 383: tandis qu'Hunibald n'a fleuri que l'an 500 sous le régne de Clovis I, à qui même il a survécu, ayant poussé son Histoire

toire jusqu'à la mort de ce Roi. Tritheme s'exprime là-dessus fort clairement. Je suis l'Edition de ses Oeuvres par Marquard Freher. Au Tome I. page 2. parlant d'Hunibald qu'il avoit nommé dans la ligne précédente, il ajoute: „Car ce solide Historiographe des Francs „fleurit l'an de la Nativité du Seigneur 500, au tems du Roi Clovis que „le Prélat Romain St. Remi baptisa: *Is etenim solidus Francorum Historiographus claruit in humanis Clodovei Regis, quem Sanctus Remigius præsul Romanorum baptisavit, temporibus anni Dominicæ nativitatis quingentesimo.* Joignez à cela ce qu'il dit au bas de la page 4: „Hunibald François a, sur les vers & les écrits des Prêtres, continué l'His„toire de la Nation des Francs jusqu'à la derniere année du Roi Clovis: *Hunibald Francus ex carminibus & scriptis Flaminum gentis Francorum continuavit historiam usque ad ultimum regis Clodovei annum.* Et ce qu'il ajoute encore au milieu de la page 42: „Le Roi Clovis étant „mort, Hunibald a aussi mis fin à son Histoire de l'Origine des Francs „distribuée en XVIII Livres: *Mortuo Rege Clodoveo Hunibaldus quoque suam de origine Francorum in decem & octo libris distinctam finivit historiam.* Les mêmes Passages sont répétés en mots équivalens dans le second Abrégé intitulé *de Origine Francorum*, au même Volume pages 64 & 87. Telle est la premiere erreur du Comte de Nuenar, qui a fait Hunibald de 100 ans & au delà plus ancien qu'il n'est.

2°. Il dit que cet Auteur est le premier qui ait tiré des Troyens l'Origine des François, & il se trompe encore. Tritheme assûre qu'Hunibald n'a fait que continuer l'Histoire des Francs commencée par Wasthald. Celle-ci comprenoit, en rectifiant la supputation de Tritheme, un espace d'environ 768 ans & la continuation 927; de maniere que cette derniere finissant à l'an 511 de l'Ere Chrétienne, avoit commencé à l'an 416 avant J. C. & la premiere à l'année 1184, 25 ans après la prise de Troye. Or il s'ensuit de là que ce n'est point Hunibald mais Wasthald qui a le premier puisé chez les Troyens l'Origine des François. Voici la preuve de ce que je viens de dire, tirée du même Volume de Tritheme page 2, parlant d'Hunibald: „Il a écrit „après

„après Dorac le Philosophe, Wasthald l'Historien, & plusieurs au„tres très-anciens écrivains: *Scripsit post Doracum philosophum, Wasthaldum historicum & alios plures rerum gestarum antiquissimos scriptores.* Page 4. parlant de la mort du Roi Marcomir I. „Wasthald, dit„il, Scythe ou Sicambre, a conduit jusqu'à cette année l'Ouvrage des „Histoires de sa Nation dans la langue du pays . . . commençant de„puis la ruine de Troye . . . Après lui Hunibald l'a continué: *Usque in hunc annum Wasthald Scytha vel Sicamber patrio sermone, historiarum opus gentis suæ deduxit, ab excidio incipiens Trojano . . . Post quem Hunibald . . . gentis Francorum continuavit historiam &c.* C'est ce qui revient encore à la page 64: *Ad hunc annum Wasthaldus duodecim libros suos de origine Sicambrorum ab excidio Trojano perduxit atque complevit per annos continuando 768. Abhinc Hunibald in sex libris historiam, de regibus & gestis Sicambrorum continuat &c.* Ainsi n'étant point vrai qu'Hunibald ait été l'auteur de l'Origine Troyenne des François, ni qu'il ait vêcu au tems supposé par le Comte de Nuenar, j'en conclus que sa premiere Proposition est entiérement nulle & sans effet à l'égard de cet Historien.

II. PROPOSITION.

Licet mihi non multum fidei faciat auctor tàm fabulosus & barbarus, quem cùm multis ex causis tùm vel maximè ob id suppositium putaverim, quòd Theodosii vel Gratiani temporibus nondum adeò degeneraverat in extremam barbariem Latinus sermo, ut tam abjecto stylo scribere potuisset.

Il dit, parlant d'Hunibald: „Qu'un Auteur aussi fabuleux & bar„bare ne mérite pas beaucoup de créance, étant à penser qu'il a été „supposé, par la raison surtout qu'au tems de Théodose & de Gratien „la Langue Latine n'étoit point encore devenue assez barbare pour lui „donner lieu d'écrire d'un style si abject.“

Pour répondre à cette proposition je la diviserai en deux parties,

1°. Quant aux fables, s'agit-il de l'Origine des Francs tirée de Troye, de leur transmigration en Scythie, & de tout ce qu'ils y ont fait dans le cours de plus de 750 ans? Ce n'est point ici le lieu d'examiner, en prouvant la prise de Troye par la Chronique des Marbres de Paros, l'an 1209 avant l'Ere Chrétienne, s'il seroit contre la vraisemblance que les habitans d'une grande ville détruite, dans laquelle consistoit presque tout le Royaume de Priam, se fussent retirés dans des lieux déserts qui n'en étoient pas infiniment éloignés; & s'il y auroit de l'absurdité à prétendre que dans un espace de 772 ans, la postérité de ces Réfugiés se fût accrue au point de former un Peuple de 489360 personnes des deux sexes, qui est le nombre, sans les domestiques ou esclaves, auquel on les fait monter lorsqu'ils sortirent de la Scythie pour passer en Allemagne. Mais supposant à la rigueur que ce soit une fable, le reproche n'en sauroit tomber que sur Wasthald qui a poursuivi son Histoire des Francs ou des Sicambres jusqu'à la 21e année après cette transplantation; & non sur Hunibald, qui n'en a écrit la suite que depuis ce tems-là. Il est vrai qu'il a, si l'on veut, adopté les fables de Wasthald. Je n'en disconviens point, mais en même tems je soutiens qu'il l'a dû, & qu'il seroit très-blâmable de ne l'avoir pas fait. A-t-on jamais traité de fabuleux les Auteurs de Collections, un du Chesne, un Pistorius, un Freher, un Leibnitz, pour y avoir admis des Piéces mêlées de fables? Approuveroit-on un Ecrivain qui auroit entrepris de continuer l'Histoire d'un Ancien, tel, par exemple, que Tite-Live, (& je ne croi pas faire d'injustice à Tite-Live de le mettre en parallele avec Wasthald, en fait de choses incroyables; car s'il s'agissoit de faire voir lequel des deux est le plus fabuleux, certainement la décision ne seroit pas favorable à l'Auteur Romain;) approuveroit-on, dis-je, ce Continuateur, si après avoir mutilé son Historien, sous prétexte d'en retrancher les fables & de corriger tout ce qu'il y auroit trouvé à reprendre, le faisant imprimer ainsi défiguré à la tête de sa continuation, il le donnoit pour l'Histoire de Tite-Live? Ou le blâmeroit-on moins si, l'ayant mise en cet état & taisant le nom de l'Historien, il avoit la mauvaise foi de se l'approprier? A mon avis

Huni-

Hunibald a beaucoup mieux fait. Il n'a ni altéré ni pillé l'Histoire de Wasthald; il lui en a laissé tout l'honneur, mais aussi il l'a produite avec tous ses défauts, qu'on ne doit pas lui imputer n'étant pas les siens, & dont au contraire on doit lui savoir gré, puisqu'ils sont une marque de sa fidélité. Ce n'est donc point à l'occasion de cette partie de son Ouvrage qu'il peut mériter le titre d'Auteur fabuleux; ainsi ce doit être par rapport à sa continuation. Mais comme dans la Proposition que j'examine le Comte de Nuenar n'en indique aucun exemple, son accusation étant générale, ma réponse doit l'être aussi. Si les fables qui se trouvent dans un Ouvrage devoient faire perdre toute créance aux vérités qui peuvent s'y trouver en même tems, il y a peu d'Annales, de Chroniques, d'Histoires; que dis-je? il n'y en a point qu'on ne soit en droit de rejetter. Mais, comme je l'ai déja dit ailleurs, il est de la bonne Critique autant que de la justice, de savoir y démêler le faux du vrai, pour éviter l'un & profiter de l'autre, sans rien ôter aux droits de celui-ci, ni rien donner à l'usurpation de celui-là. Il est fâcheux que l'Histoire d'Hunibald ne nous soit connue que par les Abrégés de l'Abbé Tritheme. Cependant, en tirant de ces deux Ouvrages tout ce qui peut avoir rapport à Hunibald, il paroît que ce n'étoit nullement un Auteur romanesque. Son Histoire attire l'attention par la gravité des faits. Ce n'est point un tissu d'anecdotes amusantes; l'Auteur a un objet plus sérieux & il ne s'en écarte point: c'est la succession des Rois Sicambres ou Francs en Allemagne & ce qu'ils y ont fait de plus considérable; c'est le récit des guerres qu'ils ont eües avec leurs voisins, surtout avec les Gaulois; récits ramenés si souvent qu'ils en deviendroient ennuyeux, si leur objet ne constituoit l'essence de cette Histoire, comme il constitue celle de toutes les autres, par le malheur attaché à la condition humaine, qui fait que les Fastes des Nations ne sont que les Histoires de leurs Guerres. Hunibald y fait voir sa sincérité & sa bonne foi, en citant sans cesse les Auteurs de sa Nation dont il emprunte ses récits & souvent même en faisant leur éloge. L'idée qu'il en donne peut paroître étonnante à ceux qui regardent les Sicambres ou les Francs de ce tems-là comme

des Barbares, plus guerriers que gens de Lettres. Il en nomme jusqu'à 20, outre *Wasthald* & lui: savoir THÉOCAL, Grand-Prêtre de Jupiter, poëte & parent des Rois, au tems duquel les Francs ou Sicambres commencerent à avoir un Temple, ayant jusqu'alors sacrifié & fait leurs assemblées sous des chênes: le Roi BASAN, Grand-Pontife, qui écrivit des prédictions en vers, & établit dans le Temple de Jupiter des Prêtres, qui entendoient le Grec comme l'Allemand, & étoient très-savans en matiere de prédictions, de songes, d'astrologie, de morale, de physique & de métaphysique: sous le même régne, HÉLIGAST qui, après avoir été pendant 32 ans l'Oracle de sa Nation, fut honoré comme un Dieu après sa mort: AMERODAC ou AMERADAT, philosophe & historiographe des Sicambres: le Roi CLOGION, Augure, Devin & grand Astrologue: sous son régne, CLODOMER, Conseiller & poëte, qui écrivit en vers les actions de ce Roi: AREBALD, Grand-Pontife & poëte, qui fit de même en vers l'Histoire du Roi Rather: Après lui le Roi RICHIMER son successeur dans le Grand-Pontificat: RUTHWIC, aussi poëte des Francs, qui écrivit en vers les gestes de Richimer: VECHTAN, issu de la Race Royale, qui parloit Grec & Latin, étoit très-habile dans l'Astronomie, la musique, la médecine & la philosophie des Grecs, ayant étudié longtems à Rome & à Athenes avec quelques autres de sa Nation; à son retour il instruisit les fils des Rois & des Nobles, à la maniere des Francs, sous un chêne: ODEMAR, fils du Roi Marcomer, Grand-Pontife après Vechran, & versé en toute littérature: DORAC, parent des Rois, & disciple de Vechtan, fameux poëte, Conseiller & Annaliste des Francs, & élu Grand-Pontife après Odemar: CARADOC de Lancarbane, élégant historiographe: HILDEGAST, Philosophe de la même Nation, grand poëte, Conseiller & parent des Rois, qui écrivit en vers Allemands la vie du Roi Sunnon, & quantité d'autres poésies; il apprit aux enfans des Nobles à jouer de toutes sortes d'instrumens de musique, à chanter en vers Allemands les gestes de leurs ancêtres; il fut cause aussi de divers changemens avantageux dans la maniere de vivre, de bâtir, de s'habiller. Et enfin du tems de Faramond,

mond, SALOGASTHALD ou SALAGAST, Grand-Pontife de Jupiter & descendant des Rois, WISOGASTHALD ou WISOGAST, Grand-Pontife de Diane, WYNDEGAST & BASOGAST, tous quatre Auteurs des Loix prétendues Saliques; GASTHALD, un des Sages; HERHALD, Maître des Epitres ou Secretaire d'Etat: tous gens de Lettres. Cela paroîtra sans doute incroyable, comme j'ai déja dit, parce que c'est un Auteur National & suspect qui le rapporte. Mais on en croira peut-être St. Jérôme, qui nous apprend que dans le IV[e] siécle où il vivoit, il n'étoit pas rare qu'un Franc sût le Latin: *Videres de ore barbaro, & qui Francam tantùm & Latinam linguam noverat*, &c. Il parle d'un François contemporain de St. Hilarion, sous le régne de l'Empereur Constance, 70 ans avant Faramond. Mais quand bien même ils auroient ignoré le Latin & les autres Langues étrangeres, ils n'avoient besoin que de la leur pour écrire leurs Annales: Tacite, dans son Traité *de Moribus Germanorum cap.* 1, assûre que les Germains, & du nombre des Germains étoient indubitablement les Francs, ou les Sicambres, qu'il désigne peut-être sous le nom de *Gambriviens;* que ces Germains, dis-je, avoient des vers antiques qui leur servoient de Mémoires & d'Annales: *Celebrant carminibus antiquis, quod unum apud illos memoriæ & annalium genus est.* C'est aussi ce que Jornandès dit des Goths: *In priscis eorum carminibus penè historico ritu recolitur.* Ces vers se chantoient même chez les Germains, comme dit encore Tacite au second Livre de ses Annales parlant d'Arminius: *Caniturque adhuc Barbaras apud gentes.* Et les Barbares n'étoient pas les seuls qui eussent ces sortes de chansons, les Romains en avoient eux-mêmes, comme le prouve celle-ci qui fut faite à l'occasion des victoires de leur Empereur Aurélien, suivant Vopiscus:

Mille Francos, mille Sarmatas semel occidimus,
Mille mille mille mille mille Persas quærimus.

Les Romains eurent aussi des Annales en Vers; témoin celles d'Ennius, plus anciennes que les Histoires en prose de Fabius Pictor & de L. Cincius. Mais outre ces Annales, ils en avoient de plus autentiques qu'ils nom-

nommoient *Annales Maximi*, parce qu'elles étoient écrites par le *Maximus Pontifex*, suivant un usage observé dès les commencemens de Rome, & qui dura jusqu'au tems du Très-grand Pontife P. Mucius, 125 ou 123 ans avant J. C. comme on le voit dans Cicéron au second Livre de son Orateur: *Erat historia nihil aliud nisi annalium confectio, cujus rei, memoriæque publicæ retinendæ causa, ab initio rerum Romanarum usque ad P. Mucium Pontificem Maximum res omnes singulorum annorum mandabat literis Pontifex Maximus . . . qui etiam nunc annales Maximi nominantur.* Les Germains dans chaque Nation avoient comme les Romains un Pontife tiré de la famille des Princes: tels étoient du tems d'Arminius, son beaufrere *Segimond* fils de Segeste, & Pontife des Chérusques suivant Strabon, ou des Ubiens suivant Tacite, & *Libès* Pontife des Cattes. Il y a donc toute apparence que les Francs ou Sicambres, qui étoient du nombre des Nations Germaniques, avoient également un Pontife comme les autres. Or ce Pontife étant le Sage, le Docteur & l'Oracle de sa Nation, il étoit naturel qu'il fût chargé, préférablement à tout autre, d'en rédiger les Annales pendant le cours de son pontificat qui ne finissoit qu'à sa mort. Et comme ces Annales étoient faites pour être publiques, sûes par cœur & même chantées, il étoit naturel aussi qu'elles fussent rimées ou mises en vers qui se retiennent mieux que de la prose. Enfin il y a preuve que ces vieux vers, dans lesquels étoient célébrées les actions & les guerres des anciens Rois de cette Nation, existoient encore du tems de Charlemagne. qui prit la peine de les écrire pour les apprendre par cœur, comme dit Eginhard dans la vie de cet Empereur dont il étoit Secretaire: *Barbara & antiquissima carmina quibus veterum regum actus & bella canebantur, scripsit memoriæque mandavit.* Ainsi il est très-possible qu'Hunibald ait tiré de ces mêmes vers l'Histoire de sa Nation, comme le disent divers Passages des Abrégés que Tritheme en a faits: Page 4. *Postquèm Hunibald Francus ex carminibus & scriptis Flaminum gentis Francorum continuavit historiam.* Page 17: *Cujus magnificè gesta pontifex Francorum Arebaldus, & vates carmine descripsit more priscorum, quæ postea Hunibaldus redegit in prosam.*

Et cela posé, il est difficile de ne pas convenir avec Tritheme, qu'Hunibald muni d'autorités vraisemblables doit être considéré comme un Historien grave & solide, qu'il faut bien examiner avant que de vouloir le critiquer: *Monemus lectorem, ne prius carpat opus, quàm prudenter examinet.* Et quelques lignes plus loin: *Quorum diversas opiniones neminem posse vel discernere vel concordare credimus, quem Hunibaldi compilatio non illustrat. Is etenim solidus Francorum Historiographus, &c.* (*Page 2*). Ce n'est pas qu'on veuille prétendre qu'il soit entiérement exemt de fables, surtout dans les commencemens de l'ouvrage: *Cujus initia sicuti sunt miranda, sic mihi videntur (salva pace judicantium meliùs) in pluribus esse fabulosa.* Mais ces commencemens sont de Wasthald & non d'Hunibald; & à supposer après tout qu'il se rencontre aussi quelques fables dans le reste, est-ce une raison pour faire perdre toute créance à un Historien, lorsqu'on appelle tous les jours en témoignage un Hérodote, un Xénophon, un Tite-Live, un Pline, & tant d'autres Grecs & Romains incomparablement plus fabuleux? Ainsi cette premiere partie de la seconde Proposition du Comte de Nuenar n'est qu'une vaine & vague accusation qui ne sauroit donner atteinte à l'autorité d'Hunibald: voyons si la seconde partie aura plus d'effet.

2°. Il juge que c'est un Auteur supposé, parce qu'au tems de Théodose le Grand & de Gratien la langue Latine n'étoit pas venue à ce point de barbarie qu'on remarque dans son style. Un raisonnement aussi faux ne se pardonneroit pas à un Ecolier. J'ai montré plus haut que Théodose & Gratien sont morts dans le IV[e] siécle & Hunibald seulement dans le VI[e], ayant survêcu à Clovis. Par conséquent il y a de l'absurdité à juger de sa supposition par la différence de sa latinité à celle du tems de ces deux Empereurs. Au contraire cette différence doit être un grand préjugé en sa faveur. Je conviens qu'il pouvoit se trouver encore dans le VI[e] siécle, vers le tems d'Hunibald, quelques Auteurs dont le style ne fût pas entiérement barbare; tels étoient à Rome ou dans l'Italie, Ennodius, Boëce, le Comte Marcellin, Cassiodore,

dore, Arator, & autres. Mais Hunibald étoit-il Romain? Etoit-ce même un Gaulois, à qui le Latin dût être presque aussi familier qu'à un Romain, par la longue domination que ceux-ci avoient exercée dans les Gaules; & cependant qu'on lise Grégoire de Tours, Auteur de ce même siécle, Gaulois, Evêque & homme de naissance; qu'on le lise dans son style original, on verra combien le Latin en est barbare. Que ne devoit donc pas être à plus forte raison celui d'un François de Nation tel qu'Hunibald; mais qui dans le fond n'étoit autre que le Latin des Loix prétendues Saliques, traduites aussi dans ce siécle & par un Auteur également François? Au reste, pour pouvoir juger du style d'Hunibald, il faudroit que nous eussions son Histoire, & j'ai déja dit que nous ne la connoissons que par les Abrégés de Tritheme. Néanmoins il paroît que celui-ci nous en a conservé deux Passages pag. 21. Tritheme dit que le nom de Francs que les Sicambres avoient pris, étoit si insupportable aux Romains & aux Gaulois, qu'ils ne les appelloient jamais que Germains; sur quoi, après avoir cité le témoignage d'Hunibald, *testante Hunibaldo*, il ajoute: *Sic etenim dicit auctor jam memoratus: „Majores nostri non minorem pro nomine gentis suæ quod olim „à Franco Rege suo acceperunt, communi decreto curam habuerunt, „quam pro regno; quia gloriosum sibi fore arbitrabantur, Francum nomen non amplius in aliud commutare, semel à suis progenitoribus cum „summo honore assumptum.* L'autre Passage est une prédiction d'Hildegast en rimes sans mesure & sans regle, *quorum*, dit Tritheme, *interpretationem sic fecit Hunibaldus.*

„*Veniet ab occiduo Francis victoria Deo,*
„*Dardaniique veteres quem coluere majores.*
„*Quicquid habet Gallus, quicquid Germania tota,*
„*Juri cedet omne tuo, bellicose Sicamber.*
„*Hunc tibi cum dederit primum de nomine regem,*
„*Quem statuent principes jam sine rege duces.*
„*Tunc, illo vincente, Francus sine fine regnabit...*
„*Magnus ecce Deus dabit Franco lupanaria castra,*
„*Et franget aquilam leo serpente collisam.*

Or

Or si le style de ces deux Passages (aux fautes de prosodie & à la versification près) est celui d'Hunibald sans altération, tant s'en faut qu'il soit barbare, comme le prétend le Comte de Nuenar, qu'il peut hardiment le disputer au Latin des meilleurs Auteurs du VI[e] siécle, & qu'il l'emporte de bien loin sur celui de Grégoire de Tours, des Loix Saliques & d'autres semblables Ecrits, qu'on peut véritablement appeller un Latin barbare. Mais aussi qui peut répondre que Trithéme n'y ait pas fait quelques changemens? c'est ce qu'on ne sauroit assûrer puis qu'il ne dit pas formellement qu'il les rapporte dans les termes de l'original. Cependant, comme après tout cela il n'en demeure pas moins constant qu'Hunibald ayant vêcu sous Clovis & après lui, son Latin peut & doit différer de celui qu'on écrivoit du tems de Théodose I. & de Gratien; il s'ensuit que le Comte de Nuenar est tombé dans un paralogisme en alléguant cette différence pour preuve qu'Hunibald est un Auteur supposé.

III. PROPOSITION.

Præterea cùm (sicut ipse testatur) tàm vehemens tunc Francorum in Romanos odium vigeret, ut multis in locis ne vestigia quidem Romanorum relinquenda putaverint, quo illorum memoriam extirpare è Germania atque Gallia possent: mihi verisimile non videtur Hunibaldum ea ipsa lingua gentis suæ historiam tradere voluisse, quam tàm acriter insectabantur omnes.

Il dit „que comme au rapport d'Hunibald les François étoient „ennemis des Romains, cherchant à extirper de l'Allemagne & des „Gaules toutes les traces de leur domination, il n'est pas apparent „qu'il ait voulu écrire l'Histoire de sa Nation dans une Langue qu'elle „détestoit.“

S'il y a quelque chose de contraire à la vérité & même à la vraisemblance, c'est encore ce raisonnement qui est une suite du même paralogisme. Le Critique parle du tems de Théodose & de Gratien où les Francs étant encore en Allemagne il eût été ridicule en ef-

ſet à un Auteur de leur Nation d'écrire leur Hiſtoire en Latin. Mais Hunibald vivoit ſous & après le régne de Clovis, lorſque les François étoient maîtres de toutes les Gaules, que les Romains n'y poſſédoient plus rien, qu'il ne reſtoit pas la moindre matiere de guerre entre ces deux Puiſſances. Or écrivant ſon Hiſtoire dans de telles circonſtances, de quelle Langue devoit-il ſe ſervir? de la Françoiſe? elle étoit trop nouvelle dans les Gaules pour y être fort répandue. De la Gauloiſe? elle étoit également nouvelle pour les François, & outre qu'Hunibald pouvoit l'ignorer, il auroit peut-être révolté le peuple Gaulois, en le mettant à portée de lire un ouvrage qui ne contient preſque que l'Hiſtoire des fréquentes défaites de ce Peuple par ſa Nation. Il ne pouvoit donc ſe ſervir que de la langue Latine, qui étoit à la vérité fort répandue dans les Gaules, mais qui n'étoit proprement que la langue des honnêtes gens. Et après cela il eſt ſi faux que les François ayent cherché à éteindre la langue Latine ſoit en Allemagne ſoit dans les Gaules, qu'on peut donner pour preuve du contraire leurs liaiſons avec les Romains, les exemples qu'on trouve dans l'Hiſtoire, de François ſachant le Latin avant Faramond, l'ancienne traduction Latine des Loix Saliques, les plus anciens Diplômes des Rois de la premiere Race en Latin, les Hiſtoires des François de Sulpice Alexandre, de Frigeride, de Grégoire de Tours; toutes écrites auſſi en Latin, ce qui prouve qu'Hunibald a pu comme eux ſe ſervir pour la ſienne de la même Langue ſans offenſer ſa Nation. Ainſi cette troiſieme Propoſition du Comte de Nuenar eſt toute auſſi vaine que les deux précédentes.

IV. PROPOSITION.

Sed opinor ſtudioſum aliquem nonnulla ex Hunibaldo collegiſſe, eaque ſuo more, ſine ordine, ſine judicio, ſic in volumen redegiſſe, quemadmodum nunc apud quoſdam habentur.

Il dit „qu'il eſt dans l'opinion que quelque homme d'étude, „ayant fait des extraits d'Hunibald, les a enſuite rédigés à ſa mode, „ſans ordre, ſans jugement, & en a formé un volume, tel que „plu-

„plusieurs l'ont actuellement," c'est à dire au tems du Comte de Nuenar.

Cette Proposition n'étant qu'une conclusion tirée des principes que j'ai réfutés, tombe nécessairement avec eux. Mais j'admire l'assurance du Critique, après d'aussi faux raisonnemens, d'oser maintenir „la supposition d'Hunibald sur la conjecture, que ce sont des Extraits „de cet Auteur que quelqu'un a rédigés à sa mode, sans ordre ni ju„gement, & dont il a fait un volume." Nous ne savons point en quoi consistoit ce volume; & il n'y a pas d'apparence que ce soit un des Abrégés de Tritheme; car outre qu'il ne le nomme point, celui-ci ne donne dans ces Abrégés aucun lieu à la conjecture, ne les produisant point sous le nom d'Hunibald, mais le citant fréquemment comme son principal Auteur, auquel il ne laisse pas d'en associer encore d'autres qu'il paroît aussi qu'Hunibald avoit cités. Et même faisant à la page 30. un récit très suspect de 71 mille filles & femmes sans les enfans, massacrées par les Huns, de peur qu'on ne l'attribue à Hunibald, il a soin de l'en disculper & de nommer son autorité: *Hanc autem . . . historiam Hunibaldus non refert, sed memoratus auctor Galfredus Monemutensis* &c. D'ailleurs il n'y a point d'Histoire où il y ait moins de digressions, où la Chronologie soit plus marquée, où les faits soient narrés avec plus de netteté. Ainsi il est peu vraisemblable que le Comte de Nuenar ait eu Tritheme pour l'objet de sa Critique, puisque jamais Auteur n'a moins mérité le reproche d'avoir rédigé sans ordre & sans jugement. Mais ce reproche après tout ne tombant point sur Hunibald, que le Comte de Nuenar excepte & distingue des ignorans qui l'ont extrait, il devient indifférent pour sa justification.

V. PROPOSITION.

Quod si quis omninò contendat, hunc ipsum esse Hunibaldum non fictitium sed verum, huic libens concedam, modò ne me cogat illi fidem facere in iis rebus, quæ solent spectatæ eruditionis & doctrinæ virum expostulare.

Il dit „qu'il accordera ſi on le veut abſolument, que c'eſt l'ou„vrage du véritable Hunibald, mais qu'il n'eſt pas obligé de le croi„re ſur les choſes qui demandent dans un Auteur une profonde éru„dition."

En cela je ſuis de l'avis du Comte de Nuenar, mais il reſte à ſavoir, quelles ſont ces matieres d'érudition dans leſquelles Hunibald a erré? C'eſt peut-être ce que nous apprendrons dans les propoſitions ſuivantes.

VI. PROPOSITION.

Non magnopere enim me illi opponerem, niſi Trojanos meliores putaſſet Germanis, & quos Corn. Tacitus atque Strabo homines Romani, indigenas ſemper fuiſſe pronuntiant, eos ipſe Aſiaticos origine faceret: Sed quàm hoc ſine omni judicio facere aggreſſus ſit, alii mecum judicent.

Il dit „qu'il ne feroit pas fort contraire à Hunibald, ſi cet Hiſ„torien n'avoit eu l'injuſtice de croire les Troyens meilleurs que les „Germains, & de tirer de l'Aſie l'origine de Peuples que Tacite & „Strabon aſſurent avoir été toujours indigenes ou naturels de leur „pays."

1°. Je l'ai déja dit & je le répete: ce n'eſt point Hunibald, c'eſt Waſthald qui a fait venir les Francs ou Sicambres des Troyens; ainſi cette prétendue injuſtice n'intéreſſe que ce dernier. Mais je ne vois pas qu'il y ait plus d'affront pour les Allemands d'avoir eu parmi eux une Nation de Sicambres venue de Troye, ni pour les François eux-mêmes d'être ſortis de là, qu'il n'y en a eu pour les Romains, le premier Peuple de l'Univers, leſquels au contraire tenoient à ſi grand honneur d'avoir eu la même origine.

2°. Je n'examinerai point ici l'opinion de Tacite & de Strabon, parce qu'elle m'engageroit dans une diſcuſſion ſur l'origine des Germains qui n'eſt pas de mon ſujet.

VII.

VII. PROPOSITION.

Nam si Trojanum bellum fuisse aliquando (quod pulcherrimis rationibus negat Dion Prusensis, sacrâ Aegyptiorum fultus Historiâ) putandum est, certè non facile persuadebit mihi Hunibaldus tantum hominum numerum sub tàm famoso Duce furtim abscedere potuisse, cujus rei nullus Græcorum scriptor mentionem faciendam censuisset. Neque enim tanto hominum numero in Italiam Aeneas & Antenor profugisse leguntur, quanto Priamum Juniorem Hunibaldus ad Scythiam venisse contendit. Tamen horum fugam Dares non tacuit, quem nonnulli militasse eo bello putant, & omnes Græcorum Historiæ testantur hos solos expugnatæ urbis reliquias fuisse, qui in ipso Græcorum insultu fuga salutem quæsiverint, postmodumque alter Venetiam, alter Latium invaserint. At Priami illius Junioris nullus unquam veterum meminit.

Il dit „Qu'à supposer la vérité de la guerre de Troye, ce que „Dion de Pruse nie par de très belles raisons, appuyé sur l'Histoire „sacrée des Egyptiens; Hunibald persuadera difficilement qu'une multitude de gens sous un Chef si fameux, ait pu se retirer furtivement, „sans qu'aucum Ecrivain Grec ait daigné en dire le moindre mot: vû „que le nombre de ceux qui suivirent en Italie Enée & Anténor, n'approche point de cette multitude qu'Hunibald prétend être venue dans „la Scythie avec Priam le Jeune dont nul Auteur ancien n'a non plus fait „mention. Que cependant Darès, qu'on croit avoir servi dans cette „guerre, & toutes les Histoires Grecques qui n'ont point parlé de ceux-„ci, ont parlé de ceux-là, & même en ont parlé comme des seuls „échappés de Troye, qui cherchant leur salut dans la fuite vinrent envahir les uns la Vénétie & les autres le Latium.“

Pour réfuter cette Proposition: 1°. Je dis que le silence de l'Histoire Sacrée des Egyptiens sur laquelle se fonde Dion de Pruse, nommé autrement Dion Chrysostome, ne sauroit contrebalancer l'autorité des Marbres de Paros, qui fixent dans la 22e Epoque le commencement de la guerre de Troye, l'an 13e de Ménesthée Roi d'Athenes, ce

qui revient à l'an 1218 avant J. C. & dans la 23[e] Epoque la prise de Troye le 24[e] jour du mois Thargelion l'an 22[e] du même Ménesthée, ce qui revient au 9 ou 10 de Mai de l'an 1209 avant J. C.

2°. Il est aisé de faire voir par le témoignage d'Hérodote, que les Egyptiens étoient très persuadés de la vérité du Siege de Troye: „Quand je demandai (dit-il au second Livre de son Histoire) aux Prê„tres d'Egypte ce qu'ils pensoient d'Hélene, ils me dirent que comme „Paris-Alexandre s'en retournoit en son pays après l'avoir enlevée de „Sparte, il fut jetté par la tempête sur les côtes d'Egypte, & voyant „que la tourmente continuoit, il fut contraint d'y prendre terre à la „bouche du Nil qu'on appelle Canopique & à Tarichée. Il y avoit „sur le rivage un Temple d'Hercule, qui étoit un asyle inviolable pour „les esclaves qui s'y retiroient: ceux d'Alexandre en étant informés, s'y „réfugierent aussitôt, & se mettant à genoux devant le Dieu, ils com„mencerent à accuser leur Maître, & à publier le ravissement d'Hélene, „& l'injure qu'il avoit faite à Ménélas. Ils firent ces plaintes en pré„sence des Prêtres & du Gouverneur de cette bouche du Nil, nom„mé Thonis, qui les ayant entendues, envoya promtement à Mem„phis porter cette nouvelle à Protée qui régnoit alors sur l'Egypte. „Aussitôt Protée manda au Gouverneur de se saisir de cet Etranger & „de l'amener devant lui pour l'examiner. Thonis ayant reçu cet or„dre, fit prendre Alexandre, fit arrêter ses vaisseaux & le fit conduire „à Memphis avec Hélene, ses richesses & ses esclaves. Protée de„manda à Alexandre d'où il étoit, & d'où il venoit avec ces vaisseaux. „Alexandre lui dit sa condition & son pays, d'où il étoit parti & où il „alloit. Mais quand Protée lui eut demandé où il avoit pris Hélene, „il commença pour lors à varier, de sorte que ses esclaves l'accuserent „de ne pas dire la vérité, & découvrirent au Roi toutes les circonstan„ces de son crime. Enfin Protée l'ayant accablé de reproches, lui fit „grace de la vie, mais lui commanda & à ceux qui lui appartenoient, „de sortir dans trois jours des terres de son obéissance; & retint en dé„pôt Hélene & ses richesses, jusqu'à ce que son mari vînt lui-même

„la

„la reclamer. Ainſi, continue Hérodote, les Prêtres me conterent „qu'Hélene étoit arrivée à la Cour de Protée, & il ſemble qu'Home- „re en ait eu auſſi connoiſſance. Mais, parce qu'il n'eût pas été con- „venable de repréſenter cela dans un Poëme héroïque, il a déguiſé le „fait, & cependant il a bien fait voir qu'il ſavoit ce que je viens de di- „re. Il en donne un témoignage dans ſon Iliade lorſqu'il parle des „avantures d'Alexandre, & dit que ce Prince ramenant Hélene erra „longtems ſur la mer, & qu'il prit terre à Sidon qui eſt une ville de „Phénicie. C'eſt ce qu'il raconte dans le repas de Diomede. Il en „fait auſſi mention en deux endroits de l'Odyſſée, & donne à connoître „qu'Alexandre avoit été en Egypte. En effet la Syrie touche l'Egypte, „& les Phéniciens à qui appartient Sidon, habitent dans la Syrie. Au „reſte, ajoute Hérodote, quand je demandai aux Prêtres ſi ce que les „Grecs racontent d'Ilion ne devoit point être mis au nombre des fa- „bles, ils me répondirent qu'ils avoient appris par l'Hiſtoire, que „pour venger Ménélas du raviſſement d'Hélene, de grandes troupes „de Grecs vinrent à ſon ſecours dans le pays de Troye, & qu'après „avoir pris terre & fait leurs logemens, ils envoyerent à Troye des „Ambaſſadeurs, & que Ménélas même alla avec eux: Que quand ils „furent dans la ville, ils demanderent Hélene & tout ce qu'Alexandre „avoit emporté, & outre cela la réparation de cette injure: Que les „Troyens leur firent réponſe & jurerent même qu'Hélene & toutes „les choſes qu'on leur demandoit, n'étoient pas à Troye, mais en „Egypte, & qu'il n'étoit pas raiſonnable qu'on les pourſuivît pour des „choſes que le Roi d'Egypte retenoit: Que les Grecs s'imaginant „qu'on ſe moquoit d'eux mirent le ſiege devant la Ville, & y demeu- „rerent juſqu'à ce qu'ils l'euſſent priſe & qu'ils s'en fuſſent rendus les „maîtres: Que la ville ayant été priſe, & voyant qu'on ne trouvoit „point Hélene, & qu'on leur faiſoit les mêmes réponſes qu'on leur „avoit déja faites, ils commencerent à y ajouter foi, & envoyerent „Ménélas à Protée: Qu'auſſitôt qu'il fut arrivé en Egypte il alla droit „à Memphis où, après avoir expoſé le ſujet de ſon voyage & reçu tous „les bons traitemens qu'un grand Roi peut faire à un grand Prince, on

„lui rendit sa femme qui y avoit été respectée en Princesse de sa condi„tion, & l'on remit tous ses trésors entre ses mains: Que néanmoins, „après avoir recouvré des Egyptiens tout ce qu'il avoit souhaité, il se „montra ingrat envers eux, & ne reconnut que par des outrages le „plaisir & les honneurs qu'il venoit d'en recevoir: Car comme il vou„loit s'embarquer pour retourner en son pays, & que les vents lui „étoient toujours contraires, enfin après avoir longtems attendu, il „s'avisa de faire une chose qui fut sans doute horrible: Qu'il prit deux „petits enfans des habitans du pays, les tua & les ouvrit pour cher„cher dans leurs entrailles les présages de son départ: Que par cette „cruauté dont on eut bientôt connoissance, il se rendit odieux à toute „l'Egypte; & qu'ayant été poursuivi comme un Barbare, il s'enfuit „sur ses vaisseaux dans la Lybie. Les Egyptiens (c'est toujours Héro„dote qui parle) ne m'en purent apprendre d'avantage, & me dirent „qu'ils avoient appris de l'Histoire quelques-unes de ces choses, & „qu'ils savoient fort bien les autres, comme étant arrivées chez eux. „Voilà ce que me conterent les Prêtres d'Egypte." Or ce récit fait par eux à Hérodote prouvant la réalité de la guerre de Troye, est-il croyable que l'Histoire sacrée des Egyptiens, dont ces mêmes Prêtres étoient & les Ecrivains & les dépositaires, ait pu fournir à Dion Chrysostome 566 ans après Hérodote le moindre argument négatif contre la réalité de cette même guerre de Troye.

3°. Le Darès de Phrygie que le Comte de Nuenar allegue, est un Auteur supposé, de même que Dictys de Crete qu'il ne cite point & dont on a aussi une prétendue histoire du siége de Troye?

4°. La preuve négative qu'il prétend tirer du silence des Ecrivains Grecs n'est d'aucune considération, parce qu'ils ont bien pu parler des Troyens retirés dans un pays comme l'Italie qui étoit connue & fréquentée par eux; mais n'en étant pas de même de la Scythie, ceux qui s'y retirerent après la ruine de Troye ont pu être parfaitement inconnus à ces Ecrivains, lesquels n'ont même parlé des premiers que plus de 1000 ans après leur venue en Italie, puisqu'il est vrai qu'il n'en

est

eſt fait mention ni dans Homere vers l'an 907, ni dans Hérodote environ l'an 470, ni dans Théopompe l'an 367, ni dans les Marbres de Paros qui deſcendent juſqu'à l'an 264. Ce n'a été que depuis ce tems-là & vers l'an 256, que Fabius Pictor, le plus ancien Hiſtorien Romain, en a parlé le premier, comme on le juge par le nom d'Enée qui ſe trouve dans les fragmens qui nous reſtent de ſon Hiſtoire, auſſi bien que dans ceux des Annales du Grand-Pontife Q. Fabius Servilianus, 145 ans avant J. C. Cela paroît de même par le nom d'Aſcagne fils d'Enée, dans les fragmens des Annales de L. Cincius Alimentus peu après Pictor; & beaucoup plus clairement, dans ceux des Origines de M. Porcius Caton qui mourut l'an 150. Ces autorités & quelques autres auſſi en fragmens, tels qu'A. Poſtumius Albinus qui floriſſoit l'an 151, L. Calpurnius Piſo Frugi l'an 149, L. Cœlius Antipater l'an 130, Sextus Gellius vers l'an 120, Q. Aelius Tubero l'an 105, & Lutatius l'an 70: toutes ces autorités, dis-je, ſont les plus anciennes qu'on puiſſe citer pour prouver l'origine Troyenne des Romains. Cependant on peut montrer que l'opinion de l'origine Troyenne des Francs eſt non ſeulement auſſi probable, mais même incomparablement plus ancienne que celle de l'origine Troyenne des Romains. Grégoire de Tours, au Livre ſecond, rapporte ſuivant l'opinion de ſon tems, que les Francs étoient venus de la Pannonie pour s'établir dans la Germanie près du Rhin. Or on lit au Ve Livre d'Hérodote que les Pannoniens tiroient leur origine des Troyens. „Il arriva, dit-„il, une choſe qui donna envie à Darius de commander à Mégabyſes „de faire paſſer les Pannoniens d'Europe en Aſie.“ Notez que ce Darius étoit le fils d'Hyſtaſpes, qui régna ſur les Perſes depuis l'an 517 juſqu'en 486 avant J. C. & l'événement dont il s'agit regarde l'année 507. „Car, continue-t-il, après que Darius fut de retour en Aſie, „Pygres & Maſtyes tous deux Pannoniens vinrent à Sardes; ayant „deſſein de ſe rendre maîtres de la Pannonie, & d'en uſurper la domi-„mination, ils menerent avec eux leur ſœur qui étoit belle & bien-fai-„te. Comme ils eurent appris que Darius étoit logé dans un Faux-„bourg de la ville, ils habillerent leur ſœur le plus magnifiquement qu'il

„leur fut possible, & l'envoyerent à l'eau avec un pot sur la tête, menant après elle un cheval dont la bride étoit passée autour de son bras, „& ayant en main une quenouille qu'elle filoit. Darius la voyant passer la considéra attentivement, parce qu'elle faisoit une chose que n'avoient pas coûtume de faire les Persanes, les Lydiennes, ni les autres „femmes de l'Asie. Il envoya donc quelques-uns de ses Gardes, „avec ordre de s'informer pourquoi elle menoit un cheval par la bride. Quand elle fut arrivée à la riviere, elle le fit boire, remplit „d'eau son pot, & après cela s'en retourna par le même chemin portant son pot sur sa tête, remenant le cheval, & continuant de filer sa „quenouille. Darius étonné de ce que ses Gardes lui en avoient rapporté, & de ce qu'il avoit vû lui-même, fit venir cette femme, lui „demanda d'où elle étoit: ses deux freres qui l'accompagnoient, répondirent qu'ils étoient Pannoniens, & qu'elle étoit leur sœur. Alors „Darius leur demanda quelles gens étoient les Pannoniens, en quel endroit de la terre ils habitoient & pourquoi ils étoient venus à Sardes. „Ces jeunes hommes lui firent réponse qu'ils y étoient venus pour se „donner à lui. Que la Pannonie étoit sur le fleuve de Strymon qui „n'est pas éloigné de l'Hellespont, & que les Pannoniens étoient „descendus des Troyens qui se sauverent du sac de Troye."

Ce témoignage est d'autant plus digne d'attention, qu'il vient d'un Historien contemporain de Darius, puisqu'il florissoit 17 ans après son régne, sous celui de Xerxès son fils; & que cet Historien, en même tems qu'il dépose ainsi de l'Origine Troyenne des Pannoniens, ne paroît point avoir été persuadé que les Romains ayent eu la même origine, puisqu'il n'en dit pas un mot dans toute son Histoire. Et comme ce n'est que deux siécles après lui que Fabius Pictor, le plus ancien des Historiens Romains, a attribué cette origine à sa Nation, c'est un grand préjugé que celle-ci a été d'une invention assez moderne; & de tout cela on peut évidemment conclure, contre la prétention du Comte de Nuenar, qu'il n'est pas vrai qu'aucun Ecrivain Grec n'ait fait mention d'autres échappés de Troye que de ceux qui allerent s'établir en Italie, ni que ceux-ci ayent été les seuls qui se sauverent de cette

cette ville ſaccagée. Ainſi qu'on juge de là, ſi ce Critique à eu raiſon, ou de nier l'Origine des Francs tirée des Troyens réfugiés dans la Scythie ou la Pannonie, ſuivant Hérodote, ou de donner plus de créance à celle des Romains tirée des Troyens réfugiés en Italie, ſur le prétendu témoignage d'Hiſtoriens Romains ſi poſtérieurs à la priſe de Troye & même à Hérodote. Mais comme encore un coup l'invention de cette Origine Troyenne des François ne regarde que Waſthald, peu nous importe ici par rapport à Hunibald ſon Continuateur, que ce ſoit une hiſtoire ou une fable.

VIII. PROPOSITION.

Eoque magis admirari cogor eos, quibus pro miraculo eſt Hunibaldus iſte, quaſi confingere Regum nomina opus ſit laborioſum, præſertim ubi earum rerum quas ſcribit, præter ipſum, nèmo meminerit Hiſtoricus.

Il dit „qu'il n'y a rien d'auſſi miraculeux qu'on croit, à inven„ter des noms de Rois, comme Hunibald a fait, ſurtout lorſqu'aucun „Hiſtorien n'a parlé des choſes qu'il écrit."

1°. Après avoir prouvé, comme j'ai fait, qu'Hunibald a pu tirer ſon Hiſtoire des vers très-antiques que Charlemagne recueillit, & dans leſquels étoient chantées les actions & les guerres des anciens Rois, il s'enſuit que ces Rois ſont auſſi les mêmes que ceux dont il parle dans ſon Hiſtoire. Ainſi il eſt inutile d'examiner s'il y auroit du prodige ou non à inventer, non ſeulement les noms d'une quarantaine de Rois, mais d'un bien plus grand nombre de Sicambres ou de Francs, qu'on trouve nommés dans cette Hiſtoire, & à forger ces noms ſi heureuſement, que, quoique chimériques, ils ſoient néanmoins devenus dans la ſuite des noms très-réels de Rois de France, comme par exemple ceux de Dagobert, de Hérébert ou Chérébert, de Théodomir, & autres qu'il ſeroit trop long de nommer, & qui, juſqu'à la fin du

 régne

régne de Clovis où vivoit Hunibald, ne se trouvent que dans sa seule Histoire.

2°. Si nul Historien, excepté lui, n'a parlé des choses qu'il écrit, il faut en chercher les raisons & ne pas le condamner sans les avoir bien pesées. Ce n'est point chez les Grecs qui n'avoient aucune communication avec les Peuples d'Allemagne, qu'on peut trouver la confirmation des récits d'Hunibald. Ce ne pourroit être que chez les Romains, chez les Gaulois & chez les Germains, à l'occasion des guerres que les anciens Francs ou Sicambres eurent avec eux. Pour les Germains, leurs vers dont parle Tacite ne subsistent pas plus que ceux des Francs que Charlemagne avoit recueillis; & il en est de même des Gaulois dont les Histoires se sont perdues avec leur Langue. Nous n'avons donc, pour toute ressource, que les Histoires Latines, soit des mêmes Gaulois soumis aux Romains, soit des Romains leurs maîtres, & par conséquent les unes & les autres écrites dans le même esprit. De tant d'Historiens Romains, Tacite est le seul dont nous ayons un Traité sur la Germanie: encore n'est-ce qu'une simple Description des mœurs des Germains, dans laquelle on ne trouve de leur Histoire qu'une prétendue origine tirée du Dieu Tuiston sorti de la terre, & la fondation de la ville d'Ascipurg sur le Rhin rapportée fabuleusement à Ulysse. Les Sicambres n'y paroissent désignés que sous le nom de Gambriviens, & le peu qu'il en dit fait juger qu'il ne connoissoit pas mieux leur histoire que leur nom. Pline le Naturaliste, homme curieux de faits & d'antiquités, avoit sans doute poussé plus loin ses recherches dans les vingt Livres historiques des guerres d'Allemagne que cet Auteur, comme le dit son neveu Pline le Jeune dans la 5e du Liv. III. de ses Letres, avoit composés à l'occasion d'un songe qu'il eut lorsqu'il servoit sur le Rhin, & dans lequel il crut voir Drusus Néron qui le conjuroit de ne le pas laisser dans l'oubli: mais il ne nous reste rien de cette Histoire. En général, les Romains connoissoient fort peu l'Histoire des Peuples qu'ils appelloient Barbares, leur étude dans les Langues se bornant au Latin & au Grec, par la haine qu'ils avoient con-

contre ces Barbares & par le mépris qu'ils en faisoient. De là vient d'une part que la vérité est souvent altérée dans leurs récits, que leurs pertes y sont atténuées & leurs avantages exagérés, pour faire honneur à ces ambitieux Conquérans; & que d'une autre ils raconteront vingt actions entr'eux & des Rois Barbares qui les ont souvent battus, sans daigner faire la grace à ces Rois de les nommer, ou si par hazard ils le font de vingt fois l'une, c'est presque toujours en défigurant leurs noms, de maniere à les rendre tout à fait méconnoissables. Voilà ce qu'on peut dire surtout par rapport aux Sicambres. Et ceux-ci à leur tour dont les Annales étoient chantées, usant du même droit, ne manquoient pas d'y exalter leurs prouesses & n'avoient garde d'y célébrer celles des Romains. Ainsi il seroit bien difficile qu'on les trouvât d'accord sur le même fait; outre que ces Annales devoient parler encore de bien des guerres, soit entre les Sicambres & d'autres Germains, soit personnellement avec les Gaulois sans l'intervention des Romains, toutes matieres d'Histoire qu'il ne faut pas chercher chez ces derniers, parce qu'elles leur étoient ou inconnues ou indifférentes. Par ces diverses raisons, il devoit y avoir dans les Annales des Sicambres bien des choses qui n'ont pas été écrites par les Historiens Latins ni par les Grecs, & beaucoup aussi ausquelles ils ont donné tout une autre tournûre. Mais il ne faut pas croire malgré cela ce que dit le Comte de Nuenar, que nul Historien, excepté Hunibald, n'a parlé des choses qu'il écrit. Sous le régne de Clodomir, Roi des Sicambres, il est fait mention de la guerre des Romains contre les Numantins: & cette guerre qui finit l'an 131, est aussi racontée par Velleius Paterculus & par Orose. Sous le régne de Merodac, fils de Clodomir, il est parlé dans Hunibald de 220 mille Sicambres qui s'avancerent en Italie jusqu'à Ravenne, des ravages & du butin qu'ils y firent, de la guerre que les Romains leur déclarerent, de leur combat contre Marius chef de l'Armée Romaine & contre Théodomon qui s'étoit joint à lui avec les Gaulois, de la perte qu'ils y firent de plus de 20000 hommes; des avantages qu'ils regagnerent ensuite sur les Romains & les Gaulois, &c. Et toute cette expédition des Sicambres est précisément celle-

celle dont parlent J. César, l'Epitome de T. Live, Plutarque, Pline & autres, depuis l'an 111 jusqu'au 99e avant l'Ere Chrétienne; si ce n'est que tous ces Historiens par un changement de noms l'attribuent aux Cimbres, Ambrons & Teutons, & que l'Epitomateur de T. Live fait mention d'un de leurs Princes nommé Bolus „jeune homme, dit-„il, vif & fièr qui, sur ce que M. Aurelius Scaurus Lieutenant du „Consul Cœpion, & son prisonnier, le détournoit d'aller en Italie, „lui disant qu'il n'y vaincroit jamais les Romains, fut si piqué de la „présomtion de ce personnage, qu'il lui passa son épée au travers du „corps. Circonstance qu'Hunibald ne rapporte point, mais c'est une marque qu'il n'a pas copié les Auteurs Latins, & d'ailleurs nous n'avons de son Histoire qu'un Abrégé, où bien des circonstances dont il a pu parler sont omises. Sous le régne de Cassander, fils de Mérodac, les Sicambres n'eurent ni paix ni treve avec les Gaulois & les Romains qui les soutenoient; mais comme il n'y eut point d'action éclatante, les Historiens Latins n'en ont rien marqué. Sous le régne d'Anthari ou d'Arthari fils de Cassander, Hunibald dit que les Sicambres firent deux invasions dans les Gaules, & qu'à la premiere ils prirent, saccagerent & brûlerent Mayence, Colonie Romaine: mais il ne dit pas quelles furent les représailles de J. César. Et César à son tour au Liv. 4. *de Bello Gallico*, dit qu'il se vangea sur les bourgades & les maisons des Sicambres qu'il réduisit en cendres, mais il ne parle point de l'incendie de Mayence. *Cæsar in fines Sigambrorum contendit* . . . *Sigambri ex eo tempore quo pons institui cœptus est, fuga comparata* . . . *finibus suis excesserant, suaque omnia exportaverant, seque in solitudinem ac silvas abdiderant. Cæsar paucos dies in eorum finibus moratus, omnibus vicis ædificiisque incensis, frumentisque succisis, &c.* ajoutant quelques lignes plus loin, *ut Sigambros ulcisceretur.* Et ce que dit César arriva, suivant Dion Cassius, sous le second Consulat de Pompée, l'an 55, un an après le sac de Mayence suivant le calcul d'Hunibald. L'autre invasion des Sicambres, dont parle Hunibald sous le même Roi Arthari, se trouve encore dans César & dans Dion, trois ans après la premiere; mais ces Auteurs, sans s'étendre comme Hunibald

bald sur les pillages de ces Sicambres, se contentent de parler d'une entreprise qu'ils firent sur le camp de Q. Cicéron qui ne leur réussit pas; ce qui fait aussi qu'Hunibald à son tour n'en parle point. Et voilà comme des faits présentés sous diverses faces paroissent n'avoir aucun rapport entr'eux, quoiqu'ils soient en effet les mêmes. Si je voulois parcourir ainsi toute la suite de l'Histoire d'Hunibald, je suis persuadé qu'il y auroit peu de régnes qui n'offrissent de pareils exemples d'événemens relatifs à ceux dont parlent les Historiens Romains; mais comme le nombre en seroit trop grand, il suffira d'en citer encore deux que je prendrai, pour éviter tout soupçon d'affectation, dans le régne de Franck le Successeur d'Arthari dont je viens de parler. Hunibald dit que sous ce régne les Sicambres ayant été au secours des Saxons attaqués par les Goths, comme ils retournoient à l'embouchûre du Rhin avec leur Roi Franck, il fut informé sur sa route, que les Gaulois avec les Romains ayant passé le fleuve pendant son absence avoient porté le fer & le feu dans son pays & s'en étoient retournés dans la Gaule avec un très-grand butin. Ce récit est très-vraisemblable; mais les Historiens Romains ont donné à cet exploit d'autres couleurs. Dion Cassius, Liv. 53. rapporte „que l'an 729 de Rome (ou le 25ᵉ avant J. „C.) M. Vinicius ayant tiré vengeance de certains Germains qui „avoient coupé la tête à des Romains, lesquels étoient entrés dans leur „pays pour y trafiquer, procura le titre d'*Imperator* à Auguste, & que „tant pour cette affaire que pour d'autres, on lui décerna l'honneur du „Triomphe qu'il refusa.“ *Ferè hoc ipso tempore M. Vinicius Germanos quosdam ultus, qui homines Romanos ipsorum regionem commercii gratia ingressos obtruncaverant, ipse quoque nomen Imperatoris Augusto paravit: triumphique ei propter hanc, aliasque res tum gestas decreti sunt, quos cum recusasset*, &c. L'Historien auroit mal fait sa cour aux Romains s'il eût dit que les Gaulois avoient partagé avec eux la gloire & les périls de cette expédition, ou que Vinicius trouvant le pays des Sicambres vuide de troupes, n'avoit eu à combattre que des femmes & des enfans. Mais malgré ces déguisemens portés jusqu'à substituer au nom des Sicambres celui des Germains en général pour en

en imposer davantage aux Romains, on ne laisse pas de reconnoître que c'est le même fait rapporté par Hunibald d'une maniere plus simple & plus vraie. Celui-ci continuant sa narration ajoute que le Roi Franck, pour s'en venger, forma une armée de 300 mille hommes avec ses confédérés qui lui en fournirent, savoir, les Saxons 84 mille, les Germains & Theutons 60 mille, & les Doringois ou Turingiens 46 mille; Qu'ayant fait sur la Meuse un pont de bateaux & de planches, & laissé 40 mille hommes pour le garder, il entra dans la Gaule avec le reste & y fit autant de mal que les Gaulois en avoient fait dans ses terres; Que les légions Romaines commandées par Marcus Lollius entrerent en Allemagne pour subjuguer la Saxe & la Turinge, & qu'ils y tuerent 8000 Germains; Qu'à cette nouvelle Franck envoya son fils Clogion avec une grande armée au secours de ses confédérés, qui battirent alors les Romains, les mirent en fuite & en tuerent un grand nombre; ce qui arriva la 24e année du régne de Franck. Si ce récit est vrai, il en doit être dit quelque chose chez les Historiens. En effet voici ce que je trouve au Liv. LIV. de l'Histoire Romaine de Dion Cassius: *Cæterùm maximum ea tempestate bellum, quod ipsum adeò Augustum urbe extraxit, contra Germanos fuit. Sicambri, Usipetæ & Tenchteri, primùm quosdam in suo territorio deprehensos Romanorum in crucem egerant: deinde Rheno transmisso, ex Germania Galliaque prædas egerant: equitatum Romanorum contra se missum per insidias circumvenerant: & à fugientibus usque ad Lollium præfectum præter opinionem suam pertracti, hunc quoque vicerant. Quibus cognitis, Augustus adversùs eos expeditionem quum suscepisset, bellum nullum gerendum habuit. Barbari enim, quum Lollium arma parare, Augustum exercitum adducere audirent, in suam terram regressi, obsidibus datis pacem acceperunt.* „Au reste, dit-il, il y eut en ce tems-là contre les Germains „une très-grande guerre qui obligea l'Empereur Auguste de sortir de „Rome. Dabord les Sicambres, les Usiperes & les Tenchteres „avoient mis en croix quelques Romains qu'ils avoient surpris dans „leur territoire. Ensuite ayant passé le Rhin ils avoient pillé la Ger„nie & la Gaule: ils avoient fait tomber dans une embuscade & enve-

„loppé

„loppé la Cavalerie Romaine qui avoit été envoyée contre eux; & attirés par les fuyards sans y penser jusqu'au quartier du Préfet Lollius, ils l'avoient aussi vaincu. Auguste l'ayant appris forma contre eux le dessein d'une expédition qui n'eut point lieu. Car les Barbares qui furent avertis que Lollius faisoit des préparatifs de guerre, & qu'Auguste venoit avec une armée, retournerent chez eux, donnerent des ôtages & reçurent la paix." Il est aisé de voir, en comparant les deux récits, que le fond en est le même; qu'ils different seulement dans les circonstances, que chaque Historien rapporte avec plus ou moins d'exactitude, ou tourne à l'avantage & à l'honneur de son parti; qu'Hunibald dit que les Sicambres passerent la Meuse, & Dion le Rhin; que suivant le premier ils pillerent dans la Gaule les Tongres, les Tarubans ou le peuple de Terouane & les Légiens ou les Liégeois; & suivant le dernier, qu'ils pillerent non seulement la Gaule mais aussi la Germanie, c'est à dire la Germanie seconde, ce qui revient au même; mais que l'un place le lieu de la défaite des Romains en Saxe, & l'autre à ce qu'il paroît dans la Gaule; enfin, que celui-ci veut faire croire que la frayeur obligea les Sicambres à se retirer, à donner des ôtages & à recevoir la paix, comme s'ils eussent été déja vaincus, ce qui est une rodomontade Romaine dont Hunibald avec raison ne parle pas; mais qu'après tout cela l'un & l'autre Historien conviennent de la défaite de Lollius par les Sicambres. Comment donc le Comte de Nuenar a-t-il pu dire si faussement, que nul historien, excepté Hunibald, n'a parlé des choses qu'il écrit?

IX. PROPOSITION.

Jam vide quam fidem mereatur quod ait Francorum populum profugum venisse ad Scythiam, ibique civitatem construxisse nomine Sicambriam. Quis hujus unquam civitatis Auctor meminit? An non tam facile novam urbem confingere sola sua auctoritate potuit, quam ridiculè novam gentem à Trojano deduxit excidio?

Il dit „qu'au nombre des fictions d'Hunibald on doit mettre „sa prétendue ville de Sicambrie, fondée dans la Scythie par les Sicambres venus de Troye, & de laquelle nul Auteur n'a fait mention, „mais qu'il lui a été aussi facile de bâtir une Ville nouvelle que de créer „une nouvelle Nation.“

J'ai déja dit tant de fois que l'origine Troyenne des Sicambres, ou des Francs, & l'histoire ou la fable de leur habitation dans la Scythie, n'étoient pas du fait d'Hunibald, mais de Wasthald, qu'il seroit superflu de le répéter, & par conséquent de répondre à cette Proposition. Cependant je veux faire voir encore l'erreur où étoit le Comte de Nuenar au sujet de cette ville de Sicambrie qu'il ne connoissoit point dans la Scythie. Je n'en chercherai point le nom dans celui de *Cimmerium*, ville bâtie par les Cimbres au-delà du détroit de la Mer Noire, qui sépare l'Asie de l'Europe, & non moins fameuse dans l'Antiquité que le Bosphore Cimmérien, le peuple & les ténébres du même nom sur lesquelles les Grecs ont débité tant de fables, qu'on peut lire dans Homere & dans Strabon. La véritable Sicambrie dont il s'agit étoit dans la basse Pannonie habitée de tout tems par les Scythes. Enfin c'étoit l'ancienne Ville de Bude ou Alt-Offen, située en Hongrie, comme le prouve cette Inscription qu'on assûre avoir été trouvée dans ses ruines:

LEGIO. SICAMBRORUM.
HIC. PRÆSIDIO. CONLOCATA.
CIVITATEM. ÆDIFICAVIT.
QUAM. EX. SUO. NOMINE.
SICAMBRIAM. VOCAVERUNT.

C'est ainsi que la rapporte Nicolas Vignier, dans son Traité sur l'origine des anciens Francs au Tom. I. du Recueil d'André du Chesne, pag. 162. Il resteroit à savoir 1°. qu'elle étoit cette Légion de Sicambres, & 2°. en quel tems elle bâtit cette ville de Sicambrie. Tout ce que je puis dire sur la premiere de ces deux Questions, est que s'il y a eu chez

chez les Romains une Légion qui ait porté le nom des Sicambres, elle ne s'appelloit pas *Legio Sicambrorum* mais *Legio Sicambrica*, comme toutes celles qui portoient un nom national, la Gallique, la Scythique, la Macédonique, l'Espagnole, les deux Egyptiennes, les trois Parthiques, les trois Italiques, la Cyrénaïque, la Germanique; ces Légions ne pouvant être appellées *Legio Gallorum*, *Scytharum*, *Macedonum*, *Hispanorum*, *Aegyptiorum*, *Parthorum*, *Italorum*, *Cyrenarum*, *Germanorum*, parce qu'elles n'étoient point composées de troupes de ces Nations, mais uniquement de Soldats Romains, & qu'elles prirent ces noms ou des Provinces à la réduction desquelles on les avoit employées comme les neuf premieres, ou de celles dans lesquelles elles avoient eû leur premier poste & fait quelque séjour comme les quatre suivantes, sans parler de la Germanique, qui ne tiroit pas ce nom proprement des Germains, mais de Germanicus. A cette Observation il faut ajouter qu'on croit connoître les noms de toutes les anciennes Légions Romaines, tant par Tacite, Dion & autres Historiens, que par une Inscription gravée sur une colomne qu'on voit à Rome dans le Capitole, & que rapporte Juste Lipse dans ses Notes sur Tacite: mais qu'on n'y trouve point cette Légion des Sicambres où Sicambrique, à moins que ce surnom, ce qui est fort peu vraisemblable, n'ait été donné pour quelque événement ignoré des Historiens, ou à la premiere *Auxiliaire* que Galba mit dans la basse Pannonie, ou à la seconde du même nom que Vespasien plaça aussi dans cette même Province, comme Dion le marque au 55e Livre de son Histoire Romaine. Quant à la seconde Question, qui regarde le tems où cette ville de Sicambrie fut bâtie, elle seroit facile à décider, si l'on veut ajouter foi à ce que dit Aventin au second Livre de ses Annales dans la vie de l'Empereur Alexandre Severe: „Que „la Vindélicie avoit alors pour Président M. Jules Philippe, natif de Rabe dans le Norique (aujourd'hui la basse Hongrie,) & qui parvint „depuis à l'Empire; que ce Préfet donna à la ville de Boiodurum, le „nom de *Bathavia Vindelicorum* (ou suivant Cluvier *Batava Castra*, au„jourd'hui Passau) soit à cause de sa situation au confluent de trois

„grandes rivieres, soit parce que cet endroit étoit une station mili-„taire occupée par les Bathaves, peuple d'Allemagne que les Romains „soudoyoient pour les opposer aux Germains: A quoi Aventin ajoute „qu'il y eut dans la Pannonie des Sycambres placés de même, d'où „vint le nom de Sycambrie à la ville qui est à présent Bude & Offen la „capitale de Hongrie; & qu'il avoit sur cela des autorités: *Itidem Sycambros in Pannonia collocatos esse, à quibus Sicambria dicta sit, quæ nunc Buda & Opha est, caput Ugrorum, habeo quos sequar.* Il ne parle point de l'Inscription trouvée à Bude; ce qui me fait juger qu'elle n'a été découverte que depuis son tems. Car je ne voudrois pas dire qu'elle est fausse. Mais, comme je suis persuadé qu'il n'y a jamais eu chez les Romains de Légion Sicambrique, ni encore moins une Légion de Sicambres, & que cependant le nom de Sicambres se trouve dans le récit d'Aventin de même que dans l'Inscription, j'entrevois que celle-ci est dégradée, qu'il y manque deux lignes; que celle qui passe pour la premiere n'étoit que la troisiéme, & que cette ligne étant visiblement plus courte que les autres, le premier mot est non seulement mutilé mais corrompu, de même que la derniere lettre de la ligne suivante. Car, premierement, on n'a pu ni dû faire une pareille Inscription sans y mettre le nom de l'Empereur & celui du Préfet de la Province. Secondement, le mot *Legio* ne convient point à l'égard d'une garnison de Sicambres. Troisiémement, est-il naturel qu'en parlant de cette prétendue Légion, on dise d'abord *ædificavit*, & ensuite *vocaverunt?* ce qui fait voir que si ce dernier se rapporte aux Sicambres qui ont donné leur nom à cette Ville, le premier se rapporte à un autre qui l'a bâtie? Ainsi, à supposer que l'époque donnée par Aventin soit juste, rétablissant dans l'Inscription ce qui manque, & changeant dans le mot *Legio* trois lettres en d'autres de forme approchante, savoir L en F, G en C, & I en T, & dans le mot *conlocata* l'A final en O, au moyen de ces legers changemens elle pourroit avoir été conçue de cette maniere:

IMP. C. M. AUR. SEV. ALEXAND.
AUG. CUR. M. JUL. PHILIPPO.
PRÆ*FECTO**. SICAMBRORUM.

* au lieu de LEGIO.

HIC.

HIC. PRÆSIDIO. CONLOCATO*.
CIVITATEM. ÆDIFICAVIT.
QUAM. EX. SUO. NOMINE.
SICAMBRIAM. VOCAVERUNT.

* au lieu de CONLOCATA.

C'eſt à dire,

L'Empereur Céſar Marc Aurele Severe Alexandre Auguſte, par les ſoins de Marc Jules Philippe Préfet, ayant ici placé une garniſon de Sicambres, bâtit une Cité, que de leur nom ils nommerent Sicambrie.

Néanmoins cette ville de Sicambrie ainſi bâtie dans la Pannonie prouve que le Comte de Nuenar a eu tort d'accuſer Hunibald de l'avoir tirée de ſon imagination, d'autant plus que celui-ci la connoiſſoit ſi peu, qu'il n'en a pas dit un mot dans toute ſon Hiſtoire, & qu'au contraire il marque fort clairement que les Sicambres ne prirent ce nom qu'à l'occaſion de celui de Cambra femme d'Antenor leur ſecond Roi en Allemagne, ce qui prouve qu'Hunibald n'avoit garde de dire ni de croire qu'avant d'y venir ils euſſent pu fonder dans la Scythie une ville de Sicambrie. Ainſi cette ville dont le Critique lui attribue l'invention, eſt une pure chimere qu'il s'eſt forgée lui-même pour la combattre.

X. PROPOSITION.

Nam eos parum admodum curo, qui ipſum ſecuti ſunt, nempe Gregorium Turonenſem Epiſcopum, & Rheginonem, atque Sigibertum Gallum.

Il dit „qu'il ne fait pas grand cas de ceux qui ont ſuivi Huni-„bald, tels que Grégoire de Tours, Réginon & Sigebert."

Quand on argumente ſur de faux principes, on ne ſauroit manquer d'être heurté dans ſon chemin par des autorités importunes, & de chercher à s'en défaire par le mépris, faute de meilleures raiſons. Mais

 je ſuis

je suis charmé pour l'honneur d'Hunibald, que le Comte de Nuenar avoue qu'il a été suivi par trois anciens Auteurs, & surtout par Grégoire de Tours; c'est une marque qu'il existoit avant celui-ci & dès le régne de Clovis; mais en même tems c'est une preuve qu'il n'a point été supposé; car pour composer d'imagination une Histoire aussi grave, aussi solide qu'est la sienne, sans la remplir de fables, d'aventures romanesques, de contes puérils, il falloit une trempe d'esprit toute autre qu'on ne l'avoit dans ce siécle d'ignorance & de barbarie. A l'égard de ce que le Comte de Nuenar dit que Grégoire de Tours a suivi Hunibald, il est très-vrai qu'il a une grande conformité avec lui en une infinité d'endroits que j'indiquerai dans ma conclusion. Mais, s'il l'a suivi, il l'a fait en plagiaire, ne le nommant jamais, & citant la tradition commune pour garant de ce qu'il emprunte de lui. C'est ainsi que parlant de l'Origine des Francs, il dit: *Tradunt enim multi eosdem de Pannonia fuisse digressos.* Cependant il lui rend justice en ne le citant point dans cette occasion, puisqu'il est vrai que l'Histoire d'Hunibald ne commençant que depuis l'établissement des Francs ou des Sicambres en Allemagne, tout ce qui étoit antérieur, comme leur origine de la Scythie ou de la Pannonie, ne le regardoit pas. Or quant à l'opinion suivie par Grégoire de Tours sur cette origine, il est à croire qu'elle venoit d'un malentendu. On savoit fort bien de son tems que les Sicambres avoient habité en Allemagne pendant plusieurs siécles avant que de s'établir dans les Gaules, mais on savoit aussi qu'il y avoit vers l'extrémité de la Pannonie, ou dans la Scythie, une ville que les Sicambres avoient fondée & à laquelle ils avoient donné le nom de Sicambrie. De sorte que ne pouvant s'imaginer qu'ils l'eussent bâtie depuis leur venue en Allemagne, on jugeoit qu'elle devoit être antérieure à ce tems-là, & que par conséquent ils en étoient sortis pour venir dans la Germanie; erreur qui provenoit, comme on voit, de ce qu'ils attribuoient à toute la Nation des Sicambres la fondation d'une ville qui n'avoit été faite que par une simple garnison de ce peuple attachée au service des Empereurs Romains. Mais, comme il s'ensuit de ce que je viens de dire que la Nation entiere n'avoit point eu de part à

cette

cette fondation, par cette raison il n'en étoit point parlé dans ses Annales au tems où elle étoit arrivée: & voilà aussi pourquoi Hunibald n'en dit rien dans la suite de son Histoire. Enfin Grégoire de Tours peut avoir eu tort d'adopter aveuglément une obscure tradition, vraie dans quelques circonstances & fausse dans le reste, comme le sont toutes les anciennes traditions. Mais le Comte de Nuenar n'avoit pas lieu d'en faire le moindre reproche à Hunibald, ni encore moins de regarder ce dernier comme un Auteur supposé, dès-lors qu'il reconnoissoit qu'il avoit été suivi par un Ecrivain aussi ancien qu'étoit Grégoire de Tours.

XI. PROPOSITION.

Mihi non probatur aliam esse Sicambriam, quàm illam celebrem Germaniæ Provinciam inter Busacteros parvos & Bructeros, Longobardosque, auctoribus Ptolemæo Cornelioque Tacito constitutam, ubi etiam Abbas Spanheimensis putat habitasse Francos. Et id ipsum mihi à ratione non videtur alienum, primò quòd vicini fuerint Gallis: cum illis enim perpetuò bella gessisse traduntur, quemadmodum & ipsorum testantur Annales. At quî poterant semper bella gerere nisi cum vicinis, utpote quos tantùm Rhenus fluvius separaret? Ab altèra enim parte vel Batavi, vel Eburones, vel Menapii, vel Ubii erant, quos omnes vicisse Francos constat priusquàm in Celticum & Lugdunensem moverent.

Il dit „n'avoir aucune preuve qu'il y ait eu d'autre Sicambrie „que la Province d'Allemagne située, suivant Ptolemée & Tacite, en„tre les petits Busacteres, les Bructeres & les Longobards ou Lom„bards; que Tritheme le pense aussi, & même que cela paroît par „les guerres que les Sicambres avoient sans cesse, suivant leurs Annales, „avec les Gaulois dont ils n'étoient séparés que par le Rhin, ayant „d'un autre côté les Bataves, les Eburons, les Ménapiens & les Ubiens „qu'ils assujettirent avant que d'aller occuper les Gaules.“

Sur

Sur ce récit du Comte de Nuenar on croiroit que Ptolemée & Tacite ont effectivement donné le nom de Sicambrie à ce pays d'Allemagne occupé par les Sicambres; mais il n'en est rien. Le premier se contente de les mettre dans la grande Germanie, les nommant après les petits Busacteres, avant les Sueves Longobards, & ne fait aucune mention en cet endroit des Bructeres ni de la prétendue Sicambrie. Le second parle des Sicambres en deux endroits de ses Annales, aux Liv. II & XII. Dans l'un, Tibere écrivant à Germanicus se glorifie d'avoir engagé les Sicambres, plus par sa prudence que par la force de ses armes, à se rendre à Auguste. Dans l'autre, Claude disoit que l'Angleterre ne seroit paisible que quand on en auroit entiérement chassé les Silures, comme on avoit fait de l'Allemagne les Sicambres, qui avoient été transportés dans la Gaule au-delà du Rhin. Supposant que ce qui est dit dans ces deux Passages seroit vrai, je demande si l'on y trouve, non plus que dans Ptolemée, le moindre mot qui fasse connoître, qu'il n'y avoit d'autre Sicambrie, que la Province d'Allemagne occupée par les Sicambres. Il est surprenant qu'un Critique tel que le Comte de Nuenar, ait été capable de tomber dans de pareilles méprises; il y a apparence qu'il ne lisoit que par les yeux d'autrui. Quant à Tritheme & à Hunibald dont il allegue ensuite l'autorité pour confirmer son opinion, on ne peut que lui savoir gré de la justice qu'il leur rend. En effet il paroît que cette ville de Sicambrie d'où les Francs étoient venus, ne leur étoit pas plus connue qu'à lui. Du moins Hunibald, comme je l'ai déja dit, n'en fait aucune mention; & à l'égard de Tritheme, on peut voir ce qu'il en pensoit par ce passage qu'on lit dans l'avant-propos de son premier Abrégé, page 2. *Scio multos de origine Francorum & variè & diversa scripsisse, quorum nonnulli gentem contendunt indigenam, cæteri verò nescio de qua Sicambrorum urbe adventitiam.* Il faut convenir aussi que le Comte de Nuenar ne les traite pas avec moins d'équité l'un & l'autre, en disant qu'ils sont favorables à son sentiment sur l'habitation des Francs ou des Sicambres au voisinage des Gaules; puisque l'Histoire d'Hunibald abrégée par Tritheme ne contient presque autre chose que les Guerres des Francs

avec

avec les Gaulois. Quel étoit donc l'aveuglement ou l'obstination du Comte de Nuenar, de vouloir à toute force argumenter contre notre Historien, lors même qu'il se trouvoit d'accord avec lui!

XII. PROPOSITION.

Jam de Sicambris constat, quanto in Gallos odio flagraverit semper ea gens, adeò ut Octavianus claudere Jani portas non posset, nisi priùs traductis in citeriorem Rheni ripam aliquot Sicambrorum millibus, auctor est Suetonius Tranquillus.

Il dit „que la haine des Sicambres contre les Gaulois étoit si „grande & si constante, qu'Octavien ne put fermer le Temple de Ja- „nus, qu'après avoir transféré quelques mille des premiers sur la rive „citérieure du Rhin, comme le marque Suétone."

Quelle métamorphose dans le Comte de Nuenar! Il devient ouvertement l'Apologiste d'Hunibald; car enfin c'est pour confirmer les récits qu'a faits celui-ci, des guerres continuelles des Sicambres ou des Francs, que le Critique veut donner des preuves de leur haine contre les Gaulois. Mais je ne sai si ces preuves sont bien concluantes, & si elles font honneur à son érudition. La premiere fois qu'Octave ferma le Temple de Janus, ce fut après la Bataille d'Actium. Cette Bataille se donna au mois de Septembre de l'an 31. avant notre Ere Chrétienne; & le Décret pour fermer le Temple fut porté l'année suivante par l'Orateur Cicéron, substitué Consul. Mais tant s'en faut qu'Octave eût alors prescrit des Loix aux Sicambres, que c'étoit précisément en ce tems-là qu'ils étoient devenus plus puissans que jamais, au moyen d'un Traité d'alliance & de confraternité qu'ils avoient conclu neuf ans auparavant avec trois autres Nations d'Allemagne, suivant Hunibald, dont je traduirai ici les paroles. „Le Roi Franck fit la premiere année „de son régne une confédération perpétuelle avec les Germains, les „Saxons & les Doringois ou Turingiens, du consentement de tous „les Ducs & Grands des Sicambres, ratifiant cette union, suivant l'an-

„cienne coûtume de la Nation, sur des tables d'argent, & y statuant „pour conditions, *que les quatre Peuples, sous différens Rois & Prin-„ces, comme freres germains, seroient censés à l'avenir ne faire qu'un „seul Peuple & resteroient tels à perpétuité; en conséquence de quoi la „guerre qui seroit déclarée à l'un d'eux, de quelque part que ce fût, re-„garderoit tous les quatre, qui la soutiendroient avec leurs forces unies „& à frais communs.* Les Romains, continue l'Historien, alarmés „de cette confédération, engagerent les Goths ennemis des Germains „à s'avancer sur les frontieres des Saxons, ce que ceux-là firent la „troisiéme année du régne de Franck, & s'y maintinrent pendant près „de dix ans, espérant de gagner du terrain peu à peu, & de pénétrer „dans le centre de l'Allemagne. Pendant ce tems-là, le Roi Franck „étoit souvent aux prises avec les Gaulois, vengeoit durement sur eux „la mort de son pere & leur tuoit bien des milliers d'hommes. Mais „enfin les Goths s'étendant tous les jours de plus en plus, les Saxons „& les Teutons dans cette nécessité résolurent de leur faire la guerre. „Ayant appellé à leur secours, aux termes de leur Traité, les Sicam-„bres & les Turingiens, tous ensemble formerent une armée de 230 „mille hommes, à laquelle les Goths & leurs alliés opposerent de leur „côte une multitude presque innombrable de combattans. Les deux „partis en vinrent aux mains dans un lieu appellé *Colmas*, & il y eut „beaucoup de sang répandu dans l'action, qui dura depuis le matin „jusqu'à la nuit, sans que la Victoire se déclarât pour l'un ni pour l'au-„tre. Le jour suivant, les Germains diviserent leur armée en trois „corps, chacun ayant son chef. Les Sicambres combattant vaillam-„ment sous leur Roi Franck, avoient pris pour cri de guerre ou de „ralliement, son nom qu'ils répétoient à tout moment, criant, *hie* „*Franck*, *hie Franck*. Enfin les Goths furent vaincus, laissant sur le „champ de bataille plus de 80 mille hommes; & le reste avec les en-„fans & les femmes prenant la fuite regagnerent leur premiere demeu-„re. Ainsi les Saxons, avec le secours des Francs (car les Sicambres „prirent alors ce nom) & des Turingiens, recouvrérent leurs frontie-„res occupées & ravagées pendant dix ans par des étrangers." Or

dans

dans ce degré de puissance où les Sicambres étoient depuis treize ans, je laisse à juger si c'étoit à l'occasion de leur abaissement qu'Octave eût fermé le Temple de Janus six ans auparavant, l'an 30 avant J. C. Voyons donc si ce fut dans la suite. Octave, nommé Auguste par le Sénat l'an 27 avant J. C. ferma pour la seconde fois le Temple sous son neuviéme Consulat avec M. Julius Silanus, l'an 729 de Rome, selon Dion Liv. 53, ce qui revient à l'an 25. avant J. C. Il est vrai que vers le même tems M. Vinicius avoit tiré vengeance de certains Germains qui avoient coupé la tête à des marchands Romains, suivant le même Dion; ou pour parler avec Hunibald, les Gaulois joints aux Romains, profitant de l'éloignement du Roi & de l'armée des Sicambres qui étoient allé secourir les Saxons contre les Goths de la Scandie, vinrent piller ses terres. Mais comme aucun des deux Historiens ne dit qu'en cette occasion les Romains ayent transporté quelques milliers de Sicambres de l'autre côté du Rhin, ce qui fut, suivant le Comte de Nuenar, la raison pour laquelle le Temple de Janus fut fermé; il s'ensuit ou que cette raison aura donné lieu de le fermer une troisiéme fois, ou que le critique s'est trompé. Dion rapporte à la fin de son 54e Livre, que sous le Consulat de Julius & de Fabius Maximus, qui fut l'an 744 de Rome, le 10e avant J. C. il fut décreté que le Temple de Janus seroit fermé, & que ce qui y mit obstacle fut que les Daces passerent l'Ister ou le Danube sur la glace & vinrent piller la Pannonie; que les Dalmates se révolterent aussi à cause d'un tribut qu'on exigeoit d'eux; que Tibere étant parti de la Gaule, dont Auguste l'avoit fait Gouverneur, appaisa ces mouvemens; que d'un autre côté Drusus châtia en partie & en partie soumit non seulement les Chattes, qui avoient abandonné les terres que les Romains leur avoient assignées, & qui s'étoient joints aux Sicambres, mais aussi d'autres Germains: après quoi Tibere & Drusus allerent trouver Auguste, qui s'étoit avancé dans la Gaule Lionnoise pour y attendre l'événement de la guerre Germanique: *Decretum quoque est ut Jani Gemini templum, quod bellis quæ dixi, exortis apertum fuerat, iis jam compositis clauderetur: verum id ne fieret, Daci obstitere*, &c. Ainsi le Temple de Janus ne fut point fermé cette

année-là, & même ce ne furent pas les Sicambres, mais les Daces qui y mirent obstacle. Enfin il fut fermé pour la troisiéme & derniere fois sous Auguste, l'an de la Nativité de J. C., suivant Paul Orose dont je traduirai les paroles: „L'an de la fondation de Rome 752, César Auguste ayant donné la paix à toutes les Nations, de l'Orient à „l'Occident, du Septentrion au Midi, & dans toute l'enceinte de l'O„céan, ferma alors les portes de Janus pour la troisiéme fois. Elles „eurent tout le tems de se rouiller pendant un calme de près de douze „ans; car on ne les rouvrit que sur la fin de la vie d'Auguste, à l'oc„casion d'une révolte des Athéniens & d'un mouvement des Daces. „Après avoir donc fermé les portes de Janus, desirant de nourrir & „amplifier dans la paix la République qu'il avoit acquise par les armes, „il fit diverses Loix pour établir parmi les hommes une discipline qui „ne se sentît point de la servitude; sachant qu'il étoit homme lui-mê„me, il ne souffrit jamais qu'on lui donnât le titre de Seigneur ou de „Maître. En ce tems donc, c'est à dire l'année que César établit par „une direction de la Providence, une très-ferme & très-véritable „paix, nâquit le Christ, &c. On a cru longtems, comme Orose, que le Sauveur étoit né l'an 752 de la fondation de Rome, ce qui tomboit en la derniere année avant l'Ere Chrétienne, suivant la supputation des Marbres du Capitole. Mais on a reconnu depuis, qu'il est né quatre ans avant la même Ere, l'an 750 de Rome, suivant la supputation de Varron. Cette année-là donc le Temple de Janus fut fermé, & ce dut être, suivant le Comte de Nuenar, parce qu'Auguste avoit transporté de l'autre côté du Rhin dans la Gaule quelques milliers de Sicambres, comme le marque Suétone. Cet Auteur vivoit sous Adrien, cent ans après la mort d'Auguste; on connoît ses Vies des XII. Césars pour un ouvrage plein de choses, mais où les faits indiqués plutôt que narrés, sont entiérement destitués de Chronologie, & si confus qu'on ne les peut ranger dans l'histoire qu'autant qu'ils se trouvent confirmés par d'autres Historiens. Suétone dit au chap. 21. de la Vie d'Auguste, en parlant de cet Empereur: „Il dompta, en partie par lui-même & „en partie sous ses auspices, la Cantabrie, l'Aquitaine, la Pannonie,

„la

„la Dalmatie avec toute l'Illyrie, de même que la Rhétie & les Vindé-„liques, & les Salasses peuples des Alpes: il réprima les incursions „des Daces, ayant taillé en pieces trois de leurs Ducs avec quantité de „leurs Troupes: & il éloigna au-delà de l'Elbe les Germains, du nom-„bre desquels les Sueves & les Sicambres s'étant rendus, furent par lui „transférés dans la Gaule & placés dans les campagnes voisines du „Rhin: *Germanosque ultra Albim fluvium summovit, ex quibus Suevos & Sicambros dedentes se traduxit in Galliam, atque in proximis Rheno agris collocavit.* Le même Suétone, dans la Vie de Tibere, chap. 9. attribue à celui-ci l'honneur de presque tous ces exploits, lorsqu'il dit: *Exhinc Rheticum, Vindelicumque bellum, indè Pannonicum, indè Germanicum gessit. Rhetico atque Vindelico gentes Alpinas, Pannonico Breucos & Dalmatas subegit. Germanico XL. millia dedititiorum trajecit in Galliam, juxtàque ripam Rheni sedibus assignatis collocavit: quas ob res, & ovans & curru urbem ingressus est primus, ut quidam putant, triumphalibus ornamentis honoratus, novo nec antea cuiquam tributo genere honoris,* &c. Or en conciliant ces deux Passages de Suétone, il en résulte que Tibere sous Auguste fit passer de l'Allemagne dans la Gaule 40 mille tant Sueves que Sicambres qu'il établit près du Rhin. Si cela est, le Comte de Nuenar a eu trop de retenue en ne parlant après lui que de quelques milliers de Sicambres, *aliquot Sicambrorum millibus.* Et il en faut dire autant de Suétone lui-même en comparaison d'Eutrope, qui 240 ans après lui a fait monter à 400 mille le nombre des prisonniers Allemans transférés sur le Rhin. Voici ses paroles au septiéme Livre de son Abrégé, en parlant d'Auguste: *Germanorum ingentes copias cecidit; ipsos quoque trans Albim fluvium submovit, qui in Barbarico longè ultra Rhenum est: hoc tamen bellum per Drusum privignum suum administravit: (sicut per privignum Tiberium alterum, Pannonicum;) quo bello CCCC millia captivorum ex Germania transtulit, & super ripam Rheni in Gallia collocavit.* Mais il est visible que ces 400 mille prisonniers, au lieu de quarante mille, proviennent de l'erreur d'un copiste qui a pris *quadraginta* pour *quadringenta;* & je m'étonne que ni J. Lipse qui rapporte la fin de ce Passage

dans

dans ſes Notes ſur Tacite, ni Tanaquil le Fevre l'Editeur d'Eutrope, n'ayent pas relevé cette erreur palpable. Cependant on voit par ce même Paſſage que la translation de ces priſonniers Allemans fut faite, non par Tibere comme dit Suétone, mais par Druſus, ce qui prouve déjà que cet Auteur s'eſt trompé ſur ce point. En effet, L. Annæus Florus, contemporain de Suétone, & Tite-Live plus ancien que lui, font en cela d'accord avec Eutrope. Florus dit: „Il auroit été à ſouhaiter „qu'Auguſte n'eût pas eu tant de paſſion de vaincre auſſi la Germanie: „il eut plus de honte à la perdre que de gloire à l'acquérir: mais ſachant que ſon pere Céſar y avoit porté la guerre, en jettant deux „fois un pont ſur le Rhin, il eut envie d'en faire en ſon honneur une „Province. Et cela étoit fait, ſi les Barbares avoient pu ſupporter „nos vices, auſſi bien que notre domination. Druſus, envoyé dans „cette Province, dompta d'abord les Uſipetes, enſuite fit une incurſion chez les Tencthéres & chez les Cattes: car il éleva un trophée „des dépouilles des Marcomans. Delà il fut attaquer de puiſſantes „Nations, les Chéruſques, les Sueves & les Sicambres; leſquels „ayant brulé vingt Centurions avoient, par cette eſpece d'engagement „ſacré, commencé la guerre avec une eſpérance de vaincre ſi certaine, „qu'ils s'étoient partagé d'avance le butin qu'ils feroient, les chevaux „aux Chéruſques, l'or & l'argent aux Sueves, & les priſonniers aux „Sicambres: mais il arriva tout le contraire. Car Druſus devenu vainqueur & maître de leurs chevaux, de leurs beſtiaux, de leurs chaînes „d'or & de leurs perſonnes même, en fit le partage & les vendit. De „plus, pour défendre ces Provinces, il établit des garniſons tout le „long de la Meuſe, de l'Elbe, du Veſer: & pour ce qui eſt du Rhin, „il le borda de plus de cinquante châteaux. Il fit des ponts à Bonn & „à Geſonie, & y mit des flottes pour les défendre. Il ouvrit de grands „chemins dans la forêt d'Hercynie qui avoit été juſqu'alors inacceſſible „& impénétrable. Enfin la Germanie étoit ſi bien pacifiée, que tout „y paroiſſoit changé, les hommes, la terre & juſqu'au ciel même qui „étoit devenu plus doux & plus agréable qu'auparavant.“ A l'égard de Tite-Live, on voit par les Epitomes de J. Florus, autre que celui

dont

dont je viens de parler, que cet Historien avoit écrit toutes les Expéditions de Drusus dans les quatre derniers Livres de sa XIVe Décade qui est perdue comme beaucoup d'autres parties de son Histoire; que dans le VIIe Livre il parloit des villes de Germanie que Drusus avoit prises tant en deçà qu'au delà du Rhin, dans le VIIIe des Chérusques, des Tenchateres, des Cauces & autres Peuples Germains qu'il avoit soumis au delà du Rhin, dans le IXe d'une guerre qu'il avoit faite aux Nations établies au delà du Rhin: comme aussi des victoires de (Tibére) Néron frere de Drusus sur les Dalmates & les Pannoniens; & enfin dans le Xe de la derniere guerre que Drusus avoit faite aux villes des Germains situées au delà du Rhin, & dans laquelle étant tombé de cheval il se cassa la cuisse & mourut le 30e jour de sa blessûre, en l'année 745 de Rome, cinq ans avant la naissance de J. C. D'où il résulte que si en ce tems-là les Chérusques, les Sueves & les Sicambres au nombre de 40 mille suivant Suétone, avoient été transportés de l'autre côté du Rhin dans la Gaule selon lui & Eutrope, ou vendus suivant Florus, le Comte de Nuenar a eu tort de regarder ce prétendu événement comme l'unique motif & la circonstance décisive qui fit fermer le Temple de Janus, puisqu'il ne fut fermé que cinq ans après la mort de Drusus; & que c'est aussi très-mal à propos que Suétone a dérobé l'honneur de cet exploit à Drusus, pour le donner à Tibére, qui n'y avoit eu aucune part, ayant borné les siens à la Dalmatie & à la Pannonie. Mais il reste à savoir si c'est avec plus de vérité, que ces 40 mille tant Sueves que Sicambres furent exportés suivant le même Suétone, ou qu'eux & les Chérusques furent vendus selon Florus. Premiérement, conçoit-on que 40 mille personnes ayent pu trouver aisément à se placer dans une Province aussi peuplée que devoit être alors le bord du Rhin du côté des Gaules? Secondement, étoit-ce le moyen d'y avoir la paix que de mêler les Sicambres avec les Gaulois, étant mortellement ennemis les uns des autres, comme le dit le Comte de Nuenar? Troisiémement, J. Florus dans l'Epitome de T. Live parle bien des Guerres de Drusus chez les Chérusques & autres peuples Germains, & même de leur soumission, mais non de leur vente ni exportation. Quatriéme-

ment, Tibére écrivant à Germanicus, dans Tacite au Liv. II. de ſes Annales, n'en dit rien non plus quoiqu'il parle de la reddition des Sicambres & de la paix faite avec les Sueves: *Sic Sugambros in deditionem acceptos, ſic Suevos regemque Maroboduum pace obſtrictum.* Il eſt vrai que le même Tacite au XIIe Livre de ſes Annales fait dire à Claude, après Caligula ſucceſſeur de Tibére: *Ut quondam Sugambri exciſi & in Gallias trajecti forent:* mais il y a apparence que ce trait d'Hiſtoire eſt de la façon de l'Hiſtorien qui l'a prêté à l'imbécille Claude, abuſé qu'il étoit, comme Eutrope, par l'autorité de Suétone. Cinquiémement, Vellejus Paterculus ne parle non plus ni de vente, ni d'exportation, quoiqu'il diſe que la Germanie fut domptée au point d'être devenue preſque une Province tributaire: *Sic perdomuit eam ut in formam penè ſtipendiariæ redigeret Provinciæ.* Sixiémement, ſi les Sicambres avoient été vendus ou tranſportés, ſoit par Druſus ſoit par Tibére, on ne les retrouveroit plus dans la Germanie, non-ſeulement deux cens ans après ces Princes, du tems de Ptolémée qui les y place dans leur ancienne demeure le long du bord oriental du Rhin, mais même du tems de Faramond & de Clodion qui paſſerent ce fleuve pour s'emparer des Gaules. Mais voici ce qui peut avoir donné matiere aux exagérations des Hiſtoriens Romains, toujours outrés dans les récits de leurs avantages ſur les Peuples qu'ils appelloient Barbares, & pour la plupart très-peu inſtruits de ce qui ſe paſſoit en Allemagne. Dion Caſſius, Ecrivain Grec, moins partial & ſouvent plus exact que tous les Latins, rapporte au Liv. 55. de ſon Hiſtoire Romaine, qu'un an après la mort de Druſus, „Auguſte reſtant à Rome envoya Tibére „en Allemagne pour y faire la guerre. Tibére ayant paſſé le Rhin, „tous les Barbares, à l'exception des Sigambres (*), lui envoyerent des „Ambaſſadeurs pour lui demander la paix. Ce qu'ils ne purent obtenir, „parce qu'Auguſte ne vouloit point l'accorder, à moins que les Sigam-„bres

(*) NB. Le texte Grec porte Καντάβρων, mais J. Lipſe a montré dans ſes *Antiq. Lectioni. Lib. I. Cap. VI.* qu'il faut lire Σιγαμβρῶν, les Cantabres étant un peuple d'Eſpagne, & non de la Germanie dont il s'agit ici.

„bres ne fissent cause commune avec eux, mais qu'ensuite lorsque les „Sigambres eurent aussi envoyé leurs députés, qui étoient en grand „nombre & des plus distingués de la Nation, Auguste les ayant fait „arrêter & dispersés dans certaines villes, ils en eurent tant de regret „qu'ils se donnerent la mort: ainsi la paix ne se fit point, d'autant que „les Sigambres qui avoient suspendu leurs hostilités dans l'espérance „qu'elle se feroit, prirent alors les armes & déchargerent sur les Ro„mains le ressentiment de leur douleur. Auguste pendant ce tems-là „fit une distribution d'argent aux soldats, non pour cause de victoire, „quoiqu'il eût reçu le titre d'*Imperator* & qu'il l'eût donné à Tibére, „mais par rapport à ce que Cajus qui étoit avec eux, faisoit ses pre„mieres armes. En même tems, donnant à Tibére, à la place de Dru„sus, les fonctions aussi bien que le titre de Général, il le fit Consul, „voulut qu'il écrivît au Sénat, suivant l'ancienne coûtume, pour de„mander l'honneur des actions de graces publiques, & lui accorda le „triomphe, Auguste ne s'en souciant pas pour lui-même, & aimant „mieux que son jour de naissance fût solennisé par des Jeux, &c. Voilà donc ce superbe exploit de Drusus ou de Tibére contre les Sicambres, réduit à un enlevement de leurs Ambassadeurs, fait contre le droit des gens & au mépris de la foi publique. Il ne faut plus s'étonner si les Historiens Latins ont cherché à déguiser une action aussi indigne. Mais enfin nous venons de quitter les Sicambres les armes à la main quatre ans avant la naissance de J. C. & bien résolus de se faire justice de cette trahison. L'Historien nous a même prévenu d'avance, qu'ils déchargerent sur les Romains le ressentiment de leur douleur: *postmodò affatim à Romanis vindictam sui doloris repetierunt*. Ainsi Tibére n'a point de tems à perdre pour terminer cette guerre, si Auguste ne doit fermer le Temple de Janus, qu'après qu'elle sera terminée. L'année suivante, au rapport de Dion, toute la Germanie étant en mouvement, Tibére partit de Rome pour y venir faire la guerre, mais il n'y fit rien: *Eo anno in Germania nihil memorabile actum*. L'année d'après, Auguste donna à Tibére pour cinq ans l'autorité de Tribun, & lui assigna l'Arménie qui s'étoit révoltée. Il se rendit à Rhodes, & ne re-

vint à Rome qu'au bout de sept ans, pendant lesquels l'Historien cesse de parler des affaires d'Allemagne; non que les Germains & les Sicambres en particulier fussent devenus plus amis des Romains, ni qu'Auguste eût fait la paix avec eux, mais c'est que cet Empereur, vieux & rebuté du travail dont il étoit accablé depuis la mort de Mécénas, cherchoit à en alléger le poids, en dissimulant les injures dont la punition auroit trop pris sur son repos. Ainsi qu'on juge à présent, si le Comte de Nuenar a eu raison de dire qu'Auguste ne put fermer le Temple de Janus, qu'après avoir transporté quelques milliers de Sicambres dans la Gaule. Au reste, si l'on en croit Isidore, ces peuples transplantés furent les Burgundions ou Bourguignons, au nombre de 80 mille: mais, quels qu'ils ayent été, il est sûr que ce n'étoit point des Sicambres. Aussi ne voit-on rien de pareil à cet événement dans Hunibald, & c'est ce qui doit donner un nouveau degré de créance à son Histoire, en ce que l'ayant faite, non sur les Historiens Romains, mais sur les Annales de sa Nation, plus ils differe de ceux-là dans leurs exagérations, moins il doit paroître s'écarter de la vérité. Peut-être sera-t-on curieux de savoir de quelle maniere il parle de ces mêmes guerres des Romains contre les Sicambres. „L'an 13 ou 14 avant J. „C. suivant la supputation de Trithéme, le Roi Franck, dit-il, ayant „envoyé son fils Clogion avec une grosse armée au secours des Saxons „& des Turingiens attaqués par les Romains, ceux-ci furent défaits „& mis en fuite après avoir perdu beaucoup des leurs. L'an 9. Franck „étant mort accablé de travaux & de vieillesse, le brave Clogion son fils „lui succéda. L'an 5. les Romains firent une nouvelle expédition „dans la Germanie, les Rois confédérés marchant hardiment contre „eux, ne cesserent de les combattre qu'après les avoir contraints de „reculer & de prendre la fuite. De sorte que Clogion Roi des Francs, „qu'on n'appelloit encore alors que Germains, étant venu aux prises „avec Tibére le Romain, combattit très-fortement pour sa Nation, & „enfin après beaucoup de perte des deux côtés, les Romains se retire-„rent sans avoir remporté la victoire.“ Je n'ai rien à ajouter à ce récit: sa simplicité en fait l'éloge.

XIII.

XIII. PROPOSITION.

Taceo nunc quod de Francis Hunibaldus scripsit, comâ usos capillitiique magnam habuisse curam: ideòque devictis Gallis in signum servitutis comam totondisse, ut victores à victis eò faciliùs dignoscerentur. Hæc etiam Sicambris optimè quadrant, de quibus initio Epigrammatum Martialis:

Crinibus in nodum tortis venere Sicambri.

Et calamistro ad ornandam comam usos nonnulli Romani scriptores tradiderunt: nullæ enim aliæ Germaniæ gentes sic à coma prædicantur, ut Suevi & Sicambri.

Il dit „qu'à l'égard de ce qu'Hunibald a écrit des François, savoir qu'ils portoient leurs cheveux, qu'ils en avoient grand soin, & „qu'ayant subjugué les Gaulois ils les obligerent à mettre bas les leurs „en signe de servitude, afin qu'on distinguât sans peine les vainqueurs „des vaincus; cela convient encore parfaitement aux Sicambres, qui „tressoient leurs cheveux suivant Martial, & qui les frisoient même au „rapport de plusieurs Auteurs Romains, joint à ce que de toutes les „Nations d'Allemagne il n'y a qu'eux & les Sueves qui se soient fait „distinguer par leur chevelure.“

Il est évident que cette Proposition ne contient qu'un aveu favorable à Hunibald. Ainsi le Critique continuant à justifier l'Auteur qu'il décrioit auparavant, se bat lui-même de ses propres armes, & nous confirme d'autant plus dans l'opinion avantageuse que nous avions déja de notre Historien.

XIV. PROPOSITION.

Porrò, quòd postea nomen mutaverint, id aliquo eventu factum esse potest, ut quotidie fieri videmus. Qui enim nunc Leodienses, olim Eburones fuerunt, Colonienses Ubii. Sic Austria nunc appellatur, quæ olim Pannoniæ pars erat: Sic Alsatia dicitur, quæ olim Alemannia. . . . . Westfalia nunc dicitur quæ Saxonia olim fuit.

Quæ breviter in Medium attulisse sufficiat, ut nulli mirum videatur, si mutato nomine qui ante Sicambri dicebantur, postea Franci appellari potuerint. Sive enim Franci à Rege eorum Francone (ut auctor est Hunibaldus) sive à libertate, quod Gregorius Turonensis & Sigibertus putant, non multum ad rem nostram facit.

Il dit „qu'il est très-possible que les Sicambres ayent quitté ce „nom pour prendre celui de Francs ou de François, soit à cause de „leur Roi Francon suivant Hunibald, soit pour marque de leur liberté „comme le pensent Grégoire de Tours & Sigebert, ou par quelque „autre événement: ces changemens de nom ayant été assez ordinaires „chez d'autres Peuples, tels par exemple, que les Liégeois qu'on ap„pelloit auparavant Eburons, ceux de Cologne Ubiens, l'Autriche „Pannonie, l'Alsace Alemagne, la Westfalie Saxe, &c."

Cet aveu est encor comme le précédent, entiérement à l'avantage d'Hunibald. Mais je ne sai où le Comte de Nuenar a été prendre qu'Hunibald ait parlé d'un Roi des Sicambres appellé *Francon*. Dans les deux Abrégés de Trithéme ce Roi n'a d'autre nom que celui de *Francus* en Latin & de *Franck* en Allemand, qui s'écrivoit sans doute originairement par un V. *Vranck*, comme l'écrivent encore les Hollandois & autres bas Allemans d'aujourd'hui. Or l'on ne sauroit disconvenir que de *Vranck* ou *Franck* Roi, à *Francs* ou *François* Peuple, il n'y a pas plus loin que d'Assur à Assyriens, de Dardanus à Dardaniens, de Medus à Medes, de Remus ou Romulus à Romains; toutes ces Nations, & une infinité d'autres qu'il seroit trop long de nommer ayant pris leur nom du premier de leurs Rois. Il est vrai que suivant Hunibald Franck ne fut que le dix-septiéme Roi des Sicambres: mais il n'étoit pas plus étrange qu'ils prissent le nom de ce dix-septiéme Roi qu'il l'avoit été aux Sicyoniens de prendre celui de Sicyon qui ne fut que leur 10ᵉ Roi; aux Argiens celui d'Argos leur 3ᵉ Roi; aux Lacédémoniens celui de Lacédémon leur 4ᵉ Roi; aux Troyens celui de Tros leur 5ᵉ Roi; aux Latins celui de Latinus aussi leur 5ᵉ Roi; & à plusieurs autres Peuples qui paroissent dans l'Histoire sous des noms tirés

tirés non de leur premier Roi mais d'un des suivans devenu plus illustre ou plus cher à la Nation que tous ses prédécesseurs. D'ailleurs ces Peuples ne laissoient pas de conserver leur nom national, comme on le voit dans les Argiens qui s'appelloient en même tems Pélâgiens, les Lacédémoniens Spartiates, les Troyens Phrygiens, &c. de même aussi les Francs conserverent le nom de Sicambres, ce qu'on prouve, indépendamment du Passage d'Hunibald; 1°. par ces paroles que St. Remi Evêque de Reims dit à Clovis sur le point de le baptiser, *Mitis depone colla Sicamber: adora quod incendisti, incende quod adorasti:* paroles que rapporte Grégoire de Tours au Liv. II. chap. 31, de son Histoire; 2°. par ces deux vers de Claudien: *Ante Ducem nostrum flavam sparsere Sicambri cæsariem, pavidoque orantes murmure Franci procubuere solo;* 3°. par ceux-ci de Sidoine Apollinaire: *Francorum penitissimas paludes intrares venerantibus Sicambris;* 4°. & par ces autres tirés de Venance Fortunat, dans lesquels il loue Charibert Roi des François de ce qu'étant un Sicambre né d'une famille illustre, il ne laissoit pas de parler bien Latin: *Cum sis progenitus clara de stirpe Sicamber, floret in eloquio lingua Latina tuo.* Le nom du Roi Franck devint d'abord un cri de guerre que les Sicambres employerent suivant Hunibald, dans la grande bataille qu'ils gagnerent à Conmaz sur les Goths comme je l'ai rapporté quelques pages plus haut d'après Hunibald. „Dès ce moment, continue-t-il, les Sicambres „quittant leur ancien nom commencerent, pour l'amour de leur Roi, „à s'appeller Francs. Car, comme témoigne Hunibald, non seule„ment les Grands, mais aussi tous les gens de guerre & le peuple en„tier de toute la Nation, prirent tant de plaisir à ce nouveau nom, „qu'ils prierent le Roi d'ordonner par un Edit public, qu'ils ne s'ap„pelleroient plus à l'avenir les Sicambres mais les Francs: ce que le „Roi fit d'autant plus volontiers, qu'il désiroit passionnément d'im„mortaliser son nom. Ils furent donc appellés Francs, au lieu qu'au„paravant les uns leur donnoient le nom de Sicambres, & les autres „celui de Germains à cause de leur confédération. Ils se glorifioient „si fort de ce nouveau surnom, que pendant longtems chaque fois

„qu'ils

„qu'ils se rencontroient, ils se saluoient en disant: *Ein guten tag* „*fryer Franck*. Cependant ce ne fut pas tout d'un coup, mais par la „suite du tems, que ce nom prit assez de faveur pour que les autres „Nations le leur donnassent. Car il fut très-odieux surtout aux Ro„mains & aux Gaulois. C'est pourquoi leurs Ecrivains les désignent „plus souvent par le nom de Germains que par ceux ou de Sicambres „ou de Francs. La 13e annnée donc du régne de Franck, les Sicam„bres changerent leur nom en un nouveau, quoiqu'on les trouve & „avant & après, fréquemment nommés dans les Auteurs, Germains „ou Sicambres. Car encore que le nom de Francs ait été retenu, por„té & écrit en toute occasion par les Sicambres dès le tems de leur Roi „Franck, il ne passa point en usage chez les Nations étrangeres, sur„tout chez les nations ennemies: aussi est-il certain que les Historiens „qui florissoient chez les Romains, les Gaulois & autres Peuples, au „tems du changement de nom & depuis, ont moins employé ce nom „que celui de Germains, soit par ignorance ou parce qu'ils le détes„toient; & il est sûr aussi que les Romains connurent le nom des „Francs non par des écrits mais par les armes, non par amour mais „par crainte. . . . “ Témoin l'occasion où l'Empereur Valentinien apprenant le refus qu'ils faisoient de lui payer le tribut, avec protestation de périr tous les armes à la main plutôt que de perdre leur liberté, dit, comme le témoigne encore Hunibald: *Franc, Franc, durus es populus & à ferocitate potius quam à libertate nominandus*. C'est ainsi, pour revenir au nom des Francs, qu'Hunibald en a rapporté l'origine & l'institution, qui est assûrément aussi vraisemblable que toutes celles de tant d'autres noms de peuples, empruntés de leurs Rois. Au reste dans la guerre Marsique que le Peuple Romain avoit contre ses Alliés l'an 89 avant notre Ere, les Marses qui donnerent leur nom à cette guerre, avoient un Chef ou Général nommé *Francus* qui fut tué cette année-là, dans une bataille avec 18 mille des siens. C'est Paul Orose qui le dit formellement au Liv. V. Chap. 18. de son Histoire: *Decem & octo millia Marsorum in ea pugna cum* FRANCO *Imperatore suo caesa sunt*. Ce nom étant dès-lors un nom propre, n'a-t-il pas pu être 48 ans

après celui d'un Roi des Sicambres? Après tout, ce n'est pas que le mot de *Franc* ait signifié originairement la même chose que *Fryer* ou *Frey* en Allemand, & *Libre* en François, ni qu'il ait été tiré du Grec comme l'ont prétendu divers Savans; mais parce que ce nom propre devint celui d'une Nation si jalouse de sa liberté qu'elle y joignoit le mot de libre *fryer Franck*, on s'accoûtuma peu à peu à attacher à ce dernier mot la signification de l'autre, de sorte qu'un homme *Franc* signifia un homme libre & exemt de tribut ou d'autres charges; un lieu *Franc* fut pris au même sens pour un lieu privilégié; enfin donnant à ce mot plus d'étendue, non seulement on en tira dans la même signification ceux de *franchise* & d'*affranchissement* pour exemtion, d'*affranchir* pour exemter ou mettre en liberté, d'*affranchi* pour exemté ou devenu libre; mais même la *franchise* se donna le droit de parler librement, & l'homme *franc* devint un diseur de vérités, quelquefois misantrope, souvent indiscret, & communément un homme sans finesse, un bon homme.

XV. PROPOSITION.

Quos in Sicambria olim sedes habuisse, & vera origine Germanos fuisse indigenas, non Trojanos (ut fabulantur quidam) mea fert opinio. Quam non parum promovet, quod Abbas Spanheimensis ait haberi apud Remos insculpta hæc verba, quibus beatus Remigius Clodoveum baptisandum allocutus fuerit, MITIS DEPONE COLLA SICAMBER. *Neque Hunibaldus inficiatur hanc Francos inhabitasse Provinciam, postquam è Scythia digressi sunt, annis ante Christum natum non minus quadringentis.*

Il dit „qu'ainsi les François, non Troyens mais Germains „d'origine, ont habité autrefois dans la Sicambrie, ce que Trithème „donne lui-même lieu de croire, en disant qu'il y a dans l'Eglise de „Reims une pierre sur laquelle sont gravées ces paroles que St. Remi „dit à Clovis en le baptisant: *Mitis depone colla Sicamber*; & Huni-

„bald

„bald ne le nie pas non plus, puisqu'il marque que les Francs fixérent „leur demeure dans cette Province après qu'ils eurent quitté la Scythie, „non moins de 400 ans avant J. C."

Premiérement l'Origine Troyenne des Francs, comme je l'ai déja répété tant de fois, ne regardant que Wasthald & non Hunibald son continuateur, ce dernier n'a pas besoin d'être justifié là-dessus, & j'ai déja dit aussi que par cette raison je ne m'étois pas proposé d'examiner si cette origine est vraie ou fausse.

Secondement, j'ai montré qu'il y a eu une ville de Sicambrie hors de l'Allemagne, qui est Alt-Offen ou le Vieux Bude dans la Basse Hongrie; & que par conséquent il est faux qu'il n'y ait point eu d'autre Sicambrie que le pays d'Allemagne habité par les Sicambres ou les Francs le long du Rhin.

Troisiémement, Trithéme dans les deux Abrégés d'Hunibald, rapporte quatre fois les paroles de St. Remi à Clovis, & les rapporte d'après Grégoire de Tours, mais ne parle nulle-part de la pierre de l'Eglise de Reims. Ainsi le Comte de Nuenar a fait encore ici deux fautes, l'une en mettant faussement cette pierre sur le compte de Trithéme, l'autre en ne citant point Grégoire de Tours cité par Trithéme; & c'est ce qui prouve encore qu'il ne prenoit pas la peine de lire ses Auteurs & qu'il s'en tenoit aux Extraits qu'on lui fournissoit. A propos de quoi je me rappelle qu'il citoit dans la Proposition précédente Grégoire de Tours, comme ayant dit que les Francs avoient pris ce nom pour marque de leur liberté; ce qui est encore vraisemblablement une fausse citation, puisque je n'en ai pas trouvé le moindre mot dans les douze Livres de Grégoire de Tours.

Quatriémement, pour prouver que les Francs ont demeuré le long du Rhin dans le pays d'Allemagne qu'il nomme la Sicambrie, il appelle en témoignage Hunibald & il a raison; puisqu'Hunibald n'a fait, dans toute son Histoire, que le récit de ce que les Sicambres, avant & après qu'ils eurent pris le nom de Francs, firent précisément dans

ce même pays. Ainsi le Critique ne fait encor-là que prouver sans nécessité ce qu'on ne lui conteste point. Mais enfin c'est un nouveau témoignage de sa part, qui établit de plus en plus l'autorité de notre Historien.

XVI. ET DERNIERE PROPOSITION.

Quare miror magis eorum Regum nomina, quae recenset (Hunibaldus) post adventum eorum in Germaniam, non reperiri apud Romanos scriptores, inter quos Strabo Augusti tempore tres nominat Sicambrorum reges, quorum nullus est in Catalogo Hunibaldi. Si quis aliter sentiat, illi non obnitar, liberum cuique suum esto judicium.

Il dit „que ce qu'il y a de plus étonnant est que les noms des „Rois dont Hunibald fait le dénombrement depuis leur arrivée en „Germanie, ne se trouvent point dans les Auteurs Romains, & qu'au „contraire Strabon nomme trois Rois des Sicambres dont aucun n'est „dans le catalogue d'Hunibald.“

Je répondrai successivement aux deux membres de cette proposition. Et pour commencer par le premier, il faut se rappeller d'abord qu'en examinant la VIIIe Proposition, j'ai montré que les Romains connoissoient fort peu l'histoire des Peuples qu'ils appelloient Barbares, tant parce qu'ils en ignoroient les Langues qu'à cause du mépris qu'ils avoient pour tout ce qui n'étoit pas Grec ou Latin. De là est venu 1°. Qu'eux & les Grecs ont négligé très-souvent de nous apprendre les noms des Rois Allemans avec lesquels les Romains avoient eu affaire, & du nombre de ces Rois étoient ceux des Francs. 2°. Que ces Ecrivains prennent souvent pour un Roi celui qui n'étoit qu'un de ses Ducs, commandant pour lui un corps de troupes & gouvernant une province exposée à l'ennemi. 3°. Que s'ils indiquent des Rois très-réels, ils confondent souvent les divers Peuples de l'Allemagne, & souvent aussi ne les désignent que par le nom vague de Germains, outre qu'ils défigurent les noms propres Allemans, au point de les rendre souvent méconnois-

fables. Quelques Exemples pris dans leurs Histoires prouveront ces trois cas différens.

Exemples du premier Cas.

L'an 265, sous l'Empereur Gallien, quatre armées Allemandes de diverses Nations partirent chacune de leur côté pour aller ravager les Provinces des Romains, à la faveur des troubles excités par les Tyrans qui continuoient de pulluler dans l'Empire. La premiere de ces quatre armées étoit celle des Francs, qui entrant dans les Gaules porterent leurs armes jusqu'aux Pirénées; la seconde celle des Cattes & des Saxons qui tirerent vers l'Italie, prirent Ravenne & menacerent Rome, mais furent, dit-on, repoussés par des troupes que le Sénat leur opposa; la troisiéme celle des Sueves qui fondirent sur la Pannonie; & la quatriéme celle des Goths joints aux Scythes qui allerent saccager la Grece & l'Asie Mineure. On lit dans Eutrope, dans Aurelius Victor, dans Trebellius Pollion, dans Lampride, Zonare & Zosime, les récits plus ou moins circonstanciés des exploits ou des défaites de ces diverses armées, sans qu'on y trouve la moindre mention de ceux qui les commandoient.

Vopiscus rapporte que l'an 277 les Germains étant restés jusqu'alors en possession des Gaules, l'Empereur Probus les combattit plusieurs fois avec succès, retira de leurs mains 60 villes qu'ils occupoient, leur tua dans cette guerre près de 400 mille hommes, & repoussa le reste au-delà du Necker; & il n'est point parlé des chefs de ces Germains.

Zosime raconte que l'an 313 Constantin voyant les Francs contrevenir à leurs Traités, ravagea leur pays & les soumit à sa domination, mais de leur Roi pas un mot.

St. Jérôme écrit que l'an 342 l'Empereur Constant gagna une grande bataille sur les Francs qui ravageoient la Gaule depuis trois ans, & que ceux-ci ayant fait ensuite la paix avec lui retournerent chez eux: & il ne dit rien non plus de leur Roi.

Il y

Il y a cent exemples pareils dans lesquels il n'est non plus parlé de Rois des Francs que s'ils n'en avoient pas eu. Peut-être croira-t-on qu'effectivement ils n'en avoient point: on va voir la preuve du contraire.

L'an 254, Galien déclaré César par l'Empereur Valérien son pere, fit un Traité avec le Chef des Francs, suivant Zosime; & le nom de ce Chef qui ne pouvoit être que leur Roi, est passé sous silence.

L'an 357, les Germains, du nombre desquels étoient sans doute les Francs, ayant à leur tête six de leurs Rois, suivant Ammien Marcellin, perdirent une grande bataille contre le César Julien; & de ces six Rois, l'Historien n'en nomme qu'un, savoir Chodomarius, qui fut fait prisonnier, & envoyé à Rome.

L'année suivante, 358, Julien passa le Rhin pour aller combattre les Francs que les Romains appelloient Saliens, & se trouva dans le plus grand embarras, n'ayant ni vivres ni moyen de s'en procurer: heureusement pour lui, le Roi de ces Saliens lui demanda la paix & fournit des vivres à son armée. C'est Julien lui-même qui rapporte cet événement, & la circonstance demandoit, ce semble, qu'il fît connoître ce Roi des Francs: cependant il ne le nomme point, non plus que Zosime qui raconte dans son troisiéme Livre, que la même année 358, Julien allant combattre les Quades, fit jurer à son armée qu'elle ne feroit aucun tort à ces mêmes Francs Saliens, & qu'elle leur laisseroit la liberté de se retirer sur les terres de l'Empire, ce qu'ils firent avec leur Roi, sur quoi Julien les prit, lui & eux, au service de l'Empereur; & ce Roi n'est point nommé.

Ces Exemples prouvent manifestement que les Francs avoient des Rois, mais que les Historiens ne se faisoient aucun scrupule d'en taire les noms, ne prévoyant pas que les Critiques des siécles suivans auroient recours à leurs Histoires, soit pour y chercher la chronologie ou la généalogie de ces Rois, soit pour vouloir fonder sur leur silence des argumens négatifs contre leur réalité.

Exemples du second Cas.

Eumenius qui fût fait Professeur de Rhétorique par Constance Chlore pere du Grand Constantin, l'an 299, avec une pension de 600 mille nummes, suivant Nazaire, ce qui revient à 60 mille francs: cet Eumenius rapporte dans son Panégyrique (genre d'ouvrage où la vérité n'est pas toujours exactement rendue) que Constance ayant vaincu les Francs de la Batavie & des Isles du Rhin les avoit dispersés en divers endroits des Gaules; mais que peu après ces Francs avec leur Roi *Gerabon* avoient été rassemblés par l'Empereur Maximien, qui les établit dans les campagnes des Trevois & des Nerviens. Mamertin, autre Rhéteur, dans son premier Panégyrique de Maximien, n'écrit pas *Gérabon* mais *Génobon*, & ajoute que ce Roi vint avec toute sa Nation à Treves, pour recevoir humblement son Royaume des mains de Maximien: ce qui arriva, suivant la supputation de Nicolas Vignier dans son Traité de l'origine des Francs, l'an 289, un an après que les Gaules eurent été ravagées, suivant Ammien Marcellin, par les Germains, qui au mois de Janvier avoient passé le Rhin sur la glace, & que Maximien les eut forcés à repasser le fleuve, puis le traversant à son tour fut venu lui-même ravager l'Alemagne jusqu'aux sources du Danube dans la Suabe. Il ne paroît point dans les Abrégés que Trithéme nous a donnés d'Hunibald, qu'il y eût alors chez les Francs un Roi nommé Gérabon ou Génobon, & cela prouve que l'Histoire d'Hunibald n'est pas une compilation des Auteurs étrangers. Mais comme le prétendu Royaume de ce Génobon ne consistoit que dans le Betau & les Isles du Rhin qui ne faisoient qu'une partie du Royaume des Francs en Germanie, il s'ensuit que ce n'étoit qu'un Duc qui avoit le gouvernement de ce pays-là. Or Hunibald rapporte que la 12e année du régne de Clodius II. l'an 283. ce Roi des Francs fit par ses Ducs une nouvelle invasion dans les Gaules, où ils se maintinrent près de sept ans, après quoi ils en furent chassés derechef; ainsi il est possible qu'en 289. ce Duc ou Gouverneur de la Batavie appellé non Génobon mais Génébald, qui étoit un nom assez ordinaire chez les Francs, ait été au nom du Roi Clodius & à la tête d'une députation trouver Maxi-

Maximien à Treves pour faire la paix avec lui; sur quoi les Panégyristes de Maximien, pour exagérer d'autant plus le mérite ou le prix de cette démarche, dont ils parlent comme d'une prestation d'hommage ou d'une soumission de Vassal à son Seigneur, auront donné, faussement & à dessein, à ce Duc Génébald, le titre de Roi des Francs. Mais dans le fond Hunibald auroit eu grand tort de le regarder comme tel.

L'an 307, suivant Nazaire qui est encore un Panégyriste, Ascarius & Gaison, Rois des Francs qui demeuroient depuis les frontieres des Saxons dans la Westfalie, jusqu'à celles des Alemans ou des Sueves qui habitoient l'Alsace & la Suabe, perdirent une bataille contre l'Empereur Constantin, qui les ayant fait prisonniers avec un grand nombre de leur Nation, eut, dit-on, la cruauté de les faire exposer aux Bêtes dans l'Amphithéatre de Rome. Outre que cette derniere circonstance est sans doute fabuleuse, du moins par rapport aux deux Rois Francs; il est évident que ces deux Rois à la fois ne pouvoient être que deux des Ducs du Roi Dagobert qui régnoit alors sur les Francs, suivant Hunibald. Ainsi, loin que cet Historien soit blâmable de ne les avoir pas mis au rang des Rois de cette Nation, & d'avoir passé sous silence un fait qui sans doute a été exagéré par le Panégyriste, pour ne rien dire de plus; on doit au contraire lui en savoir gré, puisque c'est une marque, comme je l'ai déja dit, qu'il n'a point copié son Histoire sur les Auteurs Latins, comme il l'auroit fait infailliblement & sans difficulté si cette Histoire étoit supposée.

Exemples du troisiéme Cas.

L'an 351, Decentius que Magnence avoit fait César, fut vaincu dans la Gaule par *Chodomarius* Roi des Alemans, suivant Calvisius: sur quoi cet Ecrivain cite à faux Eutrope qui n'en parle point, au lieu qu'il falloit citer Ammien Marcellin, Liv. 16, lequel ajoute, que six ans après, en 357, six Rois des Germains ayant été défaits à Saverne, *Chodomarius*, qui étoit le principal de ces Rois, fut pris dans sa fuite & envoyé par Julien à Rome où il mourut en captivité. Ce prétendu

 Roi

Roi des Alemans étoit, je pense, un Roi des Francs, dont Ammien a confondu la nation, & défiguré le nom propre. Hunibald raconte que sous le régne de *Théodomer*, (& de Théodomer à Chodomaire la distance n'est pas grande) que sous ce régne, dis-je, depuis l'année 347 jusqu'en 357, les Francs étendirent leurs frontieres bien avant dans la Gaule en dépit des Romains, mais qu'enfin le Roi *Théodomer* ayant été pris par eux avec sa mere *Astila*, ils leur firent à tous deux trancher la tête l'an 357. Grégoire de Tours, Liv. 2. ch. 9, dit avoir lû ce même fait dans les Consulaires, si ce n'est qu'il nomme la mere du Roi *Théodomer*, *Ascila*. Il est donc fort apparent que le *Chodomaire* d'Ammien est le même que le *Théodomer* de l'Evêque de Tours & d'*Hunibald*.

L'an 354, suivant la supputation de Calvisius, Ammien dit que l'Empereur Constance se mit en marche pendant l'hiver pour aller attaquer *Gundomade* & *Vadomaire* Rois des Germains qui étoient dans les Gaules, mais que ses troupes étant mécontentes faute de vivres, il fut obligé de faire la paix avec ces deux Rois; & que sept ans après en 361, Julien ayant envoyé consécutivement deux parties de son armée contre les Alemans, la derniere les battit & fit prisonnier leur Roi *Vadomaire*, mais que le printems étant venu Julien donna la paix à la Germanie, pour pouvoir faire la guerre à l'Empereur Constance. Je soupçonne que les deux noms qu'on a vûs dans ce récit sont encore falsifiés, & qu'il s'agit non de deux Rois des Alemans, mais de deux Ducs des Francs, très-connus dans l'Histoire d'Hunibald. Le prétendu *Gundomade* étoit le Duc *Génébald*, frere du Roi Clodomir, qu'il dit avoir été fait premier Duc des Francs Orientaux, & *Vadomaire* étoit l'un de ses deux fils nommé *Dagobert*, qui ayant fait, soit avec son pere comme il résulte du récit d'Ammien, soit sans lui comme Hunibald semble le dire, une irruption de l'autre côté du Rhin, pilla & brûla la ville de Treves, sous le régne de Théodomer avant l'an 357, ce qui cadre parfaitement avec la date de Calvisius calculée sur Ammien. Et parce que Génébald mourut avant cette même année 357, suivant Hunibald, voilà pourquoi l'an 361 il n'est plus fait mention de lui dans Ammien, mais seulement de Vadomaire, c'est à dire de Dagobert.

C'est

C'eſt ainſi que la plupart des noms propres des anciens Rois Allemans ont été corrompus par les Auteurs Grecs & Latins.

Rapprochez, par exemple, l'*Ambiorix* de Céſar Liv. 5; l'*Ambriorix* de Dion Liv. 40; l'*Ambricho* d'un Anonyme qui a fait un Catalogue d'anciens noms propres; l'*Américhos* de Nicétas dans la Vie d'Iſaac l'Ange; le *Mericus* de Tite-Live Liv. 25 & 26; & le *Maricus* de Tacite au Liv 2. de ſes Hiſtoires: vous verrez que tous ces noms reviennent au même, & qu'ils ne ſont que des corruptions du nom d'*Aimerich*, d'*Eimerich*, ou peut-être de Heinrich.

Rapprochez le *Lutarius* de Tite-Live Liv. 38; le *Luterius* de Céſar Liv. 7. & 8; le *Lucrios* ou *Lucrius* de Strabon Liv. 4; le *Leuderis* de Procope dans la Guerre des Goths Liv. 1; & le *Leutharis* d'Agathias auſſi Liv. 1: vous verrez que c'eſt le nom de *Lüder* en Allemand ou de *Lothaire* & de *Clotaire* en François, diverſement écrit & corrompu par ces Hiſtoriens.

Rapprochez le *Litavicus* de Céſar Liv. 7; le *Clondicus* de Tite-Live Liv. 40 & 44; le *Claudicus* d'Oroſe Liv. 5. ch. 16; & le *Clonoicus* de je ne ſai quel autre Auteur: vous trouverez que ces noms, malgré leur grande diverſité, reviennent à ceux de *Ludovicus* & de *Clodoicus* ou de *Louis* & de *Clovis*, tirés du nom Allemand *Lutwich* ou *Liutwich*.

Prenez de même le *Hilermus* de Tite-Live Liv. 35; le *Giliermos* ou *Giliermus* de Nicétas Choniate Liv. 5, & d'Anne Comnene Liv. 1; & le *Gilimer* de Procope dans la Guerre des Vandales Liv. 1. & 2: vous reconnoîtrez que tous ces noms répondent au *Gvilhermus* ou *Willermus* de Sigebert qui n'eſt comme eux qu'une corruption de celui de *Guillelmus* ou *Guillaume*, venu du *Wilhelm* des Allemans.

Prenez le *Deutorix* de Strabon Liv. 7; l'*Adiatorix* du même Liv. 10; la *Deuteric* de Grégoire de Tours Liv. 3; & le *Deuterios* ou *Deuterius* de Nicéphore Liv. 16. ch. 35: vous appercevrez que ces noms,

noms, aussi bien que ceux de *Thiadericus* dans Witichind Liv. 1. de l'Histoire des Saxons, & de *Theuderichos* ou *Theuderichus* dans Procope, Agathias & autres, reviennent visiblement au *Theodoric* ou *Dietrich* des Allemans, & au *Thierri* des François.

Prenez le *Cingetorix* de César Liv. 5; l'*Orgetorix* & le *Vercingetorix* du même; le *Vercingentorix* de l'Epitomateur de Tite-Live Liv. 87; l'*Oroetorix* de Dion Liv. 38; & l'*Ouergentorix* du même Liv. 40, & de Plutarque dans la Vie de César: vous verrez que non seulement ces noms sont écrits diversement par ces Auteurs, mais que dans le fond ce ne sont que des bâtards du nom de *Gunderich* ou de *Guntherich* des Allemands, qui est le *Gonthaire* ou *Gonthier* des François.

Prenez l'*Abilix* de Polybe Liv. 3; l'*Andobales* du même Liv. 12; l'*Indibilis* de Tite-Live Liv. 26, & d'Appien; le *Jubilius* de Tacite dans ses Annales Liv. 1. 2. & 12, ou le *Vibilius*, comme portent certaines Editions de cet Auteur: vous verrez que ces noms reviennent encore au même, quoiqu'écrits diversement.

Prenez l'*Ariovistus* de César, de Dion & de Plutarque; l'*Aneroestus* de Polybe Liv. 2; l'*Astrionicus* & l'*Ariobistus* de Florus Liv. 2. ch. 4; vous aurez peine à reconnoître dans ces noms défigurés celui d'*Arnust* ou d'*Ernest* auquel néanmoins ils répondent incontestablement.

C'est encore de la même maniere que le nom de *Gantzreich* ou *Genserich* a été changé par Orose Liv. 5. ch. 16. en *Cesorix*; celui de *Fridereich*, *Frids* ou *Fridel*, par Eugipe en *Fridurichus*, & par St. Jérôme en *Fretella*; celui de *Thassel* ou *Thassilon*, par Justin Liv. 24. ch. 7, en *Thessalorus*; celui de *Gerbolt*, par Tacite au second Livre de ses Annales en *Cariovalda*; ceux de *Larein* & d'*Ulsing*, par le même Tacite dans sa Description de la Germanie, en *Laërtes* & en *Ulysse* son fils; celui de *Names* par César en *Numeius*; celui de *Rotger*, par Appien en *Retogenes*, par Procope en *Radiger*, & par Anne Comnene en *Rogenes*; celui de *Sigmund* ou *Sigismond*, par Strabon Liv. 6, en

Semi-

Semigundus, par Tacite en *Segimundus*, & par Justin en *Sigillus*; celui de *Zecco* par Pausanias Liv. 10. en *Acichorius*, & par d'autres en *Ciconius*; enfin celui de *Perthrich*, *Perderich* ou *Pferderich*, non seulement a été changé de même par corruption en *Pertharit* & *Bertharic*, mais aussi en *Eporedorix*, comme on le prouve par César Liv. 7; & en *Poredorax*, comme l'écrit Plutarque dans son Traité des Vertus des femmes; & je dis par corruption, car suivant Pline Liv. 3. ch. 17, les Gaulois appelloient *Eporediques* les bons dompteurs de chevaux, ou les habiles Ecuyers, & par cette raison on avoit donné le nom d'*Eporedia* à une ville du Piémont qu'on croit être aujourd'hui Ivrée, bâtie par le peuple Romain sur un Oracle des Livres Sybillins: *Oppidum* EPOREDIA *Sybillinis libris à Populo Romano condi jussum.* EPOREDICAS *Galli bonos equorum domitores vocant.* D'où il résulte que ce nom d'*Eporedia* étant une corruption du mot Allemand *Perd* ou *Pferd*, cheval, celui d'*Eporedicus* en étoit une autre du mot *Perderich* ou *Pferderich*.

En voilà, ce me semble, autant & plus qu'il n'en est besoin pour prouver que les Auteurs Grecs & Latins, qui ont voulu rapporter les noms des anciens Rois Germains, n'ont fait que les estropier & les défigurer souvent au point de les rendre méconnoissables. Cependant il est certain que ceux dont Hunibald a fait mention ne sont pas tellement inconnus à ces Auteurs, qu'on ne puisse, malgré leur négligence, parvenir à en découvrir quelques-uns dans leurs Ouvrages.

1°. Il faut mettre de ce nombre Génébald ou Génobon, dont parle Mamertin dans son Panégyrique, & qui n'étoit pas à la vérité un Roi des Francs comme il le dit, mais qui pouvoit être un des Ducs des Francs qu'Hunibald a désignés sans les nommer, sous le régne de leur Roi Dagobert.

2°. Les Fastes Consulaires, cités par Grégoire de Tours Liv. 2. ch. 9, nomment trois Rois & une Reine des Francs, savoir RICHIMER, ASCILA sa femme, THEODOMER leur fils & CHLOGION: *Nam & in Consularibus legimus* THEODOMEREM *Regem Francorum*, *filium*

filium RICHIMERIS *quondam*, & ASCILAM *matrem ejus*, *gladio interfectos*. *Ferunt etiam tunc* CHLOGIONEM *utilem ac nobilissimum in gente sua Regem Francorum fuisse*, &c. Et non seulement ces quatre noms se rencontrent dans Hunibald, mais ils y sont accompagnés à peu près des mêmes circonstances, & même de quelque chose de plus. Page 27, RICHIMERUS *Francorum Rex denuò cum Romanis incautè pugnaturus in bello fuit occisus anno videlicet regni sui tertio decimo* .. THEODOMIRUS RICHIMERI *præfati regis filius regnavit post interitum patris sui annis decem* ... *Mater ejus* HASTILA *nomine*, *filia regis Saxonum fuit* .. Page 28, *Rex verò* THEODOMIRUS *tandem à Romanis Galliam inhabitantibus*, *unà cum* HASTILA *matre sua comprehensus*, *capite truncatus*, *interiit anno regni sui decimo* .. CLOGIO *regis* THEODOMIRI *filius*, *patri succedens*, &c. Ce récit revient aux pages 75 & 76, avec cette différence que THEODOMIR y est appellé THEODOMER, & sa mere, ASTILA sans H. Ce qui approche encore davantage des noms marqués dans les Fastes Consulaires.

3°. Sulpice Alexandre, dont l'Histoire aujourd'hui perdue, paroîtroit aussi suspecte à nos Critiques que celle d'Hunibald, si elle n'avoit eu le bonheur d'être connue de Grégoire de Tours; ce Sulpice Alexandre parle d'abord de GÉNOBALD, de MARCOMER & de SUNNON, comme de trois Ducs des Francs: *Eo tempore* GENEBALDO, MARCOMERE & SUNNONE *Ducibus*, *Franci in Germaniam prorupere*, &c. Ensuite ne parlant plus que des deux derniers, il leur donne le titre de Royaux ou de Régens: *Post dies paucolos* MARCOMERE & SUNNONE *Francorum Regalibus*. Enfin il les traite de Sous-Rois ou de Rois Subalternes: SUNNONEM & MARCOMEREM *Subregulos Francorum*. C'est tout ce que pouvoit dire un Historien qui ne connoissoit les Francs que par des relations indirectes. Mais Hunibald, à qui tous les trois étoient mieux connus par les Annales des Francs, a parlé d'eux sans équivoque. Il dit qu'après les Rois Théodomer, Clogion & Marcomer, les Francs Occidentaux pendant un certain nombre d'années n'eurent plus de Rois, mais seulement des Ducs: Qu'ainsi Dego-

Dagobert frere du dernier Roi fut leur premier Duc, en même tems que Clodius étoit Duc des Francs Orientaux; Que GENEBALD fils aîné de Dagobert, fut second Duc après lui, & qu'il avoit deux freres MARCOMER & SUNNON: Que le Duché de Génébald comprenoit la Tongrie, & une partie de la Gaule avec le Brabant; celui de MARCOMER, le pays du Rhin qui regardoit les Saxons; & celui de SUNNON, les terres qui sont entre la Mer, la Gaule & la Hollande; mais qu'outre ce MARCOMER, il y en avoit un autre de ce nom qui étoit alors Duc des Francs Orientaux, ayant succédé à son pere le Duc Clodius; Que les deux freres MARCOMER & SUNNON ne laisserent point d'enfans mâles; & que Génébald leur aîné en laissa deux, dont l'un étoit boiteux & l'autre peu capable de gouverner. Or non seulement on voit dans ce récit les noms des trois Princes des Francs indiqués par Sulpice Alexandre, mais on les voit accompagnés des circonstances les plus propres à les faire connoître & soutenues de toute la vraisemblance possible.

4°. Le Poëte Claudien, qui vivoit vers la fin du quatriéme siécle sous Arcadius & Honorius, dit au Liv. I. *des Louanges de Stilicon*, que MARCOMER Roi des Francs fut exilé dans la Toscane, & que SUNNON son frere fut tué par les siens lors qu'il se préparoit à le venger:

— — Provincia missos
Expellet citiùs fasces, quàm Francia Reges
Quos dederis: acie nec jam pulsare rebelles,
Sed vinclis punire licet, sub judice nostro
Regia Romanus disquirit crimina carcer.
MARCOMARUS, SUNNO*que docent, quorum alter Etruscum*
Pertulit exsilium: cùm se promitteret alter
Exsulis ultorem, jacuit mucrone suorum:
Res avidi concire novas, odioque furentes
Pacis, & ingenio scelerumque cupidine fratres.

 C'est

C'eſt une louange outrée que Claudien donne à Stilicon, uſant ou plutôt abuſant du privilege de la Poéſie. „Nos Provinces, dit-il, chaſſeront plutôt les faiſceaux que nous y avons envoyés, que la France ne „chaſſera les Rois que vous lui avez donnés. Ce n'eſt plus le tems de „combattre les rebelles, il ſuffit de les enchaîner pour les punir. Sous „notre Juge les crimes des Rois ſont diſcutés dans un cachot Romain. „MARCOMAR & SUNNON en ſont un grand exemple. L'un ſubit „l'exil dans l'Etrurie: l'autre, au moment qu'il ſe promettoit de ven„ger l'exilé, fut étendu mort par le fer des ſiens; ces deux freres „ayant eu la fureur d'entreprendre des choſes nouvelles, étant enne„mis de la paix, & leur eſprit ne reſpirant que la paſſion des crimes." Ce MARCOMAR dont parle Claudien, fut le Roi MARCOMER V. d'Hunibald, qui après la mort de Maxime envoya dans la Gaule une armée pour y reprendre ce que cet Empereur lui avoit enlevé, & qui pendant l'abſence de cette armée ayant été attaqué chez lui à ſon déſavantage, par l'Empereur Valentinien, fut ou tué dans le combat ſuivant Hunibald, ou fait priſonnier & mené en captivité dans la Toſcane ſuivant Claudien. Mais ce dernier eſt croyable en ce point parce que le fait étoit arrivé de ſon tems. Et ſans cela d'ailleurs il ſeroit impoſſible d'expliquer pourquoi les Francs après la prétendue mort de Marcomer, ne ſe donnerent point de Rois pendant 25 à 28 ans, mais ſimplement des Ducs ou Régens.

Ainſi l'on voit par ces exemples, que c'eſt ſans fondement que le Comte de Nuenar a avancé, que les noms des Rois dont Hunibald fait e dénombrement depuis leur arrivée en Germanie, ne ſe trouvent point dans les Auteurs Romains; & qu'enfin ſi ces Auteurs ne les ont pas nommés tous, c'eſt à eux & non pas à lui qu'il faut s'en prendre.

Je viens préſentement au ſecond membre de la Propoſition du Comte de Nuenar, qui eſt que Strabon a nommé trois Rois des Sicambres dont aucun n'eſt dans le Catalogue d'Hunibald; & à cela voici ma réponſe.

Pour peu que celui qui fourniſſoit des Extraits à ce Critique, eût voulu étendre ſes recherches, il ne ſe ſeroit pas reſtraint aux trois Rois

Rois dont il dit que Strabon a parlé, il en auroit trouvé un bien plus grand nombre. Il auroit d'abord saisi dans Aurelius Victor un Roi *Marcomar* dont la domination s'étendoit depuis la ville de Carnutum en Pannonie jusqu'au milieu des Gaules; dans Ammien Marcellin, un *Bonice* Duc des Francs, & un autre nommé *Ursinin* sorti du sang Royal, commandant tous deux conjointement un Corps de cette Nation au service de l'Empereur Constantin l'an 314; Un LANIOGAISE occupant un pareil poste sous l'Empereur Constant l'an 350, & fort accrédité à la Cour de l'Empereur Constance l'an 355; Un Duc *Sylvain* fils de Bonice, servant de même ce dernier Empereur depuis l'an 351 jusqu'en 355, qu'ayant voulu se faire Empereur lui-même, il fut tué par Ursinin son compatriote; Un *Mallaric* qui étoit aussi pour-lors à la tête d'un corps de Troupes étrangeres au service de l'Empire; Un *Carietton*, qui se distingua par une valeur & un courage proportionnés à l'énormité de sa taille; Un *Mellobaude* ou *Mérobaude* qualifié Roi des Francs, lequel, suivant Ammien, ayant tué dans une embuscade l'an 375 Macrien Roi des Alemans, qui avoit pillé & ravagé ses terres, eut la même année le commandement de l'armée de Valentinien, suivant Zosime, & l'an 378 rendit un si grand service à Gratien dans une bataille contre les Germains qui avoient passé le Rhin au nombre de plus de 40 mille, qu'il en eut pour récompense la dignité de Comte des Domestiques ou de Maître du Palais, suivant Socrate; Un *Ricomer*, Prince des Francs, qui fut envoyé par Gratien l'an 377 au secours de son frere Valens en Orient, suivant Ammien; Un *Baudon* & un *Arbogaste*, deux Ducs des Francs que Gratien envoya de même l'an 380 au secours de Théodose, suivant Zosime; Enfin un *Eobech* ou *Edobinch*, aussi Duc des Francs, qui depuis l'an 407 jusqu'en 411, ne contribua pas peu à maintenir le Tyran Constantin, suivant René Frigéride cité par Grégoire de Tours. C'est dommage que le Comte de Nuenar n'ait point eu connoissance de ces douze personnages; il auroit eu beau jeu, ou du moins auroit cru l'avoir contre Hunibald, qui assurément n'a mis aucun d'eux dans son dénombrement des Rois Francs. Mais a-t-il eu tort? Le premier dont il s'agit dans

Aurelius Victor est un Roi Marcoman, & par erreur on a changé Marcoman en Marcomar. Quant à Bonice & aux dix autres, il ne les y a pas compris non plus, parce qu'encore que la plupart fussent des Seigneurs Francs, & même quelques-uns du sang de leurs Rois, ce n'étoient dans le fond que des Ducs envoyés par ces Rois au secours des Empereurs suivant leurs Traités, ou que des particuliers qui s'ennuyant chez eux, venoient avec leurs vassaux ou d'autres volontaires se mettre au service des Empereurs, dans l'espérance de faire leur fortune en s'élevant aux premiers honneurs de la Milice & du Palais: de sorte qu'il n'y a pas plus de raison à chercher, soit dans ces Ducs soit dans ces Aventuriers, les noms des Rois Francs qui vivoient de leur tems, qu'il y en auroit aujourd'hui à vouloir trouver celui d'un Roi dans les Généraux ou les Aventuriers de sa Nation, de quelque bonne maison qu'ils fussent, qui viendroient au secours d'un Empereur d'Allemagne, & commanderoient même ses Armées.

Reste donc à parler des trois Rois Sicambres de Strabon, qui suivant le Comte de Nuenar, ne se trouvent point dans le dénombrement d'Hunibald. Strabon dit au Livre VII. de sa Géographie: „Les „Sugambres qui habitent au voisinage du Rhin commencerent une „guerre, lorsqu'ayant choisi *Melon* pour leur Duc ou Général, les au- „tres Grands de la Nation entrerent en contestation, prirent les armes, „firent la paix, puis la rompirent, abandonnant leurs ôtages & vio- „lant leurs sermens. On tira contre eux beaucoup d'utilité de leur „perfidie. Mais ceux pour qui l'on avoit de la confiance, comme les „Chérusques & leurs sujets, n'en firent pas moins de mal, puisque „c'est par leurs mains qu'au mépris des Traités trois Légions Romai- „nes, avec leur Général Quintilius Varus, furent tués par surprise. „Il est vrai qu'ils en ont tous été bien punis, & qu'ils ont fourni au „jeune Germanicus la matiere d'un beau Triomphe, où parurent d'il- „lustres Captifs des deux sexes, *Semigunte* fils de *Segeste*, Duc des „Chérusques, & sa sœur femme d'*Armenius*, sous les auspices & par „le commandement duquel l'infraction de l'alliance ayant été résolue

„con-

„contre Quintilius Varus, les Chérusques commencerent une guerre „que lui-même continue encore. Le nom de sa femme est *Thosnelda.* „Elle avoit avec elle un fils de trois ans appellé *Tumelic:* Les autres „étoient *Sesithac* fils d'*Aegimer* Duc des Chérusques, & sa femme „*Rhamis* fille de *Veromir* Prince des Battes; *Deutorix* fils de *Bœtoritès* „frere de *Melon;* un *Anonyme* fils d'un Sugambre. *Aegeste*, (nommé „plus haut *Segeste*) beau-pere d'*Armenius*, n'en suivant point le parti, „avoit trouvé au commencement de la guerre le moment de passer „comme transfuge chez les Romains. Il assistoit au Triomphe où l'on „conduisoit ses parens; mais pour lui il étoit traité avec distinction, & „se faisoit remarquer dans l'endroit le plus pompeux de la marche. „*Libys* Prêtre des Chattes étoit du nombre des prisonniers, & quanti„té d'autres personnes des Nations vaincues, Cathilques, Ampsans, „Bucteres, Nusipetes, Chérusques, Chattuariens, Chattes, Landes „& Subattiens.“ Remarquez en premier lieu dans ce récit de Strabon, que parmi les Nations vaincues au nombre de neuf, les Sicambres ne se trouvent point, preuve évidente que leur Roi ne pouvoit pas être du nombre des prisonniers qui y sont nommés, & que si parmi ces prisonniers il se rencontre des Sicambres, c'étoient des particuliers de cette Nation, d'un rang distingué, si vous voulez, mais de simples Aventuriers, qui étoient allés se joindre aux Troupes d'Arminius. Ainsi de tous ces captifs il n'y en a aucun qui ait du trouver place dans le dénombrement des Rois Francs ou Sicambres d'Hunibald. En second lieu, ni Deutorix ni son pere Bœtoritès, ni Melon, ni le Sicambre pere de l'Anonyme ne sont point qualifiés Rois des Sicambres. Où sont donc les trois prétendus Rois de cette Nation que le Comte de Nuenar a cru voir dans Strabon? C'est ce qui marque bien qu'il ne les a vûs à son ordinaire que par les yeux d'autrui. En troisiéme lieu, Strabon dit que *Melon* ayant été fait Duc ou Général des Sicambres, cela déplut aux Grands de la Nation, & excita parmi eux une guerre civile; dont les Romains furent bien profiter. Que cet Auteur ait parlé le premier d'un fait arrivé de son tems, cela n'est pas étonnant; mais que de tous les Historiens qui ont écrit après lui, comme Vellejus Paterculus, Sué-

Suétone, Tacite, Florus, Dion, Eutrope, Orose, nul n'ait fait mention de ce fait, ni parlé de *Melon*, c'est ce qui doit véritablement surprendre. Strabon mourut neuf ans après le Triomphe de Germanicus, qui fut fait l'an 17 de notre Ere Chrétienne; & par ce qu'il en dit, je juge qu'il étoit pour lors à Rome. Mais les prisonniers étant Allemans & lui Grec, il a pu être très-mal informé de leurs affaires, faute d'avoir la facilité de s'entendre avec eux. Cela est si vrai que dans le petit nombre des principaux prisonniers, il y a un Sicambre dont il n'a pas même sû le nom. Cependant je soupçonne que ce qu'il dit de *Melon* étoit fondé sur quelque chose de vrai, c'est à dire sur quelque mouvement extraordinaire arrivé chez les Sicambres. „Or „Hunibald rapporte que la troisiéme année du régne d'*Herimer* Roi des „Francs, ce qui revient à l'an 20 de J.C. les Gaulois firent une excur„sion jusqu'à la Meuse; qu'à l'exception des lieux fortifiés, ils ravage„rent toutes les possessions des Francs, & qu'après cet exploit ils re„tournerent chez eux chargés de butin. Aussitôt, continue-t-il, que „le Roi Hérimer en eut connoissance, il entra dans une grande colere, „& faisant venir les Ducs d'Outre-Meuse, par la négligence desquels „les Gaulois avoient trouvé moyen de faire cette irruption, il leur in„fligea les peines prescrites par les Loix des Francs, qui portoient ce „qui suit: *Qu'un Prince subordonné au Roi des Francs étant revêtu de „la puissance Ducale, défende soigneusement la Province qui lui a été „confiée. Que si par sa négligence les ennemis entrent dans le pays, s'ils „insultent notre Nation, ou s'ils pillent les habitans de la terre; que la „moitié de ses biens soit mise dans la bourse du Roi; qu'il ne puisse plus „être Duc, mais qu'il vive privé d'honneur. S'il a permis volontaire„ment aux ennemis d'entrer, qu'il soit enterré tout vif, ou décapité; „& que ses femmes, ses enfans & tout ce qui lui appartient, soient em„ployés au service de la maison du Roi.* Ensuite, ajoute Hunibald, Hé„rimer s'étant joint aux Germains, aux Teutons & aux Turingiens, „ses alliés, entra dans la Gaule & y fit un si grand carnage, que les „Gaulois ne pûrent s'en relever de plusieurs années. Enfin la douzié„me de son régne, il y fit une seconde expédition, dans laquelle il

„fut

„fut tué.“ Hunibald, comme on l'a vu dans ce récit, ne nomme ni les Ducs tombés en faute ni ceux qui leur furent substitués. Ainsi il est possible que *Melon* ait été du nombre des uns ou des autres, & que sa promotion ou sa déposition ait occasionné le trouble dont parle Strabon: en quoi, loin de voir de la contrariété entre son récit & celui d'Hunibald, il me semble que l'un éclaircit l'autre. Qui sait même si le Roi *Hrimer* d'Hunibald, ne seroit pas peut-être le Prince *Veromir* de Strabon, dont la fille Rhamis fut du nombre des prisonniers avec son mari Sesithac? Et comme d'ailleurs Hunibald ne parle que de Ducs, & que Strabon ne donne aussi à *Melon* que ce titre équivalent à celui de Général, il s'ensuit que le Comte de Nuenar avoit aussi mal ou aussi peu lû ce Passage que les autres qu'il cite, en disant que Strabon a nommé trois Rois des Sicambres; ce qui est très-faux, puisque des quatre Sicambres dont il parle, il n'y en a pas un seul à qui il ait donné cette qualité. Et quant à ce que le Comte ajoute qu'aucun d'eux ne se trouve dans la Liste des Rois Francs d'Hunibald; cela est vrai, mais aussi, de ces prétendus Rois de Strabon, le seul Melon qu'il a qualifié, n'ayant été qu'un simple Duc, Hunibald auroit eu très-grand tort de le mettre au rang des Rois des Francs.

CONCLUSION.

De tout ce qui a été dit dans ce Mémoire il résulte que le Comte de Nuenar s'est trompé d'un bout à l'autre de sa Dissertation contre Hunibald, à la réserve des endroits où, se trouvant d'accord avec lui, il en a employé le témoignage pour prouver sans nécessité qu'il avoit tort de le critiquer. Ainsi tant s'en faut que sa critique ait dû faire tomber Hunibald dans le mépris, qu'au contraire elle l'auroit dû rendre plus estimable. Mais par malheur elle parut dans un siécle, au commencement du XVIe, où la critique avoit plus pour objet des mots que des choses, se bornoit à rétablir bien ou mal des passages d'Auteurs Grecs & Latins, & ne portoit dans les discussions historiques que des vues très-courtes, parce que flottant dans les incertitudes de la

Chronologie, alors plus systématique que constatée, elle ne pouvoit tirer que de fausses conséquences d'un fait qui n'étoit point à sa place.

Enfin, s'il m'est permis à présent de dire ce que je pense d'Hunibald, j'avouerai que dans l'état où l'a mis Trithéme son abréviateur, il est très difficile d'en porter un juste jugement. Cependant voici le résultat des combinaisons que j'ai faites en l'examinant.

1°. Wasthald, qui a écrit les premiers Livres de l'Histoire d'Hunibald en Langue Franque ou Allemande, n'a vêcu que depuis St. Prosper dans le V[e] siécle, par la raison que la tradition prétendue de l'Origine Troyenne des Francs pourroit n'avoir pris naissance qu'en ce tems-là à l'occasion d'un Roi des Francs, que Prosper avoit désigné par le mot *Primus quidam* changé ensuite en *Priamus*, comme je le montrerai dans ma Dissertation sur Faramond. Ainsi ce que Wasthald a dit de cette Origine est vraisemblablement une fiction. Mais, pour prononcer sur le reste de son Histoire, il faudroit en avoir vû les douze Livres, & Trithéme n'en a extrait, en deux pages & demie, que la fin, depuis la venue des Sicambres en Allemagne sortant de la Scythie l'an 440 avant J. C. jusqu'à l'an 412, ce qui ne fait qu'un espace de 28 ans. Du reste il ne seroit pas impossible que les Scythes des Palus Méotides, traversant la Pannonie ou pénétrant par la Sarmatie le long de la Mer Baltique, eussent occupé quelques parties de l'Allemagne. Ils aimoient assez à courir pour être venus jusques-là; & il n'y auroit pas plus de honte pour les Allemans & les François d'aujourd'hui à être descendus de ces Scythes, que de tout autre Peuple non moins barbare qu'eux dans son origine. D'ailleurs il se trouve dans l'Histoire de Trogue Pompée abrégée par Justin un passage qui mérite d'être remarqué. On sait ce qui arriva à Alexandre le Grand au retour de son voyage des Indes dans la ville des Oxydraques qu'il assiégeoit, & où étant entré tout seul par escalade, il se défendit avec un courage incroyable, & quoique blessé donna le tems à ses troupes de venir le dégager. C'est ce qu'on peut lire plus au long dans Arrien, dans Strabon, dans Plutarque, dans Q. Curce; & cela arriva l'an 326 avant notre Ere Chrétienne.

Or

Or Trogue Pompée, dans l'Abrégé de Justin Liv. 12. chap. 9, rapportant le même fait, dit clairement que ces Oxydraques & les Malliens étoient des Ambres & des Sicambres, si ce n'est que comme beaucoup d'autres anciens Auteurs, il appelle ces derniers *Sugambres*. „Delà, „dit-il, Alexandre s'avance vers le fleuve Acésine qui le porte dans „l'Océan. Il reçoit à composition les Hiacensanes & les Siléens qu'Her„cule a fondés. De là il navige chez les *Ambres* & les *Sugambres*. „Ces peuples lui opposent 80 mille hommes de pied & 60 mille che„vaux; après les avoir vaincus dans un combat, il mena son armée de„vant leur ville. Etant monté le premier sur la muraille, & remar„quant que personne ne la défendoit, il saute du haut du mur sur le „glacis de la place, n'ayant aucun garde à sa suite. Les ennemis „donc le voyant seul poussent un grand cri & courent sur lui de tout „côté, à dessein de rendre la paix à l'Univers par la mort d'un seul „homme, & de venger tant de nations. Néanmoins Alexandre leur „résiste courageusement, & combat seul contre des milliers d'assail„lans, &c. *Indè Alexander ad amnem Acesinem pergit: per hunc in Oceanum devehitur. Ibi Hiacensanas Sileosque, quos Hercules condidit, in deditionem accipit. Hinc in* AMBROS *&* SUGAMBROS *navigat. Quæ gentes eum armatis octoginta millibus peditum & sexaginta millibus equitum excipiunt*, &c. Si donc on peut ajouter foi à ce passage de Trogue Pompée, il en faut conclure que 114 ans après que les Sicambres furent sortis de la Scythie pour venir en Allemagne suivant Wasthald, il y avoit encore un peuple du même nom établi dans l'Asie, au voisinage des Indes, ou du moins peu en deçà du confluent de l'Hydaspe & de l'Acésine, soit que ce fût un reste des premiers, sorti en même tems qu'eux de la Scythie, soit aussi que les uns & les autres fussent habitans de cette contrée de l'Asie, avant qu'une partie d'entr'eux eût passé dans la Scythie, & de là dans la Pannonie & en Allemagne, soit enfin que ce Peuple ait été originairement le même que les Cimbres, Ambrons & Teutons, qui des bords de la Mer Baltique, 12 siécles avant notre Ere Chrétienne, allerent s'établir au Bosphore appellé de leur nom Cimmérien; d'où

ils se répandirent en partie dans l'Asie, & en partie revinrent long-tems après en Allemagne, & de là pénétrerent dans les Gaules, où Marius en fit un grand carnage.

2°. Hunibald qui a continué l'Histoire de Wasthald, peut avoir vécu sous Clovis, à la mort duquel sa continuation finit. La raison que j'ai de le croire, est qu'au rapport de Trithéme il loue Clovis d'avoir fait mourir divers Rois ses parens; flatterie indigne d'un Historien, mais indispensable si cet Historien écrivoit sous son régne & peut-être par son ordre: outre qu'il parle de la bonne mine de ce Roi, ce qu'il ne fait d'aucun de ses prédécesseurs, & n'auroit pas plus fait à son égard, s'il ne l'avoit pas connu plus personnellement que Grégoire de Tours, qui ne parle point de la figure de Clovis, parce qu'il ne vivoit que sous ses petits-fils.

3°. Il est impossible de concilier la flatterie dont j'ai parlé, avec l'affront sanglant qu'Hunibald fait à Clovis, en rapportant sa naissance à l'adultere de Basine femme du Roi de Turinge avec Childeric son pere; ce qui d'ailleurs est une fable, comme je l'ai montré dans ma Dissertation sur la naissance de Clovis. Ainsi l'Histoire d'Hunibald, telle que nous l'avons dans les deux Abrégés de Trithéme, est manifestement interpolée. Et cela est d'autant moins douteux, que dans le premier Abrégé Clovis ne naît qu'après l'arrivée de Basine en France, & que dans l'autre il y arrive avec elle âgé de sept ans: contradiction dans laquelle il n'est pas croyable qu'Hunibald ait pû tomber, n'ayant fait d'ailleurs qu'une seule & unique Histoire. Et de là il faut conclure qu'il y a dans ces Abrégés des fables à éviter, mais qu'elles ne lui doivent pas être imputées plutôt qu'à son Traducteur & aux Copistes qui peuvent l'avoir interpolé.

4°. Je dis son Traducteur, car encore que j'aye fait voir dans ma réponse à la seconde & troisiéme Proposition du Comte de Nuenar, qu'Hunibald ayant été Franc de Nation, contemporain de Clovis & vivant dans les Gaules, a pu écrire son Histoire en Latin, mais dans un Latin très-barbare, je ne laisse pas d'avoir quelques raisons pour croire qu'il l'avoit écrite, comme Wasthald, en Langue Franque ou Alleman-

mande, & que l'original en ayant été perdu comme il est arrivé de tant d'autres Ouvrages en cette Langue, & entre autres des Loix Saliques, le texte dont Trithéme s'est servi pour faire ses Abrégés, & le Comte de Nuenar sa Critique, n'étoit qu'une ancienne traduction; & je le juge non seulement parce qu'il se trouve dans ce texte Latin plusieurs passages en vieux Allemand, tels par exemple que celui-ci page 8. *Hort opp liefman, kent gy nit dy grot Kunig Basan?* „cessez bon „homme de faire cela, ne connoissez-vous pas le grand Roi Basan?" mais je le juge encore parce que le Traducteur y a latinisé des mots qui sont visiblement aussi de la Langue Germanique, comme quand il dit page 35. *per tres mallos* pour *trois fois* ou *trois banquets* dans lesquels on jugeoit les causes, du mot Allemand *Mahl*, *Maal* ou *Mal*; page 85. *plura clenodia* pour *plusieurs bagatelles:* Germanismes que Trithéme a conservés dans ses Abrégés, mais qui étoient sans doute en plus grand nombre dans le Texte sur lequel le Comte de Nuenar a fait sa critique, & qui par cette raison lui a donné lieu de reprocher à Hunibald sa barbare Latinité, ne faisant pas réflexion que ce Texte pouvoit être une Traduction, & qu'il en est de même de l'ancienne version Latine des Loix Saliques, faite aussi vers le tems de Clovis, dans laquelle on trouve un très grand nombre de mots de l'ancienne Langue Franque ou Allemande. Ainsi c'est encore à mon avis un caractere de plus pour faire regarder l'Histoire d'Hunibald comme un Ouvrage ancien, dont nous devons encore plus regretter l'original que la traduction.

5°. Il est très-possible qu'il l'ait tirée des Annales de sa Nation, qu'il cite fréquemment, & surtout de leurs vers, qu'on avoit encore du tems de Charlemagne, qui les écrivit pour les apprendre par cœur, au rapport d'Eginard. Je veux croire que ces vers n'étoient pas entiérement exemts de fables; & c'est ce qu'ils avoient de commun avec les anciennes Annales de toutes les Nations. Mais si Hérodote, Tite-Live & tant d'autres, malgré les fables dont leurs Histoires sont remplies, ne laissent pas de tenir un rang distingué parmi les Historiens, il est injuste d'en exclure Hunibald.

6°. Les Auteurs Romains qu'on lui oppose ne sont point à son égard de légitimes contradicteurs. Car il n'y a pas moins de bizarrerie à chercher chez eux l'Histoire des Francs, qu'il y en auroit à vouloir se faire chausser par son tailleur & habiller par son cordonnier; ou, pour parler plus proprement, à vouloir trouver dans l'Histoire Romaine celle de tous les Peuples. Il est du droit naturel que chaque Nation préfere, par rapport à son Histoire, le témoignage de ses propres Historiens à celui des étrangers: autrement c'est abandonner une belle & abondante source qu'on a chez soi, pour aller étancher sa soif dans un filet d'eau trouble fort éloigné. Peut-être est-ce par une suite de cette fausse délicatesse, & si j'ose le dire, de ce travers d'esprit, que nous avons laissé perdre ou banni de notre Langue tant de vieux mots, propres, naïfs, énergiques, qui n'ont point été remplacés, ou qui ne l'ont été qu'imparfaitement; tandis que d'un autre côté nous allons en usurper tous les jours chez les Latins, chez les Grecs & jusques dans les Langues vivantes de nos voisins, sans parler de ceux qui font partie des modes, & qui passent comme elles.

7°. Grégoire de Tours, le seul qui pourroit porter coup à l'autorité d'Hunibald, ne le nomme pas à la vérité: mais sans le citer ni l'avoir peut-être connu, il a beaucoup de rapport avec lui. Comparez ce que Grégoire, au Liv. 1. chap. 30 & 32, rapporte de Chrocus Roi des Alamans, avec ce qu'Hunibald, à la page 33, dit de Carocus Roi des Wandales, vous verrez qu'il n'y a aucune différence entr'eux. Il en est de même de ce que l'un au chap. 38, & l'autre aux pages 28 & 29, disent de Maxime qui se fit Empereur dans la Grande Bretagne. Tous deux parlent des Vandales, des Sueves & autres Peuples qui allerent s'établir en Espagne & en Afrique; si ce n'est que Grégoire Liv. 2. ch. 2. nomme Alamans ceux qu'Hunibald pages 34 & 35 appelle plus correctement Alains. Grégoire, aux chap. 5 & 7 du même Livre, parlant de la venue des Huns dans les Gaules, fait mention d'Attila, de Theudon Roi des Goths, de son fils Thorismode, d'Aëtius Général Romain & du Roi des Francs dont il ne marque

pas

pas le nom. Mais Hunibald racontant le même événement page 37, fait connoître que Theudon étoit Théodoric Roi des Wisigoths, que le Roi des Francs étoit Mérovée, & il ajoute deux autres Rois négligés par Grégoire, savoir Walamir Roi des Ostrogoths, & Ardaric Roi des Gépides. Au chap. 9, Grégoire transcrit plusieurs passages de Sulpice Alexandre touchant Génobald, Marcomer & Sunnon Ducs des Francs, Maxime, Nannius, Quintinus, Héraclius, Arbogaste & le Tyran Eugene; & tout cela se trouve aux pages 31, 32 & 33 d'Hunibald. Grégoire au même chapitre cite un Passage de Frigéride touchant Respendial & Godegisile: Hunibald parle aussi d'eux à la page 34. Grégoire encore au même Chapitre tire des Consulaires que nous n'avons plus, ce qu'il dit de Théodomer Roi des Francs, fils de Richimer, de sa mere Ascila & du Roi Chlogion. Mais on n'auroit des uns & des autres qu'une idée très-imparfaite, si l'on n'y joind ce qu'Hunibald rapporte à leur sujet pages 27 & 28. En un mot qu'on prenne la peine de confronter les chap. 11, 12, 18, 19, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 35, 37, 40, 41 & 42 de Grégoire, avec ce qui est dit dans Hunibald aux pages 33, 34, 36, 37, 38, 39, 40, 41 & 42 touchant Mérovée, Childéric, Basine, Aegidius, Odoacre, Paul, Syagrius, Alaric, Gundivic ou Gudéoch, Hilpéric ou Hildéric, Crotilde ou Clotilde, Théodoric, St. Remi, la bataille de Tolbiac, le batéme de Clovis, Gondebaud, Sigebert, Chloderic ou Ludovic, Cararic & son fils Ragnachaire ou Rivachaire, Regnomer ou Lingomir, & le reste jusqu'à la mort de Clovis; on y verra tant de conformité entre les deux Historiens, qu'avec tout le respect qu'on a pour Grégoire, il sera bien difficile de ne pas convenir de la véracité d'Hunibald, par rapport à d'autres faits qu'il raconte & dont l'Evêque de Tours n'a point parlé pour les avoir ignorés. Ainsi son autorité est plus propre à fortifier celle d'Hunibald, qu'à l'atténuer.

8°. Quoique Grégoire de Tours ait fait venir les Francs de la Pannonie en Allemagne, & qu'Hérodote ait dit que les Pannoniens étoient descendus des Troyens échappés de leur ville après sa destruction; regardant néanmoins l'Origine Troyenne des Francs comme une

fable,

fable, j'ai de la peine à me persuader que les Rois des Sicambres ou des Francs ayent eu des noms Grecs ou Troyens, tels qu'Anténor, Priam, Hélénus, Dioclès, Nicanor, Cassander. Mais, quand je vois dans Tacite, au Livre des Mœurs des Germains, chapitre I. que les Peuples voisins du Rhin connoissoient assez les Héros du Siége de Troye, pour croire qu'Ulysse étoit venu fonder sur le bord de ce fleuve une ville d'Ascibourg aujourd'hui Aschelbourg, & qu'on y avoit trouvé anciennement un Autel consacré à Ulysse avec le nom de son pere Laërtès; & qu'aux frontieres de la Germanie & de la Rhétie on voyoit encore des tombeaux avec des Inscriptions Grecques: *Cæterum & Ulixem quidam opinantur longo illo & fabuloso errore in hunc Oceanum delatum adiisse Germaniæ terras, Asciburgiumque quod in ripa Rheni situm hodieque incolitur ab illo constitutum nominatumque* Askipurgion. *Aram quin etiam Ulixi consecratam, adjecto Laërtæ patris nomine eodem loco olim repertam: monumentaque & tumulos quosdam Græcis litteris inscriptos in confinio Germaniæ Rhætiæque adhuc exstare*: Quand je vois, dis-je, ce témoignage, & que je lis dans Hunibald page 6, que les Prêtres Sicambres userent longtems de la langue Grecque: *Utebantur autem Sacerdotes Græco sermone in sacris multo tempore, nec alterius linguæ commixtionem admittebant*; je conçois que les noms des Héros Troyens & Grecs pouvoient être très-connus à ces anciens Sicambres: & dès-là non seulement j'entrevois que leurs Rois ont pu affecter, par un motif de gloire, de prendre ces noms héroïques, peut-être à titre de surnoms; mais même il s'en faut peu que je ne commence à soupçonner que l'origine Troyenne des Sicambres étoit crue dès ce tems-là, Tacite ne le disant pas à cause qu'il ne fait point mention des Sicambres dans le Traité dont il s'agit, si ce n'est peut-être sous le nom très impropre de Gambriviens, qu'il se contente de marquer une fois en passant, surquoi quelques-uns ont supposé que la Nation des Sicambres étoit pour lors éteinte en Allemagne, ou transplantée ailleurs sous quelque autre nom. Mais c'est une supposition mal-fondée, puisque divers Auteurs qui ont vêcu un peu avant Tacite ou depuis lui, ont fait mention des Sicambres comme d'un Peuple existant encore en Allemagne.

Ju-

Juvenal, dans sa IV[e] Satyre, parle des Sicambres du tems de l'Empereur Domitien :

Tanquam de Cattis aliquid torvisque Sicambris
Dicturus.

Martial, dans la III[e] Epigramme du Livre des Spectacles, met les Sicambres au nombre des Peuples qui vinrent à Rome voir les jeux donnés par Domitien :

Crinibus in nodum tortis venere Sicambri.

Le Géographe Ptolémée, vers l'an 210, trouva encore dans la grande Germanie les Sicambres qu'il appelle *Syngambroi.*

Claudien, l'an 400, connoissoit si bien les Sicambres en Allemagne, qu'ils reviennent six fois dans ses poësies, comme le prouvent les passages suivans :

1°. Dans le Poëme *de IV. Consulatu Honorii :*

Ante Ducem nostrum flavam sparsere Sicambri
Cæsariem.

2°. Dans celui *de Nuptiis Honorii & Mariæ :*

Jam Rhenus & Albis
Serviet : in medios ibis Regina Sicambros.

3°. Dans celui *de Bello Gildonico :*

Germania cuncta feratur
Navibus, & socia comitentur classe Sicambri.

4°. Dans le Liv. I. *in Eutropium :*

Pacem implorantibus ultro
Germanis responsa dabat, legesque Caücis ;
Arduus & flavis signabat jura Suevis.
His tribuit Reges, his obside fœdera sancit
Indicto : bellorum alios transcribit in usus,
Militet ut nostris detonsa Sicambria signis.

5°. Au Liv. I. *de laudibus Stilichonis:*

Ut Salius jam rura colat, flexosque Sicambri
In falcem curvent gladios.

6°. Dans le Poëme *de consulatu Stilichonis:*

Hæc Alamanorum spoliis, Australibus illa
Ditior exuviis, illinc flavente Sicambri
Cæsarie, nigris hinc Mauri crinibus irent.

Sidoine Apollinaire, mort en 485, parle aussi des Sicambres de son tems, en quatre endroits de ses poëmes:

Sic tonso capiti senex Sicamber
Postquam victus es elicis retrorsum
Cervicem ad veterem novos capillos.

In Carm. ad Lampridium.

Sic ripæ duplicis tumore fracto
Detonsus Vahalim bibat Sicamber.

In Carm. ad Majorianum.

Intrares venerantibus Sicambris.

. . . .

Agmina quin etiam flavis objecta Sicambris
Quæque domant Cattos, immansuetosque Cheruscos.
Huc omnes vertere minas, tutumque remotis
Excubiis Rhenum solo terrore relinquit.

Etant prouvé par ces témoignages, que les Sicambres subsistoient encore en Allemagne plus de 400 ans après Tacite, il paroîtra sans doute surprenant qu'il n'ait pas fait mention d'eux dans le Traité *de Moribus Germanorum*, & qu'il ait parlé dans ses Annales de ces mêmes Sicambres comme d'un Peuple qu'on avoit détruit depuis longtems. Un autre sujet d'étonnement bien plus grand, est que nul de ceux qui ont écrit l'Histoire postérieure à Tacite, comme Hérodien, Spartien, Lampride, Vopiscus, Trebellius Pollion, Jules Capito-

pitolin, Eutrope, Libanius, Ammien Marcellin, Aurelius Victor, Orose, Priscus Rhéteur, Procope, Jornandès, Agathias, Menander Protector, & Theophylacte; nul d'eux ne parle des Sicambres Mais la vérité est que le nom de Francs, que les Sicambres portoient entr'eux depuis la fin du dernier siécle avant l'Ere Chrétienne suivant Hunibald, s'étant accrédité insensiblement chez les Nations étrangeres, tous ces Historiens ne les désignent que par ce nouveau nom. Cependant aucun d'eux ne parle de ces Francs comme d'une Nation nouvelle, parce que c'étoit le même Peuple sous un autre nom. Aussi le nom de Sicambres, quoiqu'abandonné par les Historiens, qui ne pouvoient plus s'en servir dès-là qu'il avoit cessé d'être en usage, ne se perdit point pour cela. Les Poëtes, à qui la mesure de leurs vers rend les synonimes nécessaires, prirent soin de conserver ce nom. Et c'est par cette raison que, pour montrer ci-dessus l'inextinction ou la permanence des Sicambres, les témoignages des Historiens me manquant, j'ai été obligé d'avoir recours à ceux des Poëtes, tels que Juvenal, Martial, Claudien & Sidoine Apollinaire. D'ailleurs il est constant que ces Sicambres n'étoient autres que les Francs, comme je l'ai déja prouvé dans l'examen de la 14e Proposition du Comte de Nuenar, par l'autorité de Claudien, de Sidoine, de St. Remi & de Venance Fortunat. Ainsi le silence de Tacite, dans le Traité *de Moribus*, au sujet des Sicambres, & ce qu'il rapporte, dans ses Annales, de leur destruction avant l'Empire de Claude, doit être mis au rang des erreurs de cet Ecrivain; mais ces erreurs provenoient vraisemblablement de ce qu'avant Claude, c'est à dire du tems d'Auguste, les Sicambres ayant changé de nom, comme le dit Hunibald, le bruit courut à Rome qu'ils avoient été détruits, & l'on ne prit pas la peine de dissuader le Peuple de cette chimere, parce qu'elle flatoit la vanité Romaine: de là vint que les Historiens voulant parler des Peuples qu'ils croyoient faussement avoir remplacé les Sicambres, leur donnerent d'abord confusément le nom de Germains, & ensuite celui de Francs lorsqu'il devint plus connu des étrangers, comme dit encore Hunibald. Et c'est ce que confirment aussi ces paroles de St. Jérome, dans la Vie de St. Hila-

 rion:

rion: *Candidatus quidam Constantii Imperatoris, rutila coma, candore corporis indicans provinciam: inter Saxones quippe & Alemannos gens ejus non tam lata quam valida, apud Historicos* GERMANIA, *nunc vero* FRANCIA *vocatur.* De même que ce témoignage de Procope au Liv. I. de la Guerre des Goths: FRANCI *autem isti* GERMANI *quondam vocitabantur ... Rhenus in Oceanum immittitur. Paludes præterea hisce in locis non paucæ; ubi primitùs* GERMANI, *gens barbara, habitabant, nec magni tùm primùm momenti viri, qui nunc* FRANCI *vocitantur.* Témoin encore ce que dit Agathias au Liv. I. de son Histoire de l'Empereur Justinien: *Sunt* FRANCI *Italis accolæ & conterminì, olim dicti* GERMANI, *quod quidem satis constat. Nam circa Rhenum fluvium habitant*, &c. Enfin, le nom de Francs ayant été pris par les Sicambres 28 ans avant notre Ere Chrétienne, suivant Hunibald, il se pourroit que dès ce même tems ce nom fût venu à la connoissance des Romains. Mais la preuve qu'on en a prétendu trouver dans la Xe du Livre XIV. des Epitres de Cicéron à Atticus est mal fondée, parce que cet Orateur ayant été tué l'an 43, n'a pû connoître un nom que les Sicambres ne prirent que 15 ans après sa mort. Cicéron dit dans cette Epître, suivant certaines éditions: *Redeo ad Theobassos* (*), *Suevos, Francones;* d'autres portent: *Frangones*, & d'autres encore *Fangones.* Mais il y a apparence que toutes ces éditions ont été faites sur des Manuscrits peu corrects, & que Cicéron a voulu parler des peuples de Vormes appellés *Vangiones.*

9°. Pour achever ce qui me reste à dire d'Hunibald, il seroit à souhaiter qu'on pût produire son Histoire, ou tout au moins la Traduction telle qu'on l'avoit encore du tems de Trithéme & du Comte de Nuenar. Mais Marquard Freher ayant fait inutilement tous ses efforts pour la découvrir, bien moins pourrions-nous aujourd'hui nous flatter de

(*) Les Critiques se sont donné la torture pour expliquer ce mot *Theobassos.* Je croi qu'il s'agit des peuples d'Alsace *Triboccos*, qui secoururent Arioviste contre J. César.

de l'espérance d'y parvenir. Au défaut de cette Histoire & des trois gros Volumes que Trithéme en avoit tirés & qui sont également perdus, nous serions encore trop heureux, s'il y avoit moyen de réduire les Annales & l'Abrégé qui nous restent, au simple texte d'Hunibald, en le purgeant des interpolations qui y ont été faites, soit par l'abréviateur, soit par d'autres avant lui. C'est à quoi l'on tâchera de remédier autant qu'il sera possible, dans la Traduction qu'on en pourra donner par la suite. D'autres difficultés qu'il s'agit d'y lever regardent la Chronologie, tant parce que Trithéme, suivant l'opinion de son tems, place la naissance de J. Christ quatre ans plus tard qu'elle n'est arrivée, qu'à cause qu'il se trouve des contrariétés entre les deux Abrégés d'Hunibald par rapport aux années des régnes; de sorte que dans l'impossibilité de les concilier, il faut nécessairement sacrifier l'une des deux autorités à l'autre, en s'attachant à la plus probable. C'est pour lever ces difficultés, que j'ai cru devoir joindre ici un Abrégé de la Chronologie d'Hunibald, où l'on voit ses calculs, ou plutôt les calculs de Tritheme & ceux de Calvisius, rectifiés.

SUITE CHRONOLOGIQUE DES ROIS SICAMBRES ET FRANCS, SUIVANT HUNIBALD:

Avec un Abrégé des principaux faits rangés sous leurs dates.

Roi	Dans l'Edition de Marquard Ereher: Annales ou I. Abrégé de Tritheme.		Second Abrégé de Tritheme.		Dans la Chronologie de Calvisius.		Dates rectifiées suivant mon estime.	
	Ann. des régn.	Avant l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	Avant l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	Avant l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	Avant l'Ere Chrét.
I. MARCOMIR I. fils aîné d'Antenor régne hors de l'Allemagne; (*soit dans la Scythie, la Pannonie, la Scandie, ou ailleurs*)	0	440	0	440	—	—	—	444
Il est troublé dans ses Etats par les Goths	4	436	4	436	—	—	4	440
Il vient s'établir dans la Germanie entre la Saxe & le Rhin	7	433	7	433	1	429	7	437
Il fait son frere Sunnon ou Suimon Duc des Isles du Rhin	20	420	20	420	—	—	20	424
Il passe le Rhin, va jusqu'à la Meuse & fait ensuite alliance avec les Bretons Insulaires	24	416	24	416	—	412	24	420
Il meurt	28	412	28	410	20	409	28	416
Fin de l'Histoire de Wasthald, commencement de la continuation d'Hunibald.								
II. ANTENOR I. son fils aîné lui succede	0	412	0	410	0	409	0	416
Il s'empare de la Frise	—	—	8	402	—	—	8	408
Mort de Sunnon, Duc au delà du Rhin: son fils Hector lui succede	12	400	12	398	—	—	12	404
Priam frere d'Antenor est fait Duc de la Frise								
Le Roi Antenor meurt	30	382	30	380	39	370	30	386
III. PRIAM, son fils unique, lui succede	0	382	0	380	0	370	0	386
Gruningue est bâtie par Grunus ou Grunes, fils ou frere du Duc Priam de Frise	5	377	—	—	—	383	5	381

	Dans l'Edition de Marquard Freher: Annales ou I. Abrégé de Trittheme. Ann. des régn.	Avant l'Ere Chrét.	Second Abrégé de Trittheme. Ann. des régn.	Avant l'Ere Chrét.	Dans la Chronologie de Calvisius. Ann. des régn.	Avant l'Ere Chrét.	Dates rectifiées suivant mon estime. Ann. des régn.	Avant l'Ere Chrét.
Mort du Duc Marcomir, fils du Duc Hector & pere du Grand-Pontife Théocal -	6	376	6	374	—	—	6	380
Fondation de deux villes sur le Rhin, Neopagum, qu'on ne connoit point, & Neomagum qui est Nimegue - -	8	374	8	372	8	362	8	378
Le Roi Priam meurt - -	26	356	24	356	26	344	26	360
IV. HELENUS I. son fils aîné lui succede -	0	356	0	356	0	344	0	360
Il fait la guerre au-delà de la Meuse, tue Guedon fils aîné du Roi des Morins, & met des Ducs dans cette nouvelle conquête -		356		356		344		360
Il meurt - - -	19	337	19	337	19	325	19	341
V. DIOCLES son fils aîné lui succede -	0	337	0	337	0	325	0	341
Il secourt les Saxons contre les Goths de la Scandie - - -	12	325	10	327	—	—	10	331
Les Gaulois font irruption dans ses Etats	12	325	10	327	12	313	10	331
Il meurt - - -	39	298	39	298	39	286	39	302
VI. HELENUS II. son fils aîné lui succede -	0	298	0	298	0	286	0	302
Il est déposé - - -	14	284	14	284	14	272	14	288
VII. BASAN son frere est mis en sa place -	0	284	0	284	0	272	0	288
Il punit de mort son fils Sedan convaincu d'adultere. Le Roi des Orchades, dont il avoit répudié la fille, tente sans succès une descente sur ses côtes - -	5	279	5	279	4	268	5	283
Comme Grand-Pontife il régle le culte des Dieux & le ministere des Prêtres -	26	258	26	258	—	—	26	262
Il subjugue la Nation Tagarana, tue leur Roi Thabor, & pour mémoire bâtit le château								

de

	Dans l'Edition de Marquard Freher				Dans la Chronologie de Calvisius.		Dates rectifiées suivant mon estime.	
	Annales ou l'Abrégé de Tritheme.		Second Abrégé de Tritheme.					
	Ann. des régn.	Avant l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	Avant l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	Avant l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	Avant l'Ere Chrét.
de Monthabur près de Mayence -	33	251	—	—	32	240	33	255
Il meurt - - -	36	248	36	240	35	237	36	252
VIII. CLODOMIR ou CLODOMER I. son fils aîné lui succede - -	0	248	0	240	0	237	0	252
Les Gaulois lui demandent la restitution des terres situées entre la Meuse & le Rhin, d'où s'ensuit une guerre qui leur est funeste -	—	248	—	240	—	—	—	252
Il meurt - -	18	230	18	222	18	219	18	234
IX. NICANOR son fils aîné lui succede -	0	230	0	222	0	219	0	234
Il secourt les Saxons contre les Goths & les Sclaves - - - - -	14	216	—	—	14	205	14	220
Il fait la guerre au Roi des Orchades, pour son beaupere ou beaufrere, le Roi des Bretons	21	209	—	—	—	—	21	213
Il meurt - - -	34	196	26	196	34	185	34	200
X. MARCOMIR ou MARCOMER II. son fils aîné lui succede - -	0	196	0	196	0	185	0	200
Il ordonne que les gestes des Sicambres seront mis en vers par les Prêtres pour être chantés,								
Il meurt - -	28	168	28	168	28	157	28	172
XI. CLODIUS I. son fils aîné lui succede -	0	168	0	168	0	157	0	172
Il est tué dans un combat, par les Gaulois qui avoient passé la Meuse -	11	157	11	157	11	146	11	161
XII. ANTENOR II. son fils aîné lui succede à l'âge de 36 ans - -	0	157	0	157	0	146	0	161
Il fait une Treve de 10 ans avec les Gaulois	12	145	12	145	—	—	12	149
Il meurt - -	16	141	16	141	16	130	16	145

XIII.

	Dans l'Edition de Marquard Freher				Dans la Chronologie de Calvisius.		Dates rectifiées suivant mon estime.	
	Annales ou l'Abrégé de Tritheme.		Second Abrégé de Tritheme.					
	Ann. des régn.	Avant l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	Avant l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	Avant l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	Avant l'Ere Chrét.
XIII. CLODOMIR ou CLODOMER II. son fils lui succede - - -	0	141	0	141	0	130	0	145
Après 10 ans de treve les Gaulois passent la Meuse, & sont battus par les Sicambres	6	135	6	135	6	124	6	139
Il meurt - - -	20	121	20	121	20	110	20	125
XIV. MERODACH son fils aîné lui succede	0	121	0	121	0	110	0	125
Il a la guerre contre Marius & les Gaulois	22	99	22	99	—	—	22	103
Il meurt - - -	28	93	28	93	28	82	28	97
XV. CASSANDER son fils aîné lui succede	0	93	0	93	0	82	0	97
Il secourt Arthari Roi des Saxons joint à Hamer Roi de Thuringe, contre Borbista Roi des Goths								
Il meurt - - -	21	72	21	72	22	60	21	76
XVI. ANTHARI ou ARTHARI son fils aîné lui succede - - -	0	72	0	72	0	60	0	76
Il prend Mayence sur les Romains, la pille & la brûle - - - -	16	56	—	—	—	—	16	60
Il est tué avec 20000 des siens par les Gaulois qui avoient passé la Meuse -	35	37	35	38	34	26	35	41
XVII. FRANCK son fils aîné lui succede -	0	37	0	38	0	26	0	41
Alliance perpétuelle entre lui, les Saxons, les Thuringiens & les Teutons -	—	37	—	38	—	—	—	41
Les Saxons l'appellent à leur secours contre les Goths - - - -	13	24	13	25	3	23	13	28
Son nom crié dans la bataille où les Goths sont vaincus devient dès-lors le surnom & ensuite le nom propre des Sicambres -	13	24	13	25	3	23	13	28

	Dans l'Edition de Marquard Freher — Annales ou I. Abrégé de Trithème.		Dans l'Edition de Marquard Freher — Second Abrégé de Trithème.		Dans la Chronologie de Calvisius.		Dates rectifiées suivant mon estime.	
	Ann. des régn.	Avant l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	Avant l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	Avant l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	Avant l'Ere Chrét.
Lui & ses Alliés vont se venger sur les Gaulois d'une invasion qu'ils avoient faite dans ses terres pendant son expédition en Saxe	14	23	—	—	—	—	14	27
Il envoye le Duc Clogion son fils au secours des Saxons contre les Romains commandés par M. Lollius - - -	24	13	24	14	12	14	24	17
Il meurt - - -	28	9	28	9	28	1 De l'Ere Chrét.	28	13
XVIII. CLOGION I. son fils aîné lui succede	0	9	0	9	0	1	0	13
Il soutient la guerre contre Tibere en Allemagne - - -	4	5	—	—	—	—	4	9
Phrisus son second fils est fait Duc du pays qui de son nom fut appellé la Phrise -	10	—	10	—	—	—	10	3
De Duc il est fait Roi avec la permission de Clogion, à la charge d'un tribut annuel de 260 bœufs, 20 talens de beurre pur (chaque talent pesant 120 livres Romaines ou 90 livres poids de marc) & 3000 fromages royaux.	20	De l'Ere Chrét. 10	20	De l'Ere Chrét. 10	—	—	20	De l'Ere Chrét. 7
Clogion meurt - -	30	20	30	20	22	22	30	17
XIX. HERIMER son fils aîné lui succede	0	20	0	20	0	22	0	17
Les Gaulois passent la Meuse par la faute des Ducs qui la gardoient: le Roi les cite & les punit suivant la Loi - - -	3	23	3	23	—	—	3	20
Il fait successivement deux expéditions dans les Gaules, & dans la seconde il perd la vie	12	32	12	32	12	34	12	29
XX. MARCOMIR ou MARCOMER III. son frere lui succede - - -	0	32	0	32	0	34	0	29

Les

	Dans l'Edition de Marquard Freher				Dans la Chronologie de Calvisius.		Dates rectifiées suivant mon estime.	
	Annales ou I. Abrége de Tritheme.		Second Abrégé de Tritheme.					
	Ann. des regn.	De l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.
Les Francs établis entre le Rhin & la Meuse en sont chassés & poursuivis jusqu'aux Isles du Rhin par l'Empereur Claude lors de son voyage d'Angleterre - -	10	42	14	46	—	—	10	39
Le Roi Marcomir meurt - -	18	50	18	50	18	52	18	47
XXI. CLODOMER III. son fils lui succede -	0	50	0	50	0	52	0	47
Triple parélie au Ciel, suivie d'une famine & d'une mortalité qui s'étend jusqu'aux chevaux - - - - -	—	50	—	50	—	—	—	47
Clodomer passe le Rhin & la Meuse, & regagne ce que son pere avoit perdu -	9	59	—	—	—	—	9	56
Il combat les Romains près de Mayence, qu'ils rebâtissent malgré lui -	10	60	—	—	—	—	10	57
Il meurt - - - -	12	62	12	62	—	—	12	59
XXII. ANTHENOR III. son fils lui succede ..	0	62	0	62	0	52	0	59
Revenant d'une expédition qu'il avoit faite dans la Gaule, & se voyant pressé par les Gaulois, il veut passer la Meuse à cheval & s'y noye avec 9 Princes & 63 autres de sa Noblesse - - -	6	68	6	68	4	56	6	65
XXIII. RATHER ou RHATHERI son fils aîné lui succede - - -	0	68	0	68	0	56	0	65
Il renouvelle l'ancienne confédération du Roi Franck avec les Saxons, les Duringiens & les Tentons - - - -	2	70	—	—	—	—	2	67
Il meurt, & est enterré à Ratherdam qu'il avoit fait bâtir - - -	21	89	21	89	23	79	21	86

	Dans l'Edition de Marquard Freher				Dans la Chronologie de Calvisius.		Dates rectifiées suivant mon estime.	
	Annales ou l'Abrégé de Tritheme.		Second Abrégé de Tritheme.					
	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.
XXIV. RICHIMER I. son fils lui succede -	0	89	0	89	0	79	0	86
Il a une guerre contre les Romains & les Gaulois - - -	11	100	11	100	—	—	11	97
Il seconde Windekint Roi des Saxons, Hermenfridt Roi de Turinge & ses autres alliés, pour chasser les Goths des frontieres de la Saxe - - : -	12	101	12	101	12	91	12	98
Lui & ses alliés pour réprimer les incursions des Goths proposent d'établir entre eux & la Saxe une nombreuse colonie. (Cet établissement se fait dans le pays appellé depuis le Brandebourg.) Le Duc Sunnon fils du Roi Richimer en est le chef, y menant 18 mille personnes de sa Nation. (Il eut pour successeurs son fils Clodomer & son petit fils Sunnon II. dont il sera parlé plus bas)	15	104	15	104	15	94	15	101
Le Roi Richimer meurt - -	24	113	24	113	34	113	24	110
XXV. ODEMAR son fils aîné lui succede -	0	113	0	113	0	113	0	110
Vechtan Grand-Pontife des Francs se noye dans une riviere appellée par cette raison le Vecht, & sur son tombeau Odemar bâtit la ville d'Odemarsheim dans laquelle il voulut être enterré - - - -	5	118	—	—	—	—	5	115
Il meurt - - -	14	127	14	127	14	127	14	124
XXVI. MARCOMER IV. son fils lui succede	0	127	0	127	0	127	0	124
Francfort sur l'Oder est bâtie par le Duc Sunnon II. mentionné plus haut - -	19	146	—	—	—	—	19	143

Vers

	Dans l'Edition de Marquard Freher				Dans la Chronologie de Calvisius.		Dates rectifiées suivant mon estime.	
	Annales ou I. Abrégé de Trithème.		Second Abrégé de Trithème.					
	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.
Vers le même tems un fils du Roi Marcomer, nommé Franck, qui étoit Duc des Hogiens sur le Mein, donne son nom à une autre ville de Francfort qu'il bâtit sur les ruines de l'ancienne Helenopolis.								
Le Roi Marcomer meurt - -	21	148	21	148	21	148	21	145
XXVII. CLODOMER IV. son fils aîné lui succede - - -	0	148	0	148	0	148	0	145
Il meurt - - - -	17	165	17	165	17	165	17	162
XXVIII. FARABERT son fils aîné lui succede	0	165	0	165	0	165	0	162
Il meurt - - -	20	185	20	185	20	185	20	182
XXIX. SUNNON ou SUIMON son fils aîné lui succede - - - -	0	185	0	185	0	185	0	182
Il ravage la Gaule avec les Saxons & ses autres alliés - - -	26	211	28	213	—	—	26	208
Il meurt - - - -	28	213	28	213	28	213	28	210
XXX. HILDERIC I. son fils aîné lui succede	0	213	0	213	0	213	0	210
Il meurt - - -	40	253	40	253	40	253	40	250
XXXI. BARTHER ou BERTHER son fils lui succede - - -	0	253	0	253	0	253	0	250
Les Francs commandés par Anther ou Anthari fils de Barther, & les Saxons par Luther fils de leur Roi Marbode, portent leurs armes en Italie & prennent Ravenne -	10	263	10	263	12	265	10	260
Ils font une seconde expédition du côté de l'Espagne & y prennent Tarragone -	13	266	11	264	12	265	11	261
Le Roi Barther meurt - -	18	271	18	271	18	271	18	268

	Dans l'Edition de Marquard Freher				Dans la Chronologie de Calvisius.		Dates rectifiées suivant mon estime.	
	Annales du I. Abrépé de Tritheme.		Second Abrégé de Tritheme.					
	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.
XXXII. CLODIUS II. son fils aîné lui succede	0	271	0	271	0	271	0	268
Les Romains chassent les Francs de l'Espagne & de la Gaule	—	—	8	279	6	277	8	276
Les Francs rentrent dans la Gaule & s'y maintiennent pendant sept ans	12	283	12	283	9	280	12	280
Ils en sont chassés derechef	19	290	19	290	17	288	19	287
Le Roi Clodius meurt	27	298	27	298	27	298	27	295
XXXIII. WALTHER son fils lui succede	0	298	0	298	0	298	0	295
Il meurt	8	306	8	306	8	306	8	303
XXXIV. DAGOBERT son fils aîné lui succede	0	306	0	306	0	306	0	303
Il meurt	11	317	11	317	11	317	11	314
XXXV. CLOGION II. son fils lui succede	0	317	0	317	0	317	0	314
Les Romains ravagent les terres des Francs autour de la Meuse & du Rhin	2	319	2	319	2	319	2	316
Le Roi Clogion est tué dans un combat contre les Romains	2	319	2	319	2	319	2	316
Ses deux fils Helenus & Richimer n'ayant pas 24 ans, sont exclus de la Couronne.								
XXXVI. CLODOMIR ou CLODOMER V. frere de Clogion est élu Roi à sa place	0	319	0	319	0	319	0	316
Il envoye son frere Génébald avec des troupes au secours des Sueves contre les Romains qui sont battus. Les Thuringiens & les Saxons étoient aussi du nombre des auxiliaires. Un Thuringien accusé d'avoir détourné du butin est tué en duel par un Sueve son accusateur, ce qui est suivi d'un combat entre les deux Nations	—	—	2	321	—	—	2	318

Treve

	Dans l'Edition de Marquard Freher				Dans la Chronologie de Calvisius.		Dates rectifiées suivant mon estime.	
	Annales ou I. Abrégé de Tritheme.		Second Abrégé de Tritheme.					
	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.
Treve de 3 ans entre les Sueves & les Thuringiens, par l'entremise des Francs & des Saxons	3	322	—	—	—	—	3	319
A l'expiration de la Treve, les Thuringiens ayant besoin du secours des Francs leur abandonnent le Meingau qui est la Franconie	6	325	6	325	—	—	6	322
Générald frere de Clodomir obtient le Meingau sous le titre de Duc de la France Orientale, à la charge de reconnoître le Roi des Francs Occidentaux. Il y mene 30 mille hommes d'armes & 2686 artisans & laboureurs, dont une partie vient avec son fils Marcomir au mois de Septembre - -	7	326	7	326	—	—	7	323
Le Roi Clodomir meurt - -	18	337	18	337	18	337	18	334
XXXVII. RICHIMER II. son fils aîné lui succede	0	337	0	337	0	337	0	334
Il entre dans la Gaule avec une armée qui est mise en fuite par le Préfet Tiberianus -	4	341	—	—	—	—	4	338
Il soutient la guerre contre l'Empereur Constant avec des alternatives de bons & de mauvais succès - - -	6	343	—	—	—	—	6	340
Il est tué en combattant contre les Romains	13	350	13	350	13	350	13	347
XXXVIII. THEODOMIR ou THEODOMER son fils lui succede - -	0	350	0	350	0	350	0	347
Le Duché des Francs Orientaux passe de Générald à son fils Dagobert qui va ravager la Gaule & brûler Treves - -	7	357	7	357	—	—	7	354
Le Roi Théodomir & sa mere Hastila ou Astila fille du Roi des Saxons, sont enlevés par les Romains qui leur font trancher la tête	10	360	10	360	10	360	10	357

XXXIX.

	Dans l'Edition de Marquard Freher				Dans la Chronologie de Calvisius.		Dates rectifiées suivant mon estime.	
	Annales ou L'Abrégé de Tritheme.		Second Abrégé de Tritheme.					
	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.
XXXIX. CLOGION III. ſon fils lui ſuccede	0	360	0	360	0	360	0	357
Voulant venger la mort de ſes proches, il entre dans la Gaule, prend Cambrai, y fait paſſer la garniſon Romaine au fil de l'épée, & s'avance juſqu'à la Soana ou Sunna qui eſt la Sôme	—	—	—	360	—	—	—	357
Le Duc Dagobert paſſe le Rhin & ravage auſſi la Gaule	—	—	—	360	—	—	—	357
Le Duc Clodius ſon fils lui ſuccede	17	377	17	377	—	—	17	374
Le Roi Clogion meurt	18	378	18	378	18	378	18	375
XL. MARCOMIR ou MARCOMER V. ſon fils aîné lui ſuccede	0	378	0	378	0	378	0	375
Les Romains lui font une guerre qui dure quatre ans	—	378	—	378	—	—	—	375
Marcomir fils de Clodius eſt Duc des Francs Orientaux à ſa place	9	387	—	390	—	—	9	384
Après la mort de l'Empereur Maxime, le Roi Marcomir envoye dans les Gaules ſes Ducs Sunnon, Génébald, Priam & Antenor, qui y reprennent tout ce qu'il avoit perdu	13	391	—	—	—	—	13	388
Tandis que les principales forces des Francs ſont dans les Gaules, Valentinien II. vient attaquer Marcomir dans ſes terres, & ce Roi eſt tué dans un combat	15	393	4	382	15	393	15	390
Les Francs voyant leur Roi mort, leurs Ducs avec leurs meilleures troupes éloignés d'eux, & ignorant que l'Empereur étoit obligé de quitter l'Allemagne pour aller chaſſer les								

Lon-

Longobards de l'Italie: par ces raisons ils se laissent persuader d'accepter la paix aux conditions de payer tribut & de n'avoir plus de Rois, mais simplement un Duc pour les gouverner.

NB. On verra dans la suite que les Ducs des Francs à leur retour rejeterent la condition du Tribut, pourquoi ne rejeterent-ils pas de même celle de l'abolition des Rois? C'est que le Roi Marcomir n'avoit pas été tué comme Hunibald ou son Interpolateur l'a cru, mais avoit été fait prisonnier par les Romains qui l'envoyerent en exil dans l'Etrurie comme le dit Claudien; & que pendant sa captivité les Francs ne pouvant point élire de Rois, la garde du Trône ou la Régence fut confiée à des Ducs.

Premier Régent.

	Dans l'Edition de Marquard Freher: Annales ou I. Abrégé de Trithème		Dans l'Edition de Marquard Freher: Second Abrégé de Trithème		Dans la Chronologie de Calvisius		Dates rectifiées suivant mon estime	
	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.
DAGOBERT frere du Roi Marcomir	0	393	0	382	0	393	0	390
L'Empereur Valentinien somme les Francs de payer le tribut: leur Duc & les Princes déclarent qu'il a été promis sans leur participation, & qu'ils perdront plutôt la vie que leur liberté	1	394	1	383	1	394	1	391
Le Comte Sisinnius envoyé chez les Francs pour les engager à payer le tribut, est par eux massacré avec tous ceux qui l'accompagnoient	2	395	2	384	—	—	2	392
L'Empereur Valentinien périt à Vienne en Dauphiné par la trahison d'Arbogaste qui donne l'Empire à Eugene	—	394	—	393	—	392	2	392
Arbogaste passe le Rhin à Cologne sur la glace, & vient faire la guerre aux Francs qui lui tuent 12 mille Gaulois & le mettent en fuite	—	—	—	394	—	392	2	392

	Dans l'Edition de Marquard Freher				Dans la Chronologie de Calvisius.		Dates rectifiées suivant mon estime.	
	Annales ou l'Abrégé de Tritheme.		Second Abrégé de Tritheme.					
	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.
A l'approche de Théodose, Eugene demande en vain du secours aux Francs & aux Saxons. Il est vaincu, mis à mort, & Arbogaste se tue lui-même - - -	4	397	—	395	—	394	4	394
Dagobert premier Régent des Francs Occidentaux meurt - - -	5	398	13	395	5	398	5	395
Seconds Régents *au nombre de trois.*								
I. Génébald fils aîné de Dagobert, suivant les intentions de son pere, est Régent dans la Tongrie & le Brabant II. Marcomir son frere, dans la partie voisine du Rhin qui regardoit les Saxons III. Sunnon son autre frere, dans celle qui étoit entre la Mer, la Gaule & la Hollande	0	398	0	395	0	398	0	395
Ce Partage n'étoit pas du goût de la Nation, mais il n'eut point de suite, Marcomir & Sunnon étant morts sans enfans mâles; ils sont enterrés à Neopagum -	5	403	18	403	—	—	5	400
Faramond succede à son pere Marcomir Duc des Francs Orientaux qui est enterré sur le Franckenberg - - -	5	404	18	403	—	—		400
Les Francs attaquent les Vandales dans la Gaule, en tuent 20 mille, & les auroient entiérement exterminés, si Respendial Roi des Alains n'étoit accouru d'Espagne où il régnoit, pour les secourir -	—	—	—	413	—	—	15	410
Génébald second Régent des Francs Occi-								

	Dans l'Edition de Marquard Freher				Dans la Chronologie de Calvisius.		Dates rectifiées suivant mon estime.	
	Annales ou I. Abrégé de Tritheme.		Second Abrégé de Tritheme.					
	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.
dentaux meurt, laissant deux fils Sunnon & Richer, celui-là boiteux, celui-ci jugé peu propre à régner, & tous deux par ces raisons exclus du gouvernement - - -	21	419	19	404	22	419	22	417
La Régence demeure vacante pendant quelques mois.								
Or soit que le dernier Roi Marcomir mourut au bout de ces deux Régences, soit qu'étant mort auparavant on n'en pût être informé qu'alors, soit enfin que n'ayant point de ses nouvelles, après une absence de 28 ans, on se crût quitte envers lui; la Royauté fut transférée par un consentement unanime des Grands de la Nation à								
XLI. FARAMOND Duc des Francs Orientaux qui avoit cela de commun avec le précédent Roi, qu'ils étoient issus tous deux du Roi Dagobert par ses deux fils Génébald & Clodomir leurs trisayeuls - - -	0	419	0	405	0	419	0	418
Il se démet du Duché des Francs Orientaux en faveur de son frere Marcomir -	—	419	—	405	—	419	—	418
Il fait rédiger les Loix des Francs par quatre Sages de la Nation, Salagast, Wesogast, Wyndegast & Basogast - - -	3	422	—	—	—	—	3	421
Il meurt - - - -	7	426	26	431	6	425	10	428
XLII. CLODIUS III. ou CLODION son fils lui succede - - -	0	426	0	431	0	425	0	428
Il fait une Loi qui défend aux François de porter les cheveux courts comme les Gaulois & les Romains - - -	—	426	—	—	—	—	—	428
Il est troublé dans la partie des Gaules qu'il possédoit, par Aëtius Général Romain -	—	—	2	432	3	428	1	429

	Danc l'Edition de Marquard Freher				Dans la Chronologie de Calvisius.		Dates rectifiées suivant mon estime.	
	Annales ou I. Abrégé de Tritheme.		Second Abrégé de Tritheme.					
	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.
Il se venge contre la Thuringe de ce qu'elle ne l'avoit pas secouru contre les Romains, suivant ses anciens engagemens -	8	434	—	—	—	—	8	436
Priam succede à son pere Marcomir dans le Duché des Francs Orientaux -	10	436	—	—	—	—	10	438
Clodius envoye des espions dans la Gaule, & sur leur rapport il y fait une invasion, prend Cambrai, tue tous les Romains qu'il y trouve, delà passant par la forêt Charbonniere, il s'empare de Tournay & étend sa domination jusqu'à la Sôme - - -	—	—	12	443	2	427	12	440
Il mêurt - - -	20	446	20	451	20	445	20	448
XLIII. MEROVÉE son fils aîné lui succede	0	446	0	451	0	445	0	448
Génébald II. est Duc des Francs Orientaux après son pere Priam - -	2	448	—	—	—	—	2	450
Mérovée ligué avec les Romains & les Wisigots bat dans les Gaules Attila Roi des Huns	7	453	3	454	6	451	3	451
Eclipse de Lune (le 15 Septembre) -	8	454	—	—	8	452	4	452
Il prend la ville de Treves -	11	457	3	454	—	—	8	456
Il meurt - - -	12	458	10	461	15	460	10	458
XLIV. HILDERIC II. ou CHILDERIC son fils lui succede - -	0	458	0	461	0	460	0	458
Il est déposé, & se retire en Thuringe auprès du Roi Basin son parent -	1	459	6	467	2	462	6	464
Naissance de son fils Clovis en Thuringe	5	463	8	469	—	—	8	466
Il est rappellé & rétabli sur le Trône par l'industrie de Wimbald son confident -	4	462	14	475	9	469	14	472
Il met en fuite le Comte Gilles -	4	462	14	475	15	475	14	472

Son

	Dans l'Edition de Marquard Freher — Annales ou I. Abrégé de Tritheme. Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.	Dans l'Edition de Marquard Freher — Second Abrégé de Tritheme. Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.	Dans la Chronologie de Calvisius. Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.	Dates rectifiées suivant mon estime. Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.
Son fils Clovis âgé de sept ans vient de Thuringe en France avec sa mere (*fille du Roi Basin que Childeric avoit épousée en ce pays-là durant son exil suivant la Chronique de St. Maixant ou de Maillezais en Poitou*) - - -	—	—	15	476	—	—	15	473
Il rend la Suabe tributaire - - -	5	463	16	477	—	—	16	474
Il reprend Angers & autres villes sur Odoacar Roi des Hérules, des Turcilingues & des Scyrres, venu en France du fond de la Saxe, & l'oblige à passer en Italie -	7	465	17	478	—	481	17	475
Il acheve d'éteindre la domination Romaine dans la Gaule, & la soumet entiérement. En même tems il prend aussi Cologne, & ensuite Mayence, Wormes, Spire, Strasbourg; établit dans les principales villes conquises des Ducs ses parens, comme à Cologne Sigebert, à Cambrai Riuachaire, chez les Morins Carock, à Treves Héribert, à Metz Godgisile, à Mayence Arbogaste, &c.	17	475	—	—	19	475	17	475
Après avoir été d'abord Roi 6 ans, déposé 8 ans, & rétabli 9 ans, faisant en tout 23 ans, il meurt : - - -	26	484	23	484	24	484	23	481
XLV. CLODOVÉE ou CLOVIS, son fils aîné lui succede (*âgé de 15 ans*) -	0	484	0	484	0	484	0	481
Il défait Siagrius fils du Comte Gilles, prend Soissons, Reims, & autres villes -	1	485	1	485	2	486	1	482
Il épouse Clotilde ou Chrothilde, Princesse Chrétienne fille d'Hilderic Roi de Bourgogne	—	—	—	—	—	—	4	485

Il don-

	Dans l'Edition de Marquard Freher: Annales ou I. Abrégé de Tritheme.		Dans l'Edition de Marquard Freher: Second Abrégé de Tritheme.		Dans la Chronologie de Calvisius.		Dates rectifiées suivant mon estime.	
	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.	Ann. des régn.	De l'Ere Chrét.
Il donne à Clodius son frere le Duché des Francs Orientaux vacant par la mort du Duc Sunnon fils de Génébald II.	7	491	—	—	—	—	7	488
Il porte la guerre en Thuringe, défait le Roi & l'assujettit au tribut	9	493	10	494	7	491	10	491
Il se rend maître de Poitiers & des trésors d'Alaric Roi des Wisigoths qu'il avoit vaincu & tué	11	495	11	495	—	501	11	492
Il remporte une victoire complette sur les Alemans de la Suabe	15	499	15	499	15	499	15	496
Au retour de ce combat il se fait Chrétien, & reçoit le baptême de la main de St. Remi Evêque de Reims, 3000 des principaux François sont baptisés le même jour	15	499	15	499	15	499	15	496
Il fait la guerre à Gondebald du Gombaud Oncle & Tuteur de Clotilde, & il rend la Bourgogne tributaire	17	501	17	501	17	501	17	498
Il meurt (*âgé de 45 ans*), laissant quatre fils, Lothaire, Théodoric, Clodomir & Hildebert	30	514	30	514	30	514	30	511

FIN DE L'HISTOIRE D'HUNIBALD.

E'LO-

ÉLOGE DE MR. LE COMTE DE GOTTER.

GUSTAVE ADOLPHE, *Comte de GOTTER*, Grand-Maréchal de la Cour du Roi, Ministre d'Etat & de Guerre, Vice-Président du Directoire général de Guerre & des Finances, Grand-Maître des Postes, Chevalier de l'Ordre de l'Aigle noir, & de celui de S. Alexandre Nefsky, Seigneur de Molsdorff & autres lieux(*), nâquit à Gotha le 26 Mars, 1692. Son pere, *Jean Michel de Gotter*, étoit un homme d'un mérite distingué & d'une probité reconnue. Il fut Conseiller du Duc FRE'DERIC II. de Saxe-Gotha, & pendant les dix dernieres années de sa vie, Chef du Département des Finances. Son Epouse, *Loudemille Madelaine de Happe*, étoit fille d'un Chancelier du Prince de Schwartzbourg-Sondershausen.

Le jeune *Gotter*, se trouvant fils unique, fut élevé avec tous les soins imaginables. De bons précepteurs domestiques, aux soins desquels il fut confié jusqu'à l'âge de quinze ans, ne négligerent rien pour lui former l'esprit & le cœur. Les heureuses dispositions dont la Nature avoit doné l'Eleve à l'un & à l'autre de ces égards, firent fructifier ces semences de la maniere la plus abondante. Les Belles-Lettres surtout eurent pour lui des charmes qui le captiverent véritablement; & la force de leur empire séduisant n'a fait que s'accroître depuis avec le nombre des années.

En 1709. il se rendit à l'Université de Jéna, d'où il passa ensuite à celle de Halle. Elles avoient alors l'une & l'autre des Professeurs d'une grande célébrité, sous qui M *de Gotter*, déjà si bien préparé, fit les progrès les plus rapides. Mais, comme son cœur étoit, pour ainsi dire, plus avide encore d'alimens que son esprit, ce fut dans le cours des mêmes années qu'il se lia de l'amitié la plus tendre avec un compagnon d'étude, qui a fourni depuis comme lui une carriere éclatante dans les grands Emplois, & qui vient d'en atteindre le bout peu après Mr. *de Gotter*. C'étoit

(*) Lû dans l'Assemblée publique du 27 Janvier, 1763.

C'étoit Mr. le Baron *de Munchhausen*, Ministre d'Etat & Président de la Chambre des Finances de S. M. Britannique dans l'Electorat de Hanover. Les liaisons intimes de ces deux illustres personnages ont duré plus d'un demi-siecle, & méritent bien par conséquent d'entrer dans leur éloge, dont les traits sont d'ailleurs très ressemblans. C'est donc avec plaisir que je profite de cette occasion d'associer ici leurs noms, & de jetter les mêmes fleurs sur leur Monument.

Revenons à M. *de Gotter*, si tant est que nous nous en soyons écartés. Au retour des Universités, son pere jugea à propos de lui faire voir la France & l'Angleterre. Mais, peu après son départ, M. *de Gotter* le pere fut envoyé par son Maître à la Cour de Vienne pour quelques affaires qui intéressoient la Maison de Saxe-Gotha; &, comme ces négociations traînoient en longueur, il obtint du Duc la permission de faire venir son fils auprès de lui pour l'assister dans son travail. Le fils reçut à Paris l'ordre de se rendre à Vienne, & s'y conforma sur le champ avec une extrême joye. Il sentoit déjà ce talent inné, cette vocation marquée au maniement des affaires, qui le conduisirent bientôt à une habileté consommée dans ce genre. Son pere ne tarda pas non plus à s'appercevoir qu'il pouvoit lui remettre hardiment ses fonctions à Vienne, après lui avoir fourni toutes les instructions nécessaires pour s'en bien acquitter.

Voilà donc M. *de Gotter* qui pour apprentissage se trouve chargé d'un Ministere public à la premiere Cour du Monde Chrétien. Son caractere liant lui avoit déjà frayé en quelque sorte les voyes de la réussite. Pendant le voyage qu'il fit pour se rendre à Vienne, il s'étoit rencontré avec deux jeunes Seigneurs Autrichiens de la premiere distinction, qui furent si enchantés de son commerce, qu'à leur arrivée ils l'introduisirent chez leurs parens, & de là dans toutes les grandes Maisons; de sorte qu'en un clin d'œil, pour ainsi dire, M. de *Gotter* fut connu & chéri, ayant l'entrée libre chez tous les Ministres de la Cour Impériale, & rapportant ces avantages au bien de la Cour qu'il servoit.

Tout ceci se passoit vers la fin de l'année 1715. Le Duc de Gotha se félicita bientôt de posséder un serviteur aussi utile, & sentit combien

bien il étoit juste de l'encourager par des distinctions & des récompenses honorables. Il ne tarda pas à le revêtir du caractere de son Conseiller Privé & Envoyé Extraordinaire à la Cour Impériale. L'Empereur CHARLES VI. y ajouta en 1723. la dignité de Baron de l'Empire.

Il existe encore plusieurs témoins vivans, je ne dirai pas des agrémens dont M. *de Gotter* jouit à la Cour de Vienne, l'objet ne seroit pas assez considérable, mais du crédit presque inoui qu'il y eut. Sans recourir au manege des intrigues, sans donner dans aucune bassesse de client, dans le tems même où sur les apparences on l'auroit cru uniquement occupé à se divertir, & totalement absorbé dans les plaisirs, il manioit avec la plus grande dextérité les affaires les plus épineuses & ne rencontroit guères de nœud qu'il ne vînt à bout de dénouer. Ce qui décide surtout de son mérite, & sert en même tems à expliquer ses succès, c'est la bienveillance d'un Héros dont le simple nom vaudra toujours mieux que la pompe des épithetes, le Prince EUGENE. Cette bienveillance alloit jusqu'à l'intimité; la porte du Prince étoit ouverte pour M. *de Gotter*, lorsqu'elle étoit fermée à tout le monde; ou, s'il partageoit cette faveur, c'étoit avec un si petit nombre de personnes, & des personnes si éminentes en mérite encore plus qu'en dignité, que la distinction en devenoit d'autant plus précieuse. Il suffira de nommer une de ces personnes, à laquelle notre Académie devroit un éloge à part, si ses usages le permettoient, & cet éloge, le cœur me l'auroit véritablement dicté, comme un effet de ma sensibilité pour la correspondance la plus gracieuse dont m'a honoré jusqu'à sa fin S. E. Monseigneur le Cardinal PASSIONEI; car c'est de lui qu'il s'agit ici. Il étoit alors Nonce du Pape à Vienne; & son mérite supérieur a toujours brillé avec éclat partout où le S. Siege l'a employé. Il aima M. *de Gotter*, il en fut aimé; & ils partagerent sans rivalité les bonnes graces du Prince EUGENE.

Je trouve sous ma main une anecdote dont je crois pouvoir faire usage; mais en y apportant quelque modification. Le Nonce Passionei ayant obtenu le Chapeau de Cardinal à la fin de sa mission, Mr.

de Gotter lui écrivit une lettre de félicitation qu'il terminoit en lui souhaitant l'échange de ce Chapeau contre la triple Couronne, & en l'assurant qu'à la premiere nouvelle de son exaltation, il viendroit lui baiser la pantoufle. Le nouveau Cardinal, après lui avoir donné les marques les plus expressives de son affection réciproque, répondoit en riant au dernier article. „Je crains, Monsieur, que votre voyage „en ce cas n'aura jamais lieu, & que je puis renoncer dès à présent à „l'honneur de vous voir à Rome; car je suis trop honnête homme „pour devenir jamais Pape.“ La modification que je crois nécessaire à ce trait pour lui servir de passeport, c'est de l'envisager du côté de la confiance que le Cardinal témoignoit à M. *de Gotter*, plutôt que de celui de la satyre qui paroit s'y trouver contre les Chefs de l'Eglise Romaine. Nous avons été contemporains de Papes qui étoient incontestablement de grands Princes & d'honnêtes gens.

C'étoit un coup d'œil bien riant que celui de la situation de M. *de Gotter* dans les années dont nous rendons compte. S'il ne s'agissoit que d'un vil parvenu, nous tirerions bientôt le rideau; mais peut-on voir sans complaisance un homme qui, en faisant son devoir avec distinction, s'empare de l'affection universelle; un homme qui, bien loin de percer laborieusement à travers les obstacles qui retardent son élévation, est comme porté sans effort aux plus grandes places par les suffrages unanimes de ceux qui les dispensent, & ce qui n'est pas moins rare, sans exciter les murmures d'aucun concurrent? Disons tout, de peur qu'on ne refuse sa créance à des choses si éloignées du cours des événemens. M. *de Gotter* avoit une qualité qui gagne les cœurs préférablement à toute autre; il étoit obligeant, officieux au delà de toute expression. S'adresser à lui, faire sa demande, & en voir l'effet, n'étoit pour l'ordinaire qu'une seule & même chose dans tous les cas possibles & licites. Comment ne se seroit-on pas intéressé pour un homme qui s'intéressoit si généreusement en faveur de tous ceux à qui ses bons offices pouvoient être utiles?

Comme

Comme, parmi les protégés de M. *de Gotter*, il se trouvoit des personnes de tout rang, & souvent des Princes, ceux-ci reconnoissoient ses soins en Princes; & c'est ce qui le mit en état de faire la figure brillante qu'il a si longtems soutenue à Vienne. C'étoit moins l'effet d'un faste frivole que celui d'un rafinement de politique. Tandis qu'il égaloit en magnificence, & même qu'il effaçoit pour l'ordinaire, les Ministres que les plus grandes Puissances tenoient à Vienne, il balançoit par là même leur crédit, & prévaloit sur eux dans des affaires de la derniere importance. Ici à la fin les serpens de l'envie commencerent à siffler. On se récria sur la dépense excessive de M. *de Gotter*, sur la somptuosité de sa table, sur le fracas de ses équipages; & l'on voulut insinuer qu'un homme si occupé de la représentation n'étoit gueres propre à vaquer à l'essentiel. L'arrêt d'un Juge dont personne n'osoit contester la compétence, anéantit toutes ces Critiques; comme on les faisoit un jour en présence du Prince EUGENE, après un assez long silence, il prit la parole, & dit. „Il est vrai que le Baron „*de Gotter* fait une belle dépense; je sai qu'il a une table exquise, qu'on „mange bien chez lui, qu'on y boit encore mieux; mais ce que je sais „aussi d'une science très certaine, c'est qu'avec cela il ne néglige aucu„ne affaire.“

Dans plusieurs de nos Eloges nous avons eu occasion de rendre hommage à la pénétration du feu Roi. Ce grand Prince se connoissoit en hommes, & savoit apprécier les talens, surtout dans ce qui concernoit la conduite des Etats. Il comprit sans peine, que *M. de Gotter*, tout éloigné qu'il paroissoit de la simplicité & de la frugalité dont ce Monarque avoit fait la base de son systeme, n'en étoit pas moins un habile homme, un homme que les plus grands Princes devoient rechercher. Après avoir donc commencé par le décorer de l'Ordre de la Générosité, il l'éleva rapidement au faîte des honneurs, en le faisant Ministre d'Etat & de Guerre en 1727. Presque en même tems l'Impératrice de Russie lui envoya l'Ordre de S. Alexandre, & deux ans après, en 1729, FREDERIC GUILLAUME le fit Chevalier de l'Aigle Noir. Ces brillantes chaînes ne rompirent pas d'abord cel-

 les

ales qu'il avoit jusqu'alors portées. Il conserva tous ses engagemens avec la Cour de Gotha; & dans cette même année le Duc le nomma son Ministre Plénipotentiaire à la Diete de l'Empire, sans qu'il fût obligé néanmoins de quitter son poste à Vienne, où il étoit bien plus utile qu'il n'auroit pu l'être à Ratisbonne.

En 1731. il fut chargé de paroître devant le Thrône Impérial pour l'acte solemnel d'investiture des fiefs de l'Empire qui appartiennent à la Maison Ducale de Saxe Gotha; mais la mort inopinée du Duc FREDERIC II. empêcha que cette cérémonie n'eût lieu. Les changemens causés par cette même mort à la Cour de ses anciens Maîtres déterminerent aussi M. *de Gotter* à résigner les emplois qui l'y attachoient pour répondre enfin aux flatteuses avances du Roi de Prusse. En changeant de Maître, il ne changea point de fonction, & demeura Ministre Plénipotentiaire à la Cour Impériale. Il lui fut permis en même tems de se charger des affaires du Duc *de Wirtemberg*. La cérémonie de l'investiture des fiefs de ce Duc se fit à Vienne, M. *de Gotter*, & M. *le Baron de Keller*, à présent Ministre du Duc de Saxe Gotha, étant les représentans du Prince. Peu de tems auparavant M. *de Gotter* avoit aussi reçu l'investiture du Duché de Stettin pour le Roi son nouveau Maître.

Il demeura à Vienne jusqu'à la fin de l'année 1736. Il faut que le dégoût du monde soit une disposition bien naturelle à l'homme, & d'autant plus forte qu'on connoit mieux le monde, & qu'on en jouit davantage, puisque dès ce tems-là M. *de Gotter* ne put y résister, & qu'excédé par un genre de vie trop tumultueux, il demanda son rappel avec des instances qui le lui firent obtenir, aussi bien que la permission d'aller goûter les douceurs du repos à sa Terre de *Molsdorff*. Sa Majesté, trop satisfaite de ses services pour ne pas les récompenser, le gratifia d'une pension, & le revêtit du caractere de son Ministre Plénipotentiaire dans le Cercle de la Haute-Saxe.

On a souvent comparé ceux qui passent de l'éclat des grandes places à l'obscurité de la retraite, à des Comédiens qui ont perdu leur

rôle. Cela n'eſt pourtant vrai que de ceux qui ne ſont effectivement que des Comédiens, & ne ſavent jouer qu'un rôle. Les Pompones & les Dagueſſeaux ont fait voir le contraire. M. *de Gotter* peut leur être aſſocié, & même avec cette différence à ſon avantage, que ſa retraite étoit volontaire, ſans ombre de diſgrace. Je ne m'embarraſſerai point à chercher des preuves de détail de la conduite eſtimable qu'il tint dans cet intervalle d'inaction apparente: j'en ai une déciſive en main. C'eſt, que le Roi, notre auguſte Souverain, à peine monté ſur le Thrône, le tira de *Molsdorff* pour l'appeller à Berlin. M. *de Gotter* obéit; car, malgré tout ce que cet ordre avoit pour lui de gracieux & de glorieux, ce fut par un acte d'obéiſſance qu'il y déféra. Le prix de cette obéiſſance fut la dignité de Grand-Marêchal de la Cour. L'Empereur le créa dans le cours de la même année Comte; & il accepta cette nouvelle dignité avec l'agrément du Roi ſon Maître. Preſque auſſitôt après ſurvint le décès de l'Empereur, qui engagea le Roi à envoyer encore M. le Comte *de Gotter* à Vienne, pour y faire à S. M. la Reine de Hongrie & de Boheme des propoſitions d'accommodement qui auroient prévenu la premiere Guerre de Siléſie, ſi leur ſuccès eût répondu à la juſtice manifeſte des prétentions, & aux ſoins empreſſés du Négociateur.

De retour à Berlin, M. *de Gotter* reprit l'exercice de la charge de Grand-Marêchal de la Cour, & s'en acquitta juſqu'au commencement de 1745. Ici ſe trouve l'époque de ſes liaiſons avec l'Académie. Je ne retracerai point l'hiſtoire du renouvellement de cette Compagnie, préparé vers la fin de 1743. & ſolemniſé en 1744. il y a aujourd'hui dix-neuf ans. M. *de Gotter* fut mis au nombre des Curateurs; & nous l'avons ſouvent vu paroître en cette qualité dans nos Aſſemblées tant littéraires qu'œconomiques, montrant dans toutes les occaſions beaucoup de zele pour les intérêts de l'Académie, & prévenant ſes Membres par des attentions qu'il leur a continuées juſqu'à ſa fin. J'en parle par une expérience qui m'eſt commune avec preſque tous mes Confreres ici préſens.

M. *de Gotter* étoit doué de la constitution la plus vigoureuse; mais il la mettoit aussi aux plus fortes épreuves. Sa santé s'altéra donc; & après avoir cherché le repos de l'esprit dans sa premiere retraite, il fut obligé de demander la permission d'en faire une seconde pour s'occuper des réparations de la machine chancelante. Le Roi consentit à ses désirs; & M. *de Gotter* passa de nouveau cinq ans à *Molsdorff*. Cet espace de tems ne fut pas suffisant pour le rétablir; ses maux parurent même empirer. Il eut recours au voyage de Montpellier comme à une dernière ressource; & cela lui réussit au delà de toutes ses espérances. Il revint de ce voyage en 1751, si plein de forces & de toute son ancienne vivacité que les herbes de Médée n'auroient pu produire un rajeunissement plus décidé. Le seul obstacle qui l'empêchoit de servir un Roi auquel il étoit attaché par des liens aussi doux qu'honorables, étant ainsi levé, M. *de Gotter* revint à Berlin, & y a fini ses jours. Leur fin a été précédée de souffrances considérables; & pour ne *pas* dissimuler ce dont il est lui-même convenu, elles étoient assez bien méritées. Les plaisirs des sens laissent presque toujours après eux de cuisans souvenirs: heureux ceux en qui ils font naître en même tems de salutaires repentirs! Les témoins des combats de M. *de Gotter* l'ont été de ses regrets. Il sentit non seulement combien étoient solides les leçons philosophiques, adoucies par les charmes de la Poésie, qu'un Poëte réellement couronné lui avoit données; mais il éleva son ame jusqu'à la source des vrais biens, & fit paroitre un désir ardent d'y puiser. Ces sentimens le soutinrent jusqu'au moment qui termina ses plaisirs & ses peines, le 28. Mai de l'année derniere (1762) dans sa soixante & dixieme année. Quatre vers de l'auguste Auteur que je viens d'indiquer, me paroissent très applicables aux dernieres circonstances de cet Eloge, & très propres à le terminer.

C'est le combat interne & la réflexion,
Qui nous font approcher de la perfection.
Oui, notre vrai bonheur & notre récompense,
C'est d'établir la paix dans notre conscience. (*)

(*) Epitre à Sweerts.

ERRATA.

Tome XVI. p. 45. l. 3. de la Dissertation, au lieu de, la salure des eaux de sources, lisez — la salure des eaux de mer & des eaux de sources.

Tome XIX. p. 116. §. 64. en marge au lieu de Pl. IV. lisez — Pl. VI.

p. 117. l. 10. pouces, lisez — pouce.

p. 429. l. 23. qu'on n'a pas sû, lisez — sûes.

p. 436. l. 15. Il est est, lisez — il en est.





